数理解析研究所講究録 1408 巻 2004 年 20-39

スケーリング変換のヤコビアンの正則化

無所属 (元信州大学)　浅田　明 (ASADA Akira)
Freelance Mathematician, (Former; Sinsyu University)

概要

有限次元の場合と違って、無限次元では　変数のスケーリング変換のヤコビアンは発散（または0）となるのが普通で　積分の計算ができなくなる。ここではζー正則化の手法を使って、スケーリング変換のヤコビアンを正則化する。応用として、Dを正定値楕円形微分作用素としたとき　経路積分 $\int \exp(-\pi(x, Dx))\mathcal{D}x$ の値が　D のレイーシンガー行列式で与えられることの　正当化　と、ヒルベルト空間（にデターミナント・バンドルを付け加えた空間）の球面の正則化体積の計算を行う。経路積分にレイーシンガー行列式が表れることの正当化は、以前　分数冪積分を用いて行ったが、スケーリング変換のヤコビアンの正則化として、もっと簡単（自然）にできる。

1 Introduction

Dを正値楕円形偏微分作用素 λ_n をその固有値;$De_n = \lambda_n e_n$, とするとき　ガウス型経路積分は形式的には

$$\begin{aligned}\int e^{-\pi(x,Dx)}\mathfrak{D}x &= \lim_{n\to\infty}\int_{\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\lambda_1 x_1^2+\cdots\lambda_n x_n^2} dx_1\cdots dx_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}} = \frac{1}{\sqrt{det.D}}\end{aligned}$$

と計算されるが　この式で $det.D$ は　そのままでは意味がないので、Hawking によって D のレイーシンガー行列式

$$det.D = e^{-\zeta'(D,0)}, \quad \zeta(D,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s},$$

を使う事が提案され　物理学者の間では広くみとめられている ([11])。以前　その数学的正当化を分数冪積分を使って与えたが ([4])、分数冪積分は計算しにくいので、有限次元のガウス積分と同様　スケーリング変換のヤコビアンを使って計算できれば、より実用的になる。もちろん無限次元では　スケーリング変換の行列式は　そのままでは定義できないので、正則化が必要である。この正則化を　以下に述べるように　レイーシンガー行列式の定義 ([1],[13],[15]) と同じ考えで定義する ([5])。

レイーシンガー行列式は

$$\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\lambda_n^{-s}}|_{s=0} = e^{tr(D^{-s}\log D)}|_{s=0},$$

と書ける。ただし $|_{s=0}$ は $s=0$ への解析接続を表す。一般に 線形作用素 T が $T=e^S$ と書ければ $S=\log T$ と書いて

$$det_D T = e^{tr(D^{-s}S)}|_{s=0},$$

が存在するとき $det_D T$ を T の D にかんする正則化行列式と呼ぶ ([6],[14] 参照)。T がスケーリング変換 T_a:$T_a e_n = a_n e_n$, $a=(a_1, a_2, \ldots)$ のとき

$$det_D T_a = e^{\sum \lambda_n^{-s}\log a_n}|_{s=0} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n^{\lambda_n^{-s}}|_{s=0},$$

だから $det_D T_a =: \prod_n a_n :$ となる。ただし $:\prod_n a_n:$ は正則化無限積である ([2])。x_n を変数と考えたとき $:\prod_n x_n:$ は 各 x_n について線形である。したがって、

$$\frac{\partial^N}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_N}} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n ; =: \prod_{n\notin\{i_1,\ldots,i_N\}} x_n :,$$

となるが、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N} \prod_{n=1}^{\infty} x_n : (= \lim_{N\to\infty} : \prod_{n=N+1}^{\infty} x_n :),$$

は 通常の意味では計算できない。しかし 適当な関数空間上の弱微分としては

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N} : \prod_{n-1}^{\infty} x_n := 1, \tag{1}$$

が成立する ([5])。これから $T_a^* f(x) = f(T_a x)$ としたとき

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N} x_1^{\lambda_1^{-s}} \cdots x_N^{\lambda_N^{-s}} |T_a^* f(x) d^N x|_{s=0} \\ = &\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |:\prod_{n=1}^{\infty} a_n :|^{-1} f(x) d^N x, \end{aligned} \tag{2}$$

となり T_a のヤコビアンが $:\prod_n |a_n| := |det_D T_a|$ と正則化される。ただし次のことが問題になる。

(1). f は (1) が成立する関数空間にぞくしているか？
(2). : $\prod_n x_n$: は f の定義されている空間の変数に対して意味があるか?

(1) については ($\mathbb{R}^n$ ではなく $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ での積分の極限だが)

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N_+} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\lambda_1^{-s}} \cdots x_N^{\lambda_N^{-s}}\right) e^{-(x_1+\cdots+x_N)} d^N x$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1+\lambda_n^{-s})$$

であり　$\log\Gamma(1+x) = -\gamma x + \sum_{m\geq 2}(-1)^m \zeta(m)/m x^m$ だから ([9])

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} \gamma(1+\lambda_n^{-s}) = -\gamma\zeta(D,s) + \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m \frac{\zeta(m)}{m}\zeta(D,ms),$$

となって、右半平面の実軸と虚軸に接しない道 $\gamma(s)$:$\gamma(0)=0$ に沿って解析接続すれば

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N_+} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\lambda_1^{-s}} \cdots x_N^{\lambda_N^{-s}}\right) e^{-(x_1+\cdots+x_N)} d^N x|_{s=0} = 1,$$

となり f が $\mathbb{R}^n_+$ でソボレフ 1-L^1 の関数であれば $f\exp(-\sum_{m\geq n+1} x_m)$ に対して (1) が成立する。$\exp(-\pi\sum x_n^2)$ にたいしても同様の計算ができるから、かなりの関数に対して、(2) が適用できる。ただし解析接続の道として実軸は取れないから「積分」としては「架空」の感じがするのは否定できない。

(2) については　関数空間としてヒルベルト空間 H を考えるのは適切でなく　H を少し拡張した空間で考えなければならない ([3],[4])。この拡張された空間は　ほぼ H にデターミナント・バンドルを付け加えた空間である ([3])。

$\exp(-\pi(\sum_n x_n^2))$ を含む空間の上の弱微分として (1) が成立するから

$$\int e^{-\pi(x,Dx)}\mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{det.D}},$$

