Relations between iterated log-sine integrals, multiple zeta values and multiple polylogarithms

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　梅澤　瞭太
Ryota Umezawa
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

概要

本稿では反復 log-sine 積分と多重ゼータ値, 多重ポリログの間の関係式を紹介する. 特に, 反復 log-sine 積分を多重ポリログと多重ゼータ値を使って書く定理を紹介し, その証明の概略を述べる. この定理により反復 log-sine 積分の数値計算が可能となる. そこで, 数値実験の結果をもとに様々な空間の基底に関する予想を与える. 本稿は [7] と [8] の要約である.

1　導入

反復 log-sine 積分とは [7] で導入した次の積分である.

定義 1 (反復 log-sine 積分)**.** $\sigma \in \mathbb{R}$ と $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対し,

$$\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma) = (-1)^n \int_0^{\sigma} \int_0^{\theta_n} \cdots \int_0^{\theta_2} \prod_{u=1}^{n} \theta_u^{l_u} \left(\log \left| 2 \sin \frac{\theta_u}{2} \right| \right)^{k_u - 1 - l_u} d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

$n = 1$ のとき, つまり $\mathrm{Ls}_k^{(l)}(\sigma)$ は (generalized) log-sine 積分と呼ばれている. 反復 log-sine 積分はすべての $u \in \{1, \ldots, n\}$ に対し, $k_u - 1 - l_u \geq 0$ を満たすとき任意の $\sigma \in \mathbb{R}$ に対し絶対収束する.

[7] と [8] では反復 log-sine 積分と多重ゼータ値, 多重ポリログとの間の関係についての議論を行った. ここで, 多重ゼータ値とは $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $k_n > 1$ に対し

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{0 < m_1 < \cdots < m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

で定義される値であり, 多重ポリログは $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に対し

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \sum_{0 < m_1 < \cdots < m_n} \frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

で定義される関数である.

本稿は [7] と [8] で得られた反復 log-sine 積分と多重ゼータ値, 多重ポリログの間の関係についてをまとめることを目的とする. 第 2 章ではまず [7] で得られた多重ゼータ値を反復 log-sine 積分で書く方法を紹介する. このことから, 反復 log-sine 積分の間の関係式は多重ゼータ値の間の関係式を得ることに応用できるため, 反復 log-sine 積分の間の関係式をなるべく多く見つけることが課題となる. しかし, 反復 log-sine 積分は反復積分で定義されているため数値計算が困難である. そこで, 第 3 章では [8] で得られた反復 log-sine 積分を多重ゼータ値と多重ポリログ使って書く定理を紹介し, その証明の概略を述べる. この定理によって反復 log-sine 積分の数値計算が可能となる. 第 4 章ではこの数値実験により予想される多重ゼータ値や多重ポリログ, 反復 log-sine 積分が張る空間の基底に関しての予想を述べる.

2　反復 log-sine 積分と多重ゼータ値, 多重ポリログとの関係につて

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ に対し $|\mathbf{k}| := k_1 + \cdots + k_n$ を $\mathbf{k}$ の重さと呼び, $\mathrm{d}(\mathbf{k}) := n$ を $\mathbf{k}$ の深さと呼ぶ. また, $\mathbf{k}_- = (k_1, \ldots, k_{n-1})$ と定義する. $\emptyset$ を重さ 0, 深さ 0 のインデックスとし, $\zeta(\emptyset) = \mathrm{Li}_\emptyset(z) = \mathrm{Ls}_\emptyset^\emptyset(\sigma) = 1$ とする. $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $k_n > 1$ を

$$\mathbf{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \{1\}^{a_2-1}, b_2+1, \ldots, \{1\}^{a_h-1}, b_h+1) \qquad (a_i, b_i \in \mathbb{N})$$

の形で書いたとき, 双対インデックス $\mathbf{k}^*$ を

$$\mathbf{k}^* = (\{1\}^{b_h-1}, a_h+1, \ldots, \{1\}^{b_2-1}, a_2+1, \{1\}^{b_1-1}, a_1+1)$$

で定義する. また, $\mathbf{k}^{(0)} = \mathbf{k}$,

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{cases} (k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n - 1) & \text{if } k_n > 1, \\ (k_1, \ldots, k_{n-1}) & \text{if } k_n = 1, \\ \phi & \text{if } n = 1, k_n = 1 \end{cases}$$

と定義し, $n \geq 2$ に対しては帰納的に $\mathbf{k}^{(n)} = (\mathbf{k}^{(n-1)})^{(1)}$ と定義する. このとき, 次の多重ゼータ値と多重ポリログの関係が知られている.

