# 大野和の線形関係式について

佐藤 信夫

概要. 大野関係式は特別な形の多重ゼータ値の和 (大野和) の双対関係式とみなせる。本稿では大野和の満たす $\mathbb{Q}$ 線形関係式についての広瀬稔氏、村原英樹氏、小野塚友一氏との共著論文 [3] の結果を紹介する。

## 1. 多重ゼータ値の大野関係式と大野和

多重ゼータ値は、許容的インデックス $(k_1,\dots,k_d)$ ($k_d>1$ であるような $d$ 個の正整数の組) に対して、級数

$$\zeta(\emptyset):=1,$$
$$\zeta(k_1,\dots,k_d):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_d}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}}\quad (d>0 \text{ の場合})$$

で定義される実数の無限族で、多様な $\mathbb{Q}$ 上の関係式を満たすことが知られている。よく知られた $\mathbb{Q}$ 上の線形関係式族の一つに、次の「双対関係式」がある。まず、許容的インデックスを

$$\boldsymbol{k}=(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\dots,\{1\}^{a_r-1},b_r+1)\quad (a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_r>0)$$

の形に表わしたとき、その双対インデックスを

$$\boldsymbol{k}^\dagger=(\{1\}^{b_r-1},a_r+1,\dots,\{1\}^{b_1-1},a_1+1)$$

と定義する (定義から双対インデックスもまた許容的になることに注意)。ここで、$\{k\}^a$ は $\overbrace{k,\dots,k}^{a\text{ 個}}$ を表す記号とする。このとき多重ゼータ値の双対関係式は次の等式である。

**定理 1.** 許容的インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して、$\zeta(\boldsymbol{k}^\dagger)=\zeta(\boldsymbol{k})$.

ホフマンは $\boldsymbol{k}=(\{1\}^{a-1},b+1)\quad (a,b>0)$ の場合に双対関係式を証明し、さらに一般の場合を予想した。双対関係式は初めに述べた多重級数による定義からは明らかではない[1]が、コンセビッチにより多重ゼータ値の反復積分表示が発見されたことで、双対関係式はその対称性として簡単に証明されることとなった。

一方、多重ゼータ値について最も古くから知られる関係式の一つとして、次の「和公式」がある。

**定理 2** (和公式 [2])**.** $k>d>0$ に対して、

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=k\\(k_1,\dots,k_d)\text{ は許容的}}}\zeta(k_1,\dots,k_d)=\zeta(k).$$

大野はこの和公式と先の双対関係式を同時に一般化する次の大野関係式を発見し証明した。

**定理 3** (大野関係式 [5])**.** 許容的インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)$ と非負整数 $m$ に対して、

$$\sum_{\substack{e_1,\dots,e_d\ge0\\e_1+\cdots+e_d=m}}\zeta(k_1+e_1,\dots,k_d+e_d)=\sum_{\substack{e_1,\dots,e_{d'}\ge0\\e_1+\cdots+e_{d'}=m}}\zeta(l_1+e_1,\dots,l_{d'}+e_{d'})$$

が成り立つ。ここで、$\boldsymbol{k}^\dagger=(l_1,\dots,l_{d'})$ とした。

---

[1]関真一郎氏と山本修司氏は、彼らが新たに開発した結合和の手法を用いて、双対関係式を級数表示から直接示すことに成功した ([7])。

容易に見て取れるように、大野関係式の $m=0$ の場合は双対関係式、$\boldsymbol{k}=(k)$ の場合は和公式となっている。さて、大野関係式に登場した特徴的な多重ゼータ値の和を

$$O_m(\boldsymbol{k}) := \sum_{\substack{e_1,\dots,e_d\geq 0\\ e_1+\cdots+e_d=m}} \zeta(k_1+e_1,\dots,k_d+e_d),$$

とおき大野和 (の $m$ 次部分) と呼ぼう。また、その母関数 (これも大野和と呼ぶ) を

$$O(\boldsymbol{k}) := \sum_{m=0}^{\infty} O_m(\boldsymbol{k})\xi^m \quad \in \mathbb{R}[[\xi]]$$