が (2) から得られる。また　極座標を使って、計算すれば　「球面」の正則化体積要素

$$: d^\infty\omega := \prod_{n=1}^{\infty} \sin^{\nu-n-1}\theta_n d\theta_n, \quad : d^\infty x := r^{\nu-1}dr : d^\infty\omega :,$$

が導かれる ([4])。ただし $\nu = \zeta(D,0)$ である。またこの場合 球面は H ではなく H の極座標で 現れる緯度変数をすべて独立と考えた空間（H より 1 次元高い空間）の球面 $\hat{S}^\infty$ としなければならない。その場合 上の「体積要素」による（単位球面）の正則化「体積」は

$$\mathrm{vol}(\hat{S}^\infty) = \frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})},$$

となる。

本稿の概要は次のとおりである。レイーシンガー行列式 ([1],[4],[13],[15]) と正則化行列式を 2 節で、3 節で正則化無限積 ([2],[4]) を説明する。正則化無限積の弱微分は 4 節で計算される ([5])。ヤコビアンの計算は全空間 (5 節), 「立方体」(6 節) で行われる ([5])。これらの計算は正則化因子

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s}|_{s=0},$$

を利用して行われる。7 節ではヒルベルト空間の極座標について説明する。ヒルベルト空間は最後の座標がないので、経度がなく 緯度も独立ではない。緯度をすべて独立になるよう空間を拡張すれば 1-次元あがる。この付け加えられた次元は デターミナント・バンドル（のファイバー）的なものである（[3])。これを付け加えることによって 拡張された空間の球面にたいして正則化体積要素と正則化体積が 8 節で求められる。

2 レイーシンガー行列式と正則化行列式

D がコンパクト多様体の上で定義された楕円形偏微分作用素のとき、そのスペクトラルζ一関数 $\zeta(D,s) = tr(D^{-s}) = \sum_n \lambda_n^{-s}$ は $s=0$ で正則になり D のレイーシンガー行列式 $det.D$ は

$$det.D = e^{-\zeta'(D,s)}|_{s=0} = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\lambda_n^{-s}}|_{s=0},$$

で定義される ([13])。D が正定値でなければ λ_n^{-s} は λ_n の偏角のとり方に関係するから $\zeta(D,s)$ は一意ではない。したがってそのレイーシンガー行列式も一意には決まらない。固有値に無関係に偏角が取れるとき その角を Agmon angle θ といい 一般の楕円形微分作用素については θ に関係して ζ-関数や レイーシンガー行列式が決まる。D が自己共役のときは

$$\zeta(D,s) = \sum_{\lambda_n>0} \lambda_n^{-s} + (-1)^s \sum_{\lambda_n<0} |\lambda_n|^{-s},$$

と書けば、$-1 = \exp(\pi i)$ とするか $-1 = \exp(-\pi i)$ とするかによって、$\zeta(D,s)$ は 2 種類ある ([1])。前者を $\zeta_+(D,s)$, 後者を $\zeta_-(D,s)$ と書く。D の η-関数

$$\eta(D,s) = \sum_n \mathrm{sgn}(\lambda_n)|\lambda_n|^{-s} = \sum_{\lambda_n>0} \lambda_n^{-s} - \sum_{\lambda_n<0} |\lambda_n|^{-s},$$

を使うと

$$\zeta_\pm(D,s) = \frac{\zeta(|D|,s) \pm \eta(D,s)}{2}, \quad \zeta(|D|,s) = \eta(D^2, \frac{s}{2}),$$

である。$\nu = \zeta(|D|,0)$, $\nu_\pm = \zeta_\pm(D,0)$ 　とおけば

$$det(D) = (-1)^{\nu_-} det.|D|, \quad \begin{aligned} det.|D| &= det.D_+ \cdot det.D_-, \\ D\pm &= \frac{|D|+D}{2}, \end{aligned} \tag{3}$$

となる。したがって ([1], [15])

定理 D が自己共役のとき $det.D$ が一意的にきまること、$det.D$ が実数になること　および ν_- が整数になること　は同値である。

レイーシンガー行列式の定義は $det.D = \exp(tr(D^{-s}\log D))|_{s=0}$ と書けるので、一般に $T = \exp(S)$ となるとき　T の (D に関する) 正則化行列式を

$$det_D T = e^{tr(D^{-s}S)}|_{s=0},$$

で定義する (S は一意的でないから一般には一意的ではない)。

注意　D が正でないが自己共役なとき

$$D^{-s} = D_+^{-s} + (-1)^{-s}|D_|^{-s}, \quad e^{-i\pi s} - e^{\pi s} = -2i\sin\pi s,$$

だから $det_D T$ の定義は　D^{-s} のとり方には関係しない。

D の固有関数を $e_n : De_n = \lambda_n e_n$ とし、T_x, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ を $T_x e_n = x_n e_n$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ で定めれば

$$det_D T_x = \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\lambda_n^{-s}}|_{s=0},$$

だから以前に定義した　正則化無限積 : $\prod_n x_n$: になる。$x_n > 0$ で無ければ 正則化無限積 : $\prod_n x_n$: は　かならずしも一意的に決まらないが、

$$| : \prod_{n=1}^{\infty} x_n : | =: \prod_{n=1}^{\infty} |x_n| :,$$

が成立する。また $e_1, e_2, \ldots$ で張られるヒルベルト空間 H では　T_x はスケーリング変換である。

例 1　　$T = tI, t > 0; I$ は恒等作用素であれば：$\prod_n t := t^{\zeta(D,s)}|_{s=0} = t^\nu$ だから $det_D tI = t^\nu$, また

$$det_D(T_1T_2) = det_D T_1 \cdot det_D T_2, \quad if\ T_1T_2 = T_2T_1,$$

だから $tT = tI \cdot T$ により

$$det_D(tT) = t^\nu det_D T,$$

である。

例 2　　$(Te_n, e_n) = x_n$, $(Se_n, e_n) = \log x_n$ であれば $tr(D^{-s}S) = \sum \lambda_n \log x_n$ だから

$$det_D T =: \prod_{n=1}^{\infty} x_n :,$$

である。特に

$$T = T_x + N, \quad T_x N = NT_x, \quad \lim_{n\to\infty} \|N^n\|^n = 0,$$

であれば　$det_D T = det_D T_x =: \prod_n x_n :$ である。

注意　$x \notin H$ であっても T_x は　(H の中で定義された作用素) として定義できる。たとえば $x_n = \lambda_n$ であれば $T_x = D$ だから T_x の定義域は D の定義域と一致し、H ではない。