定理 1 (Borwein–Broadhurst–Kamnitzer [1, theorem 4.4])**.** $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $k_n > 1$ に対し,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{m=0}^{|\mathbf{k}|} \mathrm{Li}_{\mathbf{k}^{(m)}}(e^{\frac{\pi}{3}i}) \overline{\mathrm{Li}_{(\mathbf{k}^*)^{(|\mathbf{k}|-m)}}(e^{\frac{\pi}{3}i})} \tag{1}$$

が成り立つ.

この定理により多重ゼータ値は多重ポリログの $e^{\pi i/3}$ での値で書かれることがわかるが, この多重ポリログの $e^{\pi i/3}$ での値は次の定理によって反復 log-sine 積分の $\pi/3$ での値で書かれる.

定理 2 (U. [7])**.** $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に対し

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(e^{\frac{\pi}{3}i}) = i^n \int_{0<\theta_1<\cdots<\theta_n<\theta_{n+1}=\frac{\pi}{3}} \prod_{u=1}^{n} \frac{\left(A(\theta_{u+1}) - A(\theta_u) - \frac{i\theta_{u+1}}{2} + \frac{i\theta_u}{2}\right)^{k_u-1}}{(k_u-1)!} d\theta_u \tag{2}$$

が成り立つ. ただし, $A(\theta) = \log|2\sin(\theta/2)|$ である.

したがって, (1) に (2) を代入することで多重ゼータ値が反復 log-sine 積分を使って書かれることがわかるが, これは次に説明する反復 log-sine 積分に関する二つの性質によって, より精密化することができる.

一つ目の命題はシャッフル積とよばれ, 定義の積分範囲を分割することにより証明される.

命題 1 (U. [7, Proposition 1])**.** $\mathrm{Ls}_{k_1,\ldots,k_n}^{(l_1,\ldots,l_n)}(\sigma)$ と $\mathrm{Ls}_{k_{n+1},\ldots,k_{n+m}}^{(l_{n+1},\ldots,l_{n+m})}(\sigma)$ が絶対収束するとき

$$\mathrm{Ls}_{k_1,\ldots,k_n}^{(l_1,\ldots,l_n)}(\sigma) \cdot \mathrm{Ls}_{k_{n+1},\ldots,k_{n+m}}^{(l_{n+1},\ldots,l_{n+m})}(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n,m}} \mathrm{Ls}_{k_{\tau(1)},\ldots,k_{\tau(n+m)}}^{(l_{\tau(1)},\ldots,l_{\tau(n+m)})}(\sigma)$$

が成り立つ. ここで $\mathfrak{S}_{n,m}$ は

$$\mathfrak{S}_{n,m} = \{\tau \in \mathfrak{S}_{n+m} \mid \tau^{-1}(1) < \cdots < \tau^{-1}(n), \quad \tau^{-1}(n+1) < \cdots < \tau^{-1}(n+m)\}$$

で定義される. ただし $\mathfrak{S}_{n+m}$ は $n+m$ 次の対称群である.

この命題により反復 log-sine 積分の σ での値の積は反復 log-sine 積分の σ での値の和で表されることがわかる.

二つ目の命題は $k_j - 1 - l_j = 0$ となる j が存在するとき θ_j に関して積分することで得られる.

命題 2 (U. [7, Proposition 2])**.** インデックスの組 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ と $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ に対し,

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{j+} &= (k_1, \dots, k_{j-1}, k_j + k_{j+1}, k_{j+2}, \dots, k_n) && (j \in \{1, \dots, n-1\}),\\
\mathbf{k}_{j-} &= (k_1, \dots, k_{j-2}, k_{j-1} + k_j, k_{j+1}, \dots, k_n) && (j \in \{2, \dots, n\}),\\
\mathbf{l}_{j+} &= (l_1, \dots, l_{j-1}, k_j + l_{j+1}, l_{j+2}, \dots, l_n) && (j \in \{1, \dots, n-1\}),\\
\mathbf{l}_{j-} &= (l_1, \dots, l_{j-2}, l_{j-1} + k_j, l_{j+1}, \dots, l_n) && (j \in \{2, \dots, n\})
\end{aligned}$$

と定義する. $j \in \{1, \dots, n\}$ に対し $\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma)$ が絶対収束し, $k_j - 1 - l_j = 0$ を満たすとき

$$\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma) = \begin{cases}
-\frac{1}{k_1}\sigma^{k_1} & \text{if } n = 1, j = 1,\\
-\frac{1}{k_1}\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{1+}}^{\mathbf{l}_{1+}}(\sigma) & \text{if } n \geq 2, j = 1,\\
\frac{1}{k_j}\left(\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{j-}}^{\mathbf{l}_{j-}}(\sigma) - \mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{j+}}^{\mathbf{l}_{j+}}(\sigma)\right) & \text{if } n \geq 2, 1 < j < n,\\
\frac{1}{k_n}\left(\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{n-}}^{\mathbf{l}_{n-}}(\sigma) - \sigma^{k_n}\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}_{-}}^{\mathbf{l}_{-}}(\sigma)\right) & \text{if } n \geq 2, j = n
\end{cases}$$

が成り立つ.