で定義する。このとき大野関係式とは、許容的インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して $O_m(\boldsymbol{k}^\dagger)=O_m(\boldsymbol{k})$ が全ての $m\geq 0$ について成立する、すなわち、$O(\boldsymbol{k}^\dagger)=O(\boldsymbol{k})$ という主張である。では逆に $O(\boldsymbol{k})$ が満たすのは双対関係式だけだろうか？すなわち、次のような問題が考えられる。

**問題 4.** $O(\boldsymbol{k})$ たちはどのような関係式を満たすか？可能なら全 $\mathbb{Q}$-線形関係式を決定せよ。

もし $O(\boldsymbol{k})$ たちの満たす $\mathbb{Q}$-線形関係式が双対関係式だけで尽きていると仮定すると、$k\geq 2$ に対して、

$$\mathcal{O}_k := \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\,\{\,O(k_1,\dots,k_d)\,|\,k_1+\cdots+k_d=k,\ (k_1,\dots,k_d)\text{ は許容的}\,\}$$

の次元は $\dim\mathcal{O}_k=2^{k-3}$ ($k$:奇数)、$\dim\mathcal{O}_k=2^{k-3}+2^{\frac{k}{2}-2}$ ($k$:偶数) である。一方、計算機による数値的な手法を用いて $\dim\mathcal{O}_k$ の値を予想すると、次の表のようになる。

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dim\mathcal{O}_k$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 9 | 14 | 29 | 48 | 94 | 160 | 301 | 518 |

この表から、$k\geq 6$ のとき、$O(\boldsymbol{k})$ には双対関係式以外の関係式があることが見て取れる。具体的には、$k=6$ のとき、

$$O(1,2,3)+O(1,3,2)+O(3,1,2)-O(2,4)-3O(3,3)=0 \tag{1.1}$$

$k=7$ のとき、

$$O(1,2,4)+O(1,4,2)+O(4,1,2)-O(2,5)-2O(3,4)-2O(4,3)=0 \tag{1.2}$$

$$O(2,3,2)+O(1,4,2)+O(1,3,3)-O(3,1,3)-O(2,2,3)-O(2,1,4)=0 \tag{1.3}$$

という新しい関係式があることがわかる。今回、これらの関係式を含む 2 つの関係式族を発見し、証明できたのでそれらについて報告する。また、証明は出来ていないが幾つかの関係式族を予想したので、それらについても稿の最後に紹介する。

## 2. 二重大野関係式

まず、1 つ目の関係式族は次のものである。

**定理 5** (二重大野関係式)**.** $n_0,n_1,\dots,n_{2r}\geq 0$ を $2r+1$ 個の非負整数とし、$\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d):=(\{2\}^{n_0},1,\{2\}^{n_1},3,\dots,\{2\}^{n_{2r-2}},1,\{2\}^{n_{2r-1}},3,\{2\}^{n_{2r}})$ とする。このとき、非負整数 $m$ に対して、

$$\sum_{\substack{e_1,\dots,e_d\geq 0\\ e_1+\cdots+e_d=m}} O(k_1+e_1,\dots,k_d+e_d) = \sum_{\substack{e_1,\dots,e_d\geq 0\\ e_1+\cdots+e_d=m}} O(l_1+e_1,\dots,l_d+e_d)$$

が成り立つ。ここで、$\boldsymbol{k}^\dagger=(l_1,\dots,l_d)$ とした。

この定理は、$\boldsymbol{k}$ が特殊な形のインデックスの場合には、大野和がまた大野関係式を満たす、ことを主張する。式 (1.3) は、$\boldsymbol{k}=(1,3,2)$, $m=1$ の場合である。両辺に現れた大野和の和

$$\sum_{\substack{e_1,\dots,e_d\geq 0\\ e_1+\cdots+e_d=m}} O(k_1+e_1,\dots,k_d+e_d)$$

の $\xi^n$ の係数を $O_{m,n}(\boldsymbol{k})$ とおくと、

$$O_{m,n}(k_1,\dots,k_d)=\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_d=m\\ f_1+\cdots+f_d=n}}\zeta(k_1+e_1+f_1,\dots,k_d+e_d+f_d)$$

であり、二重大野和とでも呼ぶべきものになっている。$O_{m,n}(\boldsymbol{k})$ の母関数を

$$\mathrm{Oh}(\boldsymbol{k}):=\sum_{m,n\geq 0}O_{m,n}(\boldsymbol{k})\xi^m\eta^n \quad \in\mathbb{R}[[\xi,\eta]]\ \left(=\sum_{n\geq 0}O_n(\boldsymbol{k})\eta^n\right)$$