以下では　D の変わりに $G = D^{-1}$, $\mu_n = \lambda_n^{-1}$ を使い $det_D T$ を $det_G T$ とも書く。このときは

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_n := \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\mu_n^s}|_{s=0}$$

である。また $\zeta(D,s)$ の代わりに $\zeta(G,s) = tr(G^s) (= \zeta(D,s))$ を使う。

注意　$T = e^S$ なら $P^{-1}TP = e^{P^{-1}SP}$, $tr(G^s, P^{-1}SP) = tr(P^{-1}G^sP, S)$ だから

$$det_G(P^{-1}TP) = det_{P^{-1}GP} T,$$

が成立する。特に $PG = GP$ であれば $det_G(P^{-1}TP) = det_G T$ である。

3 正則化無限積

$\{H, G\}$ をヒルベルト空間 H とその上の非退化で正の Schatten class 作用素 G で　その ζ-関数 $\zeta(G,s) = tr(G^s)$ が $s = 0$ で　正則なものとの組とする。G の固有値とそれに属する正規化された固有関数を μ_n, e_n: $Ge_n = \mu_n e_n; \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots > 0$, とし　H の完備正規直交系は $\{e_n\}$ に固定する。また $x \in H$ の座標は $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x = \sum_n x_n e_n$ とする。

例　X をコンパクト　リーマン多様体 E をその上のベクトル・バンドルとし、D を E の切断に働く　非退化自己共役　楕円形(擬)微分作用素　とする。H を E の（二乗可積分な）切断の作るヒルベルト空間、G を D のグリーン作用素とすると $\{H, G\}$ が　上記の組の例になる ([10])。

注意　　この組は　Connes の spectral triple と良く似ているが、spectral triple ほどの一般性は無い。しかし　より具体的である ([4],[7])。

$\{H, G\}$ は　次のような（不変）量をもつ。

1. 正則化次元：$\nu = \zeta(G, 0)$.
2. d:$\zeta(G, s)$ の最初の極の位置.
3. $det.G$, $\zeta(G, -d/2)$.

定義から $\sum \mu_n^c e_n \in H$, $c > d/2$, $\mu_n^{d/2} e_n \notin H$ である。３番目の $det.G$ や $\zeta(G, -d/2)$ は意味が不明確だが、$H = L^2(X)$ のとき

$$d = \frac{\dim.X}{m}, \quad m = \mathrm{ord}.D,$$

だから d は　H が　d-次元空間上の関数空間　に近いことをあらわす。

H のノルムを $\| \|$ とし $x \in H$ の k-ソボレフ　ノルムを

$$\|x\|_k = \|G^{-k} x\|, \tag{4}$$

で導入する。また　このノルムと H から作られたソボレフ空間を W^k とする。W^k の完備正規直交系は $\{e_{n,k}\}$, $e_{n,k} = \mu_n^k e_n$ であたえられ　正則化次元は H と同じ ν である。

$$e_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_n, \quad e_{\infty,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{k+d/2} e_n,$$

とおけば

$$e_\infty \notin H,\ e_\infty \in W^k,\ k < 0, \quad e_{\infty,k} \notin W^k,\ e_{\infty,k} \in W^l,\ l < k, \tag{5}$$

である。集合として $W^k \subset W^l$, $k > l$ だが

$$H^- = \bigcap_{l<0} W^l,\ W^{k-0} = \bigcap_{l<k} W^l, \quad H^+ = \bigcup_{l>0} W^l,\ W^{k+0} = \bigcup_{l>k} W^l, \tag{6}$$

とおけば $e_\infty \in H^-$, $e_{\infty,k} \in W^{k-0}$ だから $H \subsetneqq H^-$, $W^k \subsetneqq W^{k-0}$ である。位相を考えに入れたとき $(H^-)^\dagger = H^+$, $(W^{k-0})^\dagger = W^{k+0}$ であるが、以下では H^+, W^{k+0} は使わない。

定義 空間 $H^-(finite)$, $H^-(0)$ を

$$H^-(finite) = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H^- | \lim_{n\to\infty} \mu_n^{-d/2} x_n \ exists\}, \quad (7)$$

$$H^-(0) = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H^- | \lim_{n\to\infty} \mu_n^{-d/2} x_n = 0\}, \quad (8)$$

で定義する。同様に $W^{k-0}(finite)$, $W^{k-0}(0)$ も定義される。

定義から $x \in H^-$ のとき $\lim_{n\to\infty} \mu_n^{-d/2} x_n = t$ とおけば

$$x = y + te_\infty,\ y \in H^=(0), \quad y = \sum_{n-1}^{\infty} y_n e_n,\ y_n = x_n - t\mu_n^{d/2},$$

である。同様に $x \in W^{k-0}(finite)$ なら $x = y + te_{\infty,k}$, $y \in W^{k-0}(0)$ と一意的にかける。したがって

$$H^-(finite) = H^-(0) \oplus \mathbb{R}e_\infty, \quad W^{k-0}(finite) = W^{k-0}(0) \oplus \mathbb{R}e_{\infty,k}, \quad (9)$$

である。位相空間として $H^-(0)$ は H^- の部分空間と考えるが、$H^-(finite)$ は $H^-(0)$ と $\mathbb{R}$ の積空間と考える。

$x = y + te_\infty \in H^-(finite)$ とし、$t \neq 0$ とすれば $x_n = y_n + t\mu_n^{d/2}$ の正則化無限積 : $\prod_n x_n$: は

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(y_n + t\mu_n^{d/2})^{\mu_n^s} &= t^{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s} \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\frac{d}{2}\mu_n^s} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{y_n}{t\mu_n^{d/2}})^{\mu_n^s} \\ &= t^{\zeta(G,s)}(\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n^{\mu_n^s})^{d/2} \prod_{n-1}^{\infty}(1 + \frac{y_n}{t\mu_n^{d/2}})^{\mu_n^s},\end{aligned}$$