この命題を繰り返し用いることで, 任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対し $k_j - 1 - l_j \geq 0$ を満たす反復 log-sine 積分 $\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma)$ は

$$\left\{ \sigma^m \,\mathrm{Ls}_{k'_1, \dots, k'_{n'}}^{(l'_1, \dots, l'_{n'})}(\sigma) \;\middle|\; \begin{array}{c} m \geq 0, n' \geq 0 \\ k'_i \geq 2,\ l'_i \geq 0,\ k'_i - 1 - l'_i > 0\ (i \in \{1, \dots, n'\}) \\ m + k'_1 + \cdots + k'_{n'} = |\mathbf{k}| \end{array} \right\}$$

の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書けることがわかる.

以上のことから, (1) に (2) を代入し, 命題 1 と命題 2 を使うことで重さ k の任意の多重ゼータ値は

$$M_k = \left\{ \pi^m \,\mathrm{Ls}_{k_1, \dots, k_n}^{(l_1, \dots, l_n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \;\middle|\; \begin{array}{c} m \geq 0, n \geq 0 \\ k_i \geq 2,\ l_i \geq 0,\ k_i - 1 - l_i > 0\ (i \in \{1, \dots, n\}) \\ m + k_1 + \cdots + k_n = k \end{array} \right\}$$

の $\mathbb{Q}(i)$ 線形結合で書かれることがわかる. この表示は命題 1 と命題 2 の適応の順序によらないことに注意しておく. また, 多重ゼータ値や反復 log-sine 積分は実数であるので, 多重ゼータ値をこの方法で M_k の $\mathbb{Q}(i)$ 線形結合で書いた後, その実部を取ることによって次のことがわかる.

定理 3. 重さ k の任意の多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ は M_k の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれる.

一方で虚部を取ることによって, M_k の間の $\mathbb{Q}$ 線形関係式が得られる. これにより得られた反復 log-sine 積分の間の関係式を定理 3 の表示に適応することで多重ゼータ値の間の関係式を得ることができる. この方法によりどのような多重ゼータ値の間の関係式が得られるかについては [7] を参照していただきたい.

多重ゼータ値と反復 log-sine 積分の間にはこのような関係があるため, 反復 log-sine 積分の間の関係式を見つけることが課題となる. そのため, 反復 log-sine 積分の数値計算を行いたいが, 定義を用いて数値計算することは困難であため反復 log-sine 積分の別の表示が必要となる. そこで, 次の章では反復 log-sine 積分を多重ゼータ値と多重ポリログを使って表す定理を紹介する.

3　反復 log-sine 積分の評価について

3.1　定理の主張

ここでは反復 log-sine 積分を多重ゼータ値と多重ポリログを使って書く定理を紹介する．

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ と $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ に対し，$\mathbf{k} + \mathbf{l} = (k_1 + l_1, \ldots, k_n + l_n)$，$\mathbf{k} - \mathbf{l} = (k_1 - l_1, \ldots, k_n - l_n)$ と定義し，$\mathbf{1}_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$ とする．このとき次が成り立つ．

定理 4 (U. [8])**.** $\sigma \in [0, 2\pi]$，$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$，$\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ とする．すべての $u \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $k_u - 1 - l_u \geq 0$ を満たすとき

$$\mathrm{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma) = i^{|\mathbf{l}|+n}(-1)^{|\mathbf{k}|+n} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}=\mathbf{k}-\mathbf{1}_n-\mathbf{l}} \frac{(-i\pi)^{|\mathbf{p}|}}{2^{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|}} \binom{\mathbf{k}-\mathbf{1}_n-\mathbf{l}}{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} F_{\mathbf{q}+\mathbf{l}}^{\mathbf{r}}(\sigma) \tag{3}$$

が成り立つ．ここで，和は $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}$ を満たすすべての $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，$\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ をわたる．また

$$\binom{\mathbf{k}-\mathbf{1}_n-\mathbf{l}}{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} = \prod_{u=1}^{n} \frac{(k_u - 1 - l_u)!}{p_u! q_u! r_u!}$$