で定義すると、定理 5 は次の形に述べることも出来る。

**定理 6** (二重大野関係式)**.** $\boldsymbol{k}$ が定理 5 の形のインデックスのとき、$\mathrm{Oh}(\boldsymbol{k}^\dagger)=\mathrm{Oh}(\boldsymbol{k})$ である。

以下、この定理の導出について簡単に述べる。ここでは [3] に則り大野関係式に帰着させる証明を紹介する。まず、定理をホフマン代数 [4] の言葉で定式化する。$\mathfrak{h}:=\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$ とし、$\mathfrak{h}^0:=\mathbb{Q}\oplus y\mathbb{Q}\langle x,y\rangle x\subset\mathfrak{h}$ とおく。このとき、$\mathfrak{h}^0$ のモニック単項式は許容的インデックスと

$$1\longleftrightarrow\emptyset$$
$$yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_d-1}\longleftrightarrow(k_1,\dots,k_d)$$

によって一対一に対応する。そこで、この対応によってインデックス (およびその形式的 $\mathbb{Q}$ 線形和) と $\mathfrak{h}^0$ の元を同一視する。この対応のもと、

$$(\{2\}^{n_0},1,\{2\}^{n_1},3,\dots,\{2\}^{n_{2r-2}},1,\{2\}^{n_{2r-1}},3,\{2\}^{n_{2r}})=y(xy)^{n_0}(yx)^{n_1+1}(xy)^{n_2+1}\cdots(yx)^{n_{2r-1}+1}(xy)^{n_{2r}}x$$

である。また、$\zeta$ を $\mathfrak{h}^0$ 上の写像に $\mathbb{Q}$ 線形に拡張し、さらに $\mathfrak{h}^0[[\xi,\eta]]\longrightarrow\mathbb{R}[[\xi,\eta]]$ に自然に拡張しておく。いま、$\tau$ を

$$\tau(x)=y,\ \tau(y)=x$$

で定まる $\mathfrak{h}^0$ 上の反自己同型とし、$\mathfrak{h}^0[[\xi,\eta]]$ 上に係数毎の作用として延長したものも同じ記号で表すことにする。また、$\sigma,\sigma'$ を

$$\sigma(x)=x,\ \sigma(y)=y(1-\xi x)^{-1}$$
$$\sigma'(x)=x,\ \sigma'(y)=y(1-\eta x)^{-1}$$

から定まる $\mathfrak{h}^0[[\xi,\eta]]$ 上の自己同型とする。$\tau$ を用いると $\boldsymbol{k}^\dagger=\tau(\boldsymbol{k})$ である。また、

$$O_{m,n}(k_1,\dots,k_d)=\zeta(\sum_{\substack{e_1+\cdots+e_d=m\\ f_1+\cdots+f_d=n}}yx^{k_1+e_1+f_1-1}\cdots yx^{k_d+e_d+f_d-1})$$

だから、$\sigma,\sigma'$ を用いると、

$$\begin{aligned}O(\boldsymbol{k})&=\zeta\left(\sum_{e_1,\dots,e_d\geq 0}yx^{k_1+e_1-1}\cdots yx^{k_d+e_d-1}\xi^{e_1+\cdots+e_d}\right)\\&=\zeta\left(\sigma(\boldsymbol{k})\right),\\ \mathrm{Oh}(\boldsymbol{k})&=O(\sigma'(\boldsymbol{k}))\\&=\zeta\left(\sigma\sigma'(\boldsymbol{k})\right)\end{aligned}$$

である。従ってこれらの写像を使うと大野関係式、二重大野関係式はそれぞれ次の形に表現できる。

**定理 7** (大野関係式)**.** $w\in\mathfrak{h}^0$ に対して、

$$\zeta((\sigma-\sigma\tau)(w))=0.$$

**定理 8** (二重大野関係式)**.** $w\in\mathbb{Q}\oplus y\mathbb{Q}\langle xy,yx\rangle x$ に対して、

$$\zeta((\sigma\sigma'-\sigma\sigma'\tau)(w))=0.$$

大野関係式 (定理 7) から二重大野関係式 (定理 8) を導出する際には次の補題が鍵である。

**補題 9.** $w \in \mathbb{Q} \oplus y\mathbb{Q}\langle xy, yx \rangle x$ に対して、$\tau\sigma\tau\sigma'(w) = \sigma'\tau\sigma\tau(w)$.