だから $\prod_n(1 + y_n/(t\mu_n^{d/2}))$ が収束すれば存在し

$$:\prod_{n=1}^{\infty} x_n := t^\nu (det.G)^{d/2} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{y_n}{t\mu_n^{d/2}})^{\mu_n^s}|_{s=0}, \quad (10)$$

となる。同様に $x = y + te_{\infty,k} \in W^{k-0}(finite)$, $t \neq 0$ であれば $x = \sum x_n e_{n,k} = \sum x_n \mu_n^k e_n = \sum_n x_{n,k} e_n$, $\sum_n x_n e_n \in H^-(finite)$ だから、

$$:\prod_{n-1}^{\infty} x_{n,k} := (det.G)^k : \prod_{n=1}^{\infty} x_n :, \quad (11)$$

である。よって $H^{-}(finite)$ や $w^{k-0}(finite)$ では　その稠密な部分集合の元にたいして、正則化無限積が定義できる。なお $t>0$ で無ければ ν が整数でないとき正則化無限積は t の偏角の選び方に関係し、必ずしも一意ではない。

定理　正則化無限積は　各変数 x_n について線形で　すべての n について $x_n>0$ なら $:\prod_n x_n:>0$, また

$$|:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:|=:\prod_{n=1}^{\infty}|x_n|:, \tag{12}$$

が成立する。

注意　$x=\sum x_n e_n \in H\cap H^{-}(finite)$ のとき $:\prod_n x_n:$ は存在しないが、$\nu>0$ であれば $:\prod_n x_n:=0$ として良い。

$\prod_n (tx_n)^{\mu_n^s}=t^{\zeta(G,s)}\prod_n x_n$ だから

$$:\prod_{n=1}^{\infty} tx_n:=t^{\nu}:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:,$$

である。また各 x_n が実数で　有限個 (p 個) を除いて $x_n<0$ であれば

$$:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:=(-1)^{\nu-p}:\prod_{n=1}^{\infty}|x_n|:,$$

となる。したがって ν が整数でなければ $:\prod_n x_n:$ は一価ではない。

4　正則化無限積の弱微分

正則化無限積は各変数について　線形だから

$$\frac{\partial^N}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_N}}:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:=:\prod_{j\notin\{i_1,\dots,i_N\}} x_j:$$

と思える。したがって

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:=1 \tag{13}$$

が成立する事が期待されるが、微分を通常の意味とするとこの極限は計算できない。この節では　適当な弱微分の意味でこれが成立することを示す([5], [12] 参照)。

例 1 $\int_0^\infty \frac{d}{dx}x^c e^{-x}dx = \Gamma(1+c)$ だから

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty (\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s})e^{-(x_1+\cdots+x_N)}dx_1\cdots dx_N$$
$$= \prod_{n=1}^\infty \Gamma(1+\mu_n^s),$$

である。$\log(\Gamma(1+x)) = -\gamma x + \sum_{m\geq 2}(-1)^m(\zeta(m)/m)x^m$ だから

$$\sum_{n=1}^\infty \log(\Gamma(1+\mu_n^s)) = -\gamma\zeta(G,s) + \sum_{m\geq 2}(-1)^m \frac{\zeta(m)}{m}\zeta(G,ms),$$

となる。したがって、$\prod_n \Gamma(1+\mu_n^s)$ は　右半平面 $\{z|\Re z>0\}$ に解析接続され　特異点は実軸の上で 0 に集積する。これから s が右半平面の中の区分的に滑らかで、実軸と虚軸に接しない道に沿って、0 に近づけば

$$\lim_{s\to 0}\prod_{n=1}^\infty \Gamma(1+\mu_n^s) = 1, \tag{14}$$

となる。よって

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^N}(\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_N^{\mu_N^s})e^{-x_1-\cdots-x_N}d^N x|_{s=0}$$
$$= 1, \qquad s=\gamma(t),\ \gamma(0)=0, \tag{15}$$

となる。但し γ は　右半平面の実軸　および虚軸に接しない道である。

有限変数の関数にたいしては f が適当な可積分条件を満たせば

$$\lim_{s\to 0}\int_{\mathbb{R}_+^N}(\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_N^{\mu_N^s})f(x_1,\cdots,x_N)d^N x$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1,\cdots,x_N)d^N x, \tag{16}$$

だから、(15) によって正成分の無限次元ベクトルの作る空間 $\mathbb{R}_+^n$ の上のソボレフ　L^1 型の関数空間を $L^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$, $L^{1,1}(\mathbb{R}_+^\infty)$ を

$$\bigcup_{n=1}^\infty \{f(x_1,\ldots,x_n)e^{-\sum_{m>n}x_m}|f\in L^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)\},$$

のソボレフ (1,1)-型完備化とすれば　$L^{1,1}(\mathbb{R}_+^\infty)$ 上の弱微分として (1) が成立する。

例 2 $\int_{-\infty}^{\infty}|\frac{d}{dx}x^c|f(x)dx = \int_0^{\infty}(\frac{d}{dx}x^c)f(x)dx + \int_{-\infty}^{0}(\frac{d}{dx}|x|^c)f(x)dx$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\frac{d}{dx}x^c|e^{-\pi x^2}dx = 2\pi^{-c/2}\Gamma(1+\frac{c}{2})$$

である。$e^{-\pi\sum_n x_n^2}$ は各変数について　偶関数だから

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}|\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_N^{\mu_N^s}|e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_N^2}d^Nx|_{s=0}\\ =\ &\int_{\mathbb{R}_+^N}(\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}(2x_1)^{\mu_1^s}\cdots(2x_N)^{\mu_N^s})e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_N^2)}d^Nx|_{s=0},\end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\frac{\partial^N}{\partial X_1\cdots\partial x_N}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_N^{\mu_N^s}|e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_N^2)}d^Nx|_{s=0}\\ =\ &\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\mu_n^s}\Gamma(1+\mu_n^s/2)}{\pi^{\mu_n^s/2}}|_{s=0},\end{aligned}$$

となる。　例 1 と同様に

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\log(\frac{2^{\mu_n^s}\Gamma(1+\mu_n^s/2}{\pi^{\mu_n^s/2}}\\ =\ &(\log 2-\frac{\pi}{2}-\gamma)\zeta(G,s)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}\zeta(G,\frac{n}{2}s),\end{aligned}$$

だから $\prod_n(2^{\mu_n^s}\Gamma(1+\mu_n^s/2))/\pi^{\mu_n^s}$ は　右半平面に解析接続可能である。また $(2\Gamma(1+1/2))/(\sqrt{\pi})=1$ だからアーベルの連続性定理により γ が右半平面の実軸・虚軸に接しない道で $\gamma(0)=0$ のとき $s=\gamma(t)$ であれば

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\frac{\partial^N}{\partial x_1\cdots\partial x_N}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_N^{\mu_N^s}|e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_N^2)}d^Nx|_{s=0}=1, \tag{17}$$

となる。よって $W^1(\mathbb{R}^\infty)$ を

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f(x_1,\cdots,x_n)e^{-\pi\sum_{m>n}x_m^2}|f\in W^1(\mathbb{R}^n)\},$$

の　ソボレフ 1 型完備化とすれば、$W^1(\mathbb{R}^\infty)$ の双対空間の元としての弱微分として、(1) が成立する。

注意　$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x_n^2}dx_n$ を $\int_0^{\infty}2^{\mu_n^s}e^{-\pi x_n^2}dx_n|_{s=0}$ と正則化するのは人工的だが「立方体」上の積分の極限と考えれば　ある程度の正当化が可能である。

5　スケーリング変換のヤコビアンの正則化

H、あるいは $W^{k-0}(finite)$ 上の関数 f に対し $T_a^* f$ を

$$T_a^* f(x) = f(T_a x), \quad a = (a_1, a_2, \dots),\ T_a x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots), \qquad (18)$$

で定義する。

注意　$a \in H$ は仮定しない。したがって T_a の定義域（像）は必ずしも H ではない。例えば $a_n = \lambda_n$ であれば T_a の定義域は（H の部分集合としての）W^1 になる (あるいは H から W^{-1} への写像)。

以下 $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d^n x$ が存在するとする ($f \in W^1(\mathbb{R}^\infty)$ とする)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} c x^{c-1} f(ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^c c y^{c-1} f(y) dy, \quad y = ax,$$

だから f が例 2 で使われた関数空間に属していれば

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} | T_a^* f d^n x \\ = &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |a_1|^{-\mu_1^s} \cdots |a_n|^{-\mu_n^s} | \frac{\partial^n}{\partial y_1 \cdots \partial y_n} y_1^{\mu_1^s} \cdots y_n^{\mu_n^s} | f(y) d^n y, \end{aligned}$$

となる。これから : $\prod_n a_n$: が存在すれば

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} | T_a^* f dx^n |_{s=0} \\ = &\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} | : \prod_{n=1}^{\infty} a_n : |^{-1} f dx^n, \end{aligned} \qquad (19)$$

である。この式からスケーリング変換 T_a のヤコビアンは : $\prod_n a_n$: と正則化されたことになる。また特に

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} | e^{-\pi(x, Dx)} d^n x |_{s=0} = \frac{1}{\sqrt{det.D}}, \qquad (20)$$

となる。この式はガウス型経路積分の値がレイーシンガー行列式に正則化される解析接続の方法を与えている　と解釈できる。

注意　$x \in H$ であれば : $\prod_n x_n$:= 0 だから　この計算に意味をつけるには　積分を　$H^-(finite)$　の上で考えた　と解釈する必要がある。

$e^{-\pi \sum_n x_n^2}$ は $H^-(finite)$ の上では定義されていないが、$x \notin H$ であれば $\sum_n x_n^2 = \infty$ だから $H^-(finite)$ で

$$e^{-\pi \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \begin{cases} e^{-\pi \|x\|^2} & x \in H^-(finite) \cap H \\ 0 & x \in H^-(finite) \setminus H \end{cases}$$

と定義できる。同様に$e^{-\pi(x,Dx)}$も本来の定義域$W^{1/2}$から定義域を拡張して$W^{1/2-0}(finite)$の上の関数にできる。したがって上の注意から(20)は

$$\int_{W^{1/2-0}(finite)} e^{-\pi(x,Dx)}\mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{det.D}}, \tag{21}$$

と解釈できる。

注意 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_n^2}dx_n$ を $\int_0^{\infty} 2^{\mu_n^s}e^{-\pi x_n^2}dx_n|_{s=0}$ と正則化するのを正当化するには　積分の場所を$W^{k-0}(finite)$, $k < -d/2$ としたほうがよい(6節末の注意2　参照)。

$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)d^nx$ が存在するときも ($f \in L^{1,1}(\mathbb{R}_+^\infty)$ のときも)　$a \gg 0$;　$a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots$　であれば $y_n = a_nx_n$ として

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n}(\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s})T_a^*f(x)d^nx \\
= &\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n} a_1^{-\mu_1^s}\cdots a_n^{-\mu_n^s}(\frac{\partial^n}{\partial y_1\cdots\partial y_n}y_1^{\mu_1^s}\cdots y_n^{\mu_n^s})f(y)d^ny,
\end{aligned}$$

となるから $:\prod_n a_n:$ が存在すれば

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n}(\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s})T_a^\sharp f(x)d^nx|_{s=0} \\
= &\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+^n}(:\prod_{n=1}^{\infty}a_n:)^{-1}f(x)d^nx,
\end{aligned} \tag{22}$$

である。(19), (22) から

定理　$W^1(\mathbb{R}^\infty)$ または $l^{1,1}(\mathbb{R}_+^\infty)$ の元に対する積分では、スケーリング変換T_aのヤコビアンは

$$det_GT_a =: \prod_{n=1}^{\infty} a_n :, \tag{23}$$

と正則化される。

注意　(22)も積分は$H_+ = \{x \in H | x = (x_1, x_2, \ldots) \gg 0\}$では無く$H^-(finite)_+ = \{x \in H^-(finite) | x \gg 0\}$で行われていると解釈すべきである。

6 「立法体」での積分

$a \in H^-(finite)$, $a \gg 0$ のとき $H^-(finite)$, $H^-(finite)_+$ での「立方体」$Q(a)$, $Q(a,+)$ を

$$Q(a) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in H^-(finite) \| x_n| \le a_n\}, \quad (24)$$
$$Q(a,+) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in H^-(finite)_+ | 0 \le x_n \le a_n\}, \quad (25)$$