補題の証明は難しくないが多少計算が必要なので論文 [3] に譲る。さて、補題 7 より、$\mathbb{Q} \oplus y\mathbb{Q}\langle xy, yx \rangle x$ 上で、

$$\begin{aligned}\sigma\sigma' - \sigma\sigma'\tau &= (\sigma - \sigma\tau)\sigma' + \tau(\tau\sigma\tau\sigma') - \sigma\sigma'\tau \\ &= (\sigma - \sigma\tau)\sigma' + \tau(\sigma'\tau\sigma\tau) - \sigma'\sigma\tau \\ &= (\sigma - \sigma\tau)\sigma' - (\sigma' - \sigma'\tau)\sigma\tau - (\mathrm{id} - \tau)\sigma'\tau\sigma\tau\end{aligned}$$

であるから、$w \in \mathbb{Q} \oplus y\mathbb{Q}\langle xy, yx \rangle x$ に対して、

$$\begin{aligned}\zeta((\sigma\sigma' - \sigma\sigma'\tau)(w)) =& \zeta((\sigma - \sigma\tau)\sigma'(w)) - \zeta((\sigma' - \sigma'\tau)\sigma\tau(w)) - \zeta((\mathrm{id} - \tau)\sigma'\tau\sigma\tau(w)) \\ =& 0.\end{aligned}$$

こうして定理 8 が証明される。証明から分かるように、大野関係式を満たす対象は全て二重大野関係式を満たす。例えば、

$$\zeta_q(k_1, \ldots, k_d) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_d} \frac{q^{m_1(k_1-1)+\cdots+m_d(k_d-1)}}{[m_1]^{k_1}\cdots[m_d]^{k_d}}$$

で定義される $q$-多重ゼータ値も多重ゼータ値と完全に同じ形の大野関係式を満たすことが知られている [1] ので、$\zeta_q(k_1, \ldots, k_d)$ もまた二重大野関係式を満たすことが分かる。また、類似の方法で有限多重ゼータ値に対する大野型関係式 [6] から、その二重版が証明できる [3] がここでは省略する。

## 3. 大野和のもう一つの関係式族と、関連する予想式群

この節では、新たに証明できた別種の大野和の関係式族について紹介する。二重大野関係式は、現れる項が全て同じ深さ (インデックスの成分の個数) であるという特徴を持っていた。しかし、以下で述べる関係式族は異なる深さのインデックスに対する大野和を含む関係式族である。

まず、2 以上の整数 $s$ とインデックス $\boldsymbol{k}$ に対して、

$$F(s; \boldsymbol{k}) := O((s)\widetilde{\sqcup\!\sqcup}\boldsymbol{k}) - O((s)\widetilde{\sqcup\!\sqcup}\boldsymbol{k}^\dagger)$$

とおく。ここで、$(s)\widetilde{\sqcup\!\sqcup}(k_1, \ldots, k_d) := \sum_{0\le i<d}(k_1, \ldots, k_i, s, k_{i+1}, \ldots, k_d)$ とした。このとき、次が成り立つ。

**定理 10** ([3])**.** $s, t \ge 2$ に対して、$F(s; (t+1)) = F(t; (s+1))$.

証明には大野関係式と調和積公式を使う。詳しくは [3] を参照のこと。さて、この結果の拡張や類似として、以下の関係式族を数値計算のデータから予想したので、それを以てこの稿を締めたい。

**予想 11** ([3])**.** $s, t \ge 2,\ m \ge 0$ に対して、$F(s; (t+1)\widetilde{\sqcup\!\sqcup}(\{2\}^m)) = F(t; (s+1)\widetilde{\sqcup\!\sqcup}(\{2\}^m))$.