で定義する。また

$$Q(a,n) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \| x_1| \le a_1, \dots, |x_n| \le a_n\}, \quad (26)$$
$$Q(a,n,+) = \{x = (x_1, \dots, x_n) | 0 \le x_1 \le a_1, \dots 0 \le x_n \le a_n\}, \quad (27)$$

とおく。$b \gg 0$;　$b = (b_1, b_2, \dots)$ のとき

$$a \cdot b = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots), \quad b^{(-1)} = (b_1^{-1}, b_2^{-1}, \dots), \quad (28)$$

と書くことにする。同様に $a \in W^{k-0}(finite)$ であれば $W^{k-0}(finite)$ の立体 $Q(a)$, $Q(a,+)$ も定義される。特に $\varepsilon = (1,1,\dots) \in W^{-1/2-0}(finite)$ だから $Q(\varepsilon)$, $Q(\varepsilon,+)$ が $W^{1/2-0}(finite)$ の部分集合として定義される。$Q(\varepsilon,+)$ の上の定数関数　1 については

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q(\varepsilon,n,+)} 1 d^n x = \lim_{n\to\infty} \prod_n 1 = 1,$$

となる。他方 $Q(\epsilon)$ 上では 定数関数 1 の積分は

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 2^{\mu_1^s} dx_1 \cdots \int_0^1 2^{\mu_n^s} dx_n|_{s=0} = \prod_{n=1}^{\infty} 2^{\mu_n^s}|_{s=0} = 2^{\zeta(G,s)}|_{s=0} = 2^{\nu},$$

と正則化する。一般に $t\varepsilon = (t,t,\dots)$, $t > 0$ として、$Q(t\varepsilon,+)$, $Q(t\varepsilon)$ での定数関数 1 の積分は

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^{\mu_1^s} dx_1 \cdots \int_0^1 t^{\mu_n^s} dx_n|_{s=0} = t^{\zeta(G,s)}|_{s=0} = t^{\nu}, \quad (29)$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (2t)^{\mu_1^s} dx_1 \cdots \int_0^1 (2t)^{\mu_n^s} dx_n|_{s=0} = (2t)^{\nu}, \quad (30)$$

と正則化する。

(28) により　f が $Q(b)$ $(Q(b,+))$ で定義されていれば $T_a^* f$ は $Q(a^{(-1)} \cdot b)$ $(Q(a^{(-1)} \cdot b,+))$ で定義される。

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q(a,n)} f(x) d^n x = \int_{Q(a)} f(x) d^{\infty} x, \quad (31)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q(a,n,+)} f(x) d^n x = \int_{Q(a,+)} f(x) d^{\infty} x, \quad (32)$$

と書くことにし、その存在を仮定すれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q(a^{(-1)}\cdot b,n)}|\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s}|T_a^* f(x)d^n x|_{s=0}$$
$$= \int_{Q(b)}|:\prod_{n=1}^{\infty}a_n:|f(x)d^\infty x, \tag{33}$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q(a^{(-1)}\cdot b,n,+)}(\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s})T_a^* f(x)d^n x|_{s=0}$$
$$= \int_{Q(b,+)}:\prod_{n=1}^{\infty}a_n:f(x)d^\infty x, \tag{34}$$

となる。したがって

定理　$Q(b)$, $Q(b,+)$ 上の積分についてもスケーリング変換 T_a のヤコビアンは $|:\prod_n a_n:|^{-1}$ と正則化される。

例 1　$T_t x = tx$ とすれば $W^{-1/2-0}(finite)$ で $T_t Q(\varepsilon,+) = Q(t\varepsilon,+)$ だから

$$\int_{Q(t\varepsilon,+)}1d^\infty x = \int_{Q(\varepsilon,+)}:\prod_{n=1}^{\infty}t:1d^\infty x = t^\nu,$$

となって (29) が正当化される。

例 2　$T_a Q(\varepsilon,+) = Q(a,+)$ だから $:\prod_n a_n:$ が存在すれば

$$\int_{Q(a,+)}1d^\infty x = \int_{Q(\varepsilon,+)}:\prod_{n=1}^{\infty}a_n:1d^\infty x =: \prod_{n=1}^{\infty}a_n:d^\infty x,$$

となる。したがって $Q(a,+)$ の正則化体積 $:\mathrm{vol}(Q(a,+)):$ を

$$:\mathrm{vol}(Q(a,+)) =: \prod_{n=1}^{\infty}x: \tag{35}$$

で定義できる。

注意 1 平行移動変換 $\mathbf{t}_a$ を $\mathbf{t}_a x = x + a$ で定義すれば $\mathbf{t}_a Q(a) = Q(2a,+)$ である。有限次元では平行移動のヤコビアンは 1 だから　$\mathbf{t}_a$ の正則化ヤコビアンも 1 とすれば (30) も (35) から正当化されることになる。なお

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x_n)dx_n = \lim_{a_n\to\infty}\int -a_n{}^{a_n}f(x_n)dx_n,$$

と見れば $\int_{-\infty}^{\infty}f(x_n)dx_n = \int_0^{\infty}2^{\mu_n^s}f(x_n)dx_n$ の正則化が　正当化されたことになる。

注意　2 一般に $Q(a)$ が $W^{k-0}(finite)$ の「立方体」であれば

$$\bigcup_{t>0} Q(ta) = W^{k-0}(finite),$$

だが　積分については $\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{Q(a,n)} f(x)d^n x$ が　(無限積として) 収束するには $k < -d/2$ が必要である。したがって (21) も $(\exp(-\pi(x, Dx))$ を $W^{k-0}(finite)$, $k < -d/2$, に拡張して)$W^{k-0}(finite)$ での積分と考える方が良いかもしれない。

7　ヒルベルト空間の極座標と経度

$x = (x_1, x_2, \dots) \in H$, $\|x\| = r$ とする。x の極座標を

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1,\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \dots, \\ x_n &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n, \dots \quad 0 \le \theta_i \le \pi, \end{aligned} \tag{36}$$

とする。この座標は動径と緯度は有るが経度は無い。また $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_n$ だから緯度 $\theta_1, \theta_2, \dots$ は独立ではなく制約

$$\lim_{n\to\infty} \sin\theta_1\cdots\sin\theta_n = 0, \tag{37}$$

をみたす。この制約をはずし　$\theta_1, \theta_2, \dots$ を独立と見たとき $0 \le \theta_i \le \pi$ から $0 \le \sin\theta_i \le 1$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \sin\theta_1\cdots\sin\theta_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sin\theta_n = t_\infty, \tag{38}$$

は存在し $0 \le t_\infty \le 1$ である。

H の「経度」ϕ; $-\pi \le \phi \le \pi$ を導入し、「緯度」$\theta_1, \theta_2, \dots$ を独立と見て、

$$y = rt_\infty\cos\phi, \quad z = rt_\infty\sin\phi,$$

とおく。H に経度（変数 y, z) を付け加えた空間を

$$\bar{H} = \{(x, y, z) | x \in H\} \cong H \oplus \mathbb{R}^2, \tag{39}$$

$$\hat{H} = \{(x, y, z) | x \in H, \phi = \pm\frac{\pi}{2}\} \cong H \oplus \mathbb{R}, \tag{40}$$

とする。$(x, y, z) \in \bar{H}$ のノルムを $\|(x, y, z)\|^2 = \|x\|^2 + y^2 + z^2$ とし、$\bar{H}$, $\hat{H}$, H の半径 r の「球面」を、それぞれ　$\bar{S}_r^\infty$, $\hat{S}_r^\infty$, S_r^∞ とする。特に $r = 1$ の時（単位球面のとき）S^∞, $\hat{S}^\infty$, $\bar{S}^\infty$ と書く。

$\hat{H} \cong H \oplus \mathbb{R}$ と $H^-(finite)$ のそれぞれに付け加えられた 1 次元空間 $\mathbb{R} = \{\pm t_\infty\}$ と $\mathbb{R}e_\infty$ との間には関係がある ([3])。$t_\infty = \prod_n \sin\theta_n \neq 0$ のとき $\theta_n = \pi/2 + c\mu_n^{d/2} + o(\mu_n^{d/2})$ であれば $x \in W^k$, $k < 0$ となり $c \neq 0$ であれば x は $H^-(finite)$ の部分空間 $\mathbb{R}e_\infty$ の元になる。

$x = \sum_n x_n e_n \in H^-(finite)$ であれば $x = y + te_\infty$, $t \in \mathbb{R}$, $y = \sum_n y_n e_n \in H^-(0)$ である。このとき $c = \mathrm{Res}_{s=d}\zeta(G,s) \neq 0$ とすれば

$$\lim_{k\to+0} \sqrt{k}\|x\|_{-k} = \sqrt{\frac{|c|}{2}}|t|, \tag{41}$$

$$\lim_{k\to+0} k^{-1/2}\|x\|_{-k}t_\infty = \lim_{k\to+0}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{x_n}{\cos\theta_{n,k}} = \sqrt{\frac{2}{|c|}}|t|, \tag{42}$$

が成立し、t と t_∞ には関係がある ([3])。

8 ヒルベルト空間の「球面」の正則化体積

$f \in W^1(\mathbb{R}^n)$ とする。極座標で積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n} x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s}\right| f(x) d^n x,$$

を書きなおせば

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{\mu_1^s+\cdots+\mu_n^s-n} \sin^{\mu_2^s+\cdots\mu_n^s-n+1}\theta_1 \cdots \sin^{\mu_{n-1}^s+\mu_n^s-2}\theta_{n-2} \times \\
& \times F_n(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\phi;s) f(x) \times \\
& \times r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2} dr d\theta_1\cdots d\theta_{n-2} d\phi \\
= & \int_0^\infty r^{\mu_1^s+\cdots\mu_n^s-1} dr \int_{S^{n-1}} f(x)|F_n(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\phi;s)| \times \\
& \times \sin^{\mu_2^s+\cdots+\mu_n^s-1}\theta_1 d\theta_1\cdots\sin^{\mu_{n-1}^s+\mu_n^s-1}\theta_{n-2}d\theta_{n-2}d\phi,
\end{aligned}$$

となる。ただし $F_n(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2},\phi;s)$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(x_1,\ldots,x_n;s) &= \frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n} x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s} \\
&= \mu_1^s x_1^{\mu_1^s-1}\cdots\mu_n^s x_n^{\mu_n^s-1}
\end{aligned}$$

に

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\theta_1,\ldots,x_{n-2} = \cos\theta_{n-2}, \\
x_{n-1} &= \cos\phi,\ x_n = \sin\phi,
\end{aligned}$$

を代入した関数である。

H は最後の座標がないから

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\theta_1,\dots,\theta_{n-2},\phi;s) = F(\theta_1,\theta_2,\dots;s), \tag{43}$$

と置く。この左辺では　$\theta_1,\dots,\theta_{n-2}$ は独立だから右辺でも $\theta_1,\theta_2,\dots$ は独立である。したがって、$F(\theta_1,\theta_2,\dots;s)$ は S^∞ ではなく $\hat{S}^\infty$ の上の関数である。

$f\in W^1(\mathbb{R}^\infty)$ で $\bar{H}$ の上で定義できている　とすれば

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty r^{\mu_1^s+\cdots\mu_n^s-1}dr\int_{S^{n-1}} f(x)|F_n(\theta_1,\dots,\theta_{n-2},\phi;s)|\times\\
&\times\sin^{\mu_2^s+\cdots\mu_n^s-1}\theta_1 d\theta_1\cdots\sin^{\mu_{n-1}^s+\mu_n^s-1}\theta_{n-2}d\theta_{n-2}d\phi\\
=&\int_0^\infty r^{\zeta(G,s)-1}dr\int_{\bar{S^\infty}} f(x)|F(\theta_1,\theta_2,\dots;s)|\times\\
&\times\sin^{\zeta(G,s)-\mu_1^s-1}\theta_1 d\theta_1\sin^{\zeta(G,s)-\mu_1^s-\mu_2^s-1}d\theta_2\dots d\phi,
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s}|f(x)d^n x\right|_{s=0}\\
=&\int_0^r r^{\nu-1}dr\int_{\bar{S}^\infty} f(x)|F(\theta_1,\theta_2,\dots;s)||_{s=0}\times\\
&\times\prod_{k=1}^\infty\sin^{\nu-k-1}\theta_k d\theta_k\cdot d\phi,
\end{aligned}\tag{44}$$