$m = 0$ の場合は定理 10 そのものである。また $m = 1, 2$ の場合、予想はそれぞれ、

$$F(s; (t+1, 2)) + F(s; (2, t+1)) = F(t; (s+1, 2)) + F(t; (2, s+1))$$

$$F(s; (t+1, 2, 2)) + F(s; (2, t+1, 2)) + F(s; (2, 2, t+1)) = F(t; (s+1, 2, 2)) + F(t; (2, s+1, 2)) + F(t; (2, 2, s+1))$$

となる。

**予想 12** ([3])**.** $s \ge 2,\ m, n \ge 0$ に対して、

$$\begin{aligned}&O((s)\widetilde{\sqcup\!\sqcup}(\{2\}^m, 1, \{2\}^{n+1})) - O((s)\widetilde{\sqcup\!\sqcup}(\{2\}^m, 1, \{2\}^{n+1})) \\ &= \sum_{\substack{a+b=s+3 \\ a\ge2, b\ge3}} \left( \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j\ge0}} O(\{2\}^i, a, \{2\}^n, b, \{2\}^j) - \sum_{\substack{i+j=m-1 \\ i,j\ge0}} O(\{2\}^i, a, \{2\}^{n+1}, b, \{2\}^j) \right)\end{aligned}$$

**予想 13** ([3])**.** $s \geq 3,\ n \geq 0$ に対して、

$$O((s)\widetilde{\text{ш}}(\{3\}^m)) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k\geq 0 \\ a_0+\cdots+a_j=s+3j \\ a_0,\dots,a_{j-1}\geq 2, a_j\geq 3}} (-1)^j O(\{1,2\}^i, a_0, \dots, a_j, \{1,2\}^k) + \sum_{\substack{i+j+k=n-1 \\ i,j,k\geq 0 \\ a_0+\cdots+a_j=s+3j \\ a_0,\dots,a_j\geq 2}} (-1)^j O(\{1,2\}^i, 1, a_0, \dots, a_j, 2, \{1,2\}^k)$$

**予想 14** ([3])**.** $s \geq 2$ に対して、

$$O((s)\widetilde{\text{ш}}(1,1,3)) - O((s)\widetilde{\text{ш}}(1,4)) = -\sum_{\substack{a+b=s+3 \\ a\geq 1, b\geq 3}} O(a,b,2) + \sum_{\substack{a+b=s+4 \\ a\geq 2, b\geq 3}} O(a,1,b) + \sum_{\substack{a+b=s+2 \\ a\geq 2, b\geq 2}} O(a,b,3)$$

**予想 15** ([3])**.** $s \geq 2$ に対して、

$$\begin{aligned} &O((s)\widetilde{\text{ш}}(4,2)) - O((s)\widetilde{\text{ш}}(2,1,1,2)) \\ &= \sum_{\substack{a+b=s+2 \\ a\geq 1, b\geq 1}} O(a,b,2,2) - \sum_{\substack{a+b=s+2 \\ a\geq 2, b\geq 2}} O(a,2,b,2) \\ &- \sum_{\substack{a+b=s+3 \\ a\geq 2, b\geq 2}} O(2,a,1,b) - \sum_{\substack{a+b=s+3 \\ a\geq 2, b\geq 3}} O(a,b,1,2) + \sum_{\substack{a+b=s+3 \\ a\geq 2, b\geq 2}} O(a,1,2,b) \\ &- \sum_{\substack{a+b=s+4 \\ a\geq 2, b\geq 3}} O(a,b,2) + O(3,2,s+1) - O(s+1,2,3) \end{aligned}$$

## 参考文献

[1] D. M. Bradley, ‘Multiple q-zeta values,’ J. Algebra 283 (2005), 752-798.
[2] A. Granville, ‘A decomposition of Riemann’s zeta-function,’ in Analytic Number Theory, Y. Motohashi (ed.), London Mathematical Society Lecture Note Series 247, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 95-101.
[3] M. Hirose, H. Murahara, T. Onozuka, and N. Sato, ‘Linear relations of Ohno sums of multiple zeta values,’ arXiv:1910.07740[NT].
[4] M. E. Hoffman, ‘The algebra of multiple harmonic series,’ J. Algebra 194 (1997), 477-495.
[5] Y. Ohno, ‘A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values,’ J. Number Theory 74 (1999), 39-43.
[6] K. Oyama, ‘Ohno-type relation for finite multiple zeta values,’ Kyushu J. Math. 72 (2018), 277-285.
[7] S. Seki and S. Yamamoto, ‘A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations,’ Int. J. Number Theory 15 (2019), 1261-1265.