となる。これから

定義　$\bar{S}^\infty$, $\hat{S}^\infty$ の正則化体積要素を

$$:d\Omega := \prod_{n=1}^\infty \sin^{\nu-n-1}\theta_n d\theta_n\cdot d\phi,\quad :d\omega := \prod_{n=1}^\infty \sin^{\nu-n-1}\theta_n d\theta_n, \tag{45}$$

で定義する。

また　この正則化体積要素を使って $\hat{H}$ の正則化体積要素を

$$:d^\infty x := r^{\nu-1}dr:d\omega := r^{\nu-1}dr\prod_{n=1}^\infty \sin^{\nu-n-1}\theta_n d\theta_n, \tag{46}$$

と置く。

注意　(37) から $:d\omega:$, $:d^\infty x:$ は S^∞, H の上では発散する。したがって正則化体積要素は $\hat{S}^\infty$, $\hat{H}$ 等 H を拡大した（determinant bundle を付け加えた）空間でしか意味がない。

$f \in W^1(\mathbb{R}^\infty)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n} x_1^{\mu_1^s}\cdots x_n^{\mu_n^s}|f(x)d^n x|_{s=0}$$
$$= \int_0^\infty r^{\nu-1}dr\int_{\hat{S}^\infty} f(x)|F(\theta_1,\theta_2,\dots;s)|:d\omega:|_{s=0},$$

である。また $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ とすれば

$$\int_{\hat{H}} e^{-\pi\|x\|^2} : d^\infty x := \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)}d^n x = 1,$$

だから

$$\int_{\hat{H}} e^{-\pi\|x\|^2} : d^\infty x :$$
$$= \int_0^\infty r^{\nu-1}e^{-\pi r^2}dr\int_{\hat{S}^\infty} |F(\theta_1,\theta_2,\dots;s)|:d\omega:|_{s=0}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\nu/2)}{\pi^{\nu/2}}\int_{\hat{S}^\infty} |F(\theta_1,\theta_2,\dots;s)|:d\omega:|_{s=0} = 1,$$

となる。よって

$$\int_{\hat{S}^\infty} |F(\theta_1,\theta_2,\dots;s)|:d\omega:|_{s=0} = \frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}, \tag{47}$$

である。よって

定理　$\hat{H}$ の単位球 $\hat{S}^\infty$ の正則化体積は $\hat{H}$ の正則化次元 ν だけで決まり $\dfrac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}$ である。

$\hat{S}_r^\infty$ の正則化体積 $:\mathrm{vol}(\hat{S}_r^\infty):$ は (46) から

$$:\mathrm{vol}(\hat{S}_r^\infty) := \frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}r^{\nu-1}, \tag{48}$$

である。この値も ν だけで決まり、ν が正の整数であれば (48) は $(\nu-1)$-次元球面の体積と一致する。ν が 0 または負の偶数であれば (47) は 0 になる。また $-4m > \nu > -(4m+2)$; m は 0 または正の整数、のときは (48) は負になる。

注意 1　$\nu \leq 0$ のときは $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ により

$$:\mathrm{vol}(\hat{S}_r^\infty) := -\frac{\sin(\frac{|\nu|\pi}{2})}{\pi^{\frac{|\nu|}{2}+1}r^{|\nu|+1}}\Gamma(\frac{|\nu|}{2}+1),$$

と書き直したほうが見やすい。

注意 2　$\hat{S}^\infty$ に「積分」して有限で 0 でない値を与える「体積要素」が存在することはこれらの空間に　非自明な無限次のコホモロジー群を持つド・ラム型コホモロジーが存在する可能性を示している ([8] 参照)。

参考文献

[1] Asada,A.: Remarks on the zeta-regularized determinant of differential operators, *Proc. Conf. Moshé Flato* II, eds. Dito. G., Sternheimer, D. (Kluwer, 2000), 25-36.

[2] Asada,A.: Regularized product of infinitely many independent variables on a Hilbert space and regularization of infinite dimensional indefinite integral via fractional calculus, *Rev. Bull. Calcutta Math. Soc.* **9** (2001), 1-15

[3] 浅田　明.:Hilbert 空間の「極座標」と spectral zeta 関数の特殊値, 幾何学的力学理論とその周辺、数理研講究録 1260 (2002), 105-125.

[4] Asada,A.: Regularized Calculus; An application of zeta regularization to infinite dimensional geometry and analysis, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*,**1** (2004), 107-157.

[5] Asada,A.: Zeta-regularization and calculus on infinite dimensional spaces, to appear in *Proc. Int. Workshop on Global Anal*, Ankara, 2004.

[6] Cardona,A. Ducourtioux,C. Paycha,S.: From tracial anomalies to anomalies in quantum field theory, arXiv;math-ph/0207029.

[7] Connes,A.: Noncommutative Geometry: Year 2000, GAFA 2000, 481-559.

[8] Cuntz,J.: Cyclic Theory, Bivariant K-Theory and Its Bivariant Chern-Character, *Cyclic Homology in Non – Commutative Geometry*, EMS 121(2002) 1-71, Springer.

[9] Erdélyi,A. *et al.*: *Higher Transcendental Functions*,I, New York 1953.

[10] Gilkey,P.: *The Geometry of Spherical Spce Forms*, World Sci., 1989

[11] Hawking,S.: Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime, *Commun. Math. Phys.* **55**(1977), 133-148.

[12] Léandre,R.: Theory of distributions in the space of Connes-Hida and Feynman path integral on a manifold, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top.* **6**(2003), 505-517.

[13] Okikiolu,K.: The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula, The multiplictive anomaly for determinants of elliptic operators, *Duke Math. J.* **79**(1995), 687-722, 723-750.

[14] Paycha,S.: Renormalized traces as a looking glass into infinite dimensional geometry, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top.* 4(2001), 221-266.

[15] Scott,S.G. Wojciechowski,K.: The ζ-determinant and Quillen determinant for a Dirac operator on a manifold with boundary, GAFA *Geom. Funct. Anal.* 4(2001),1202-1236.