である．

関数 F の定義は後で行うが，F は σ の冪と多重ゼータ値と多重ポリログの $e^{i\sigma}$ での値の積の $\mathbb{Q}(i)$ 線形結合で書かれる関数である．多重ゼータ値や多重ポリログは数値計算が可能であるため (3) により反復 log-sine 積分の数値計算が可能となる．また，Kalmykov と Sheplyakov は [5] において (generalized) log-sine 積分に対してこれとは別の数値計算のアルゴリズムを与えていることを補足しておく．

多重 Clausen 関数 $\mathrm{Cl}_{\mathbf{k}}(\sigma)$ と多重 Glaisher 関数 $\mathrm{Gl}_{\mathbf{k}}(\sigma)$ は次のように多重ポリログの $e^{i\sigma}$ での値の実部と虚部で定義される．

$$\mathrm{Cl}_{\mathbf{k}}(\sigma) = \begin{cases} \Im(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(e^{i\sigma})) & \text{if } |\mathbf{k}| : \text{even}, \\ \Re(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(e^{i\sigma})) & \text{if } |\mathbf{k}| : \text{odd}, \end{cases}$$

$$\mathrm{Gl}_{\mathbf{k}}(\sigma) = \begin{cases} \Re(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(e^{i\sigma})) & \text{if } |\mathbf{k}| : \text{even}, \\ \Im(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(e^{i\sigma})) & \text{if } |\mathbf{k}| : \text{odd}. \end{cases}$$

そして，$\mathrm{Cl}_{\mathbf{k}}(\pi/3)$ を多重 Clausen 値と呼び，$\mathrm{Gl}_{\mathbf{k}}(\pi/3)$ を多重 Glaisher 値と呼ぶ．したがって，(3) の実部を比べることで，(3) は反復 log-sine 積分を多重ゼータ値や多重 Clausen 関数，多重 Glaisher 関数を使って書いた式であるとみなすことがでる．また，(3) の虚部は多重ゼータ値や多重 Clausen 関数，多重 Glaisher 関数の関係式であるとみなすことができる．

次の 3.2 節で関数 F の定義を行った後，3.3 節で定理 4 証明の概要を述べる．

3.2　関数 F の定義

ここでは定理 4 に登場する関数 F の定義を述べるが，そのためにいくつかの記号を導入する．$\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{j} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ とする．このとき，有理数 $B_{\mathbf{q}}$ を漸化式

$$B_{\mathbf{q}} = \frac{1}{|\mathbf{q}| + n} B_{\mathbf{q}_-}, \quad B_{\emptyset} = 1$$

によって定義し, 有理数 $C_{\mathbf{q}}^{\mathbf{j}}$ を漸化式

$$C_{\mathbf{q}}^{\mathbf{j}} = (-1)^{j_n} \frac{(|\mathbf{q}| - |\mathbf{j}_-|)!}{(|\mathbf{q}| - |\mathbf{j}|)!} C_{\mathbf{q}_-}^{\mathbf{j}_-}, \quad C_{\emptyset}^{\emptyset} = 1$$

によって定義する. また 2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$ とし, $\mathfrak{H}^0 = \mathbb{Q} + e_1 \mathfrak{H} e_0$, $\mathfrak{H}^1 = \mathbb{Q} + e_1 \mathfrak{H}$ とする. そして, $\mathfrak{H}$ の元 $w_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}}$ を漸化式

$$w_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}} = (w_{\mathbf{j}_-}^{\mathbf{r}_-} ⧢ e_1^{⧢ r_n}) e_0^{1+j_n}, \quad w_{\emptyset}^{\emptyset} = 1$$

によって定める. ここで, $r_1 \geq 1$ のとき $w_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}} \in \mathfrak{H}^0$ となることに注意しておく. そして $\mathbb{Q}$ 線形写像 $L(\cdot\,; z)\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathbb{C}$ を

$$L(e_1 e_0^{k_1-1} \cdots e_1 e_0^{k_n-1}; z) = \mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(z)$$

によって定める. さらに, $\mathbf{j}$ と $\mathbf{q}$ が

$$\begin{gathered} j_1 \leq q_1 \\ j_1 + j_2 \leq q_1 + q_2 \\ \vdots \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_n \leq q_1 + q_2 + \cdots + q_n \end{gathered}$$

を満たすとき $\mathbf{j} \preceq \mathbf{q}$ と書く. また, $\emptyset \preceq \emptyset$ とする.

インデックスの組 $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$, に対し,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = (\mathbf{r}', \mathbf{r}'') &= (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n'}, r_1'', \ldots, r_{n''}'') \quad \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n'+n''}, \ (r_1'' \neq 0), \\ \mathbf{q} = (\mathbf{q}', \mathbf{q}'') &= (q_1', \ldots, q_{n'}', q_1'', \ldots, q_{n''}'') \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n'+n''} \end{aligned}$$

とおく. このとき, $q_{n''}'' = q_n$, $r_{n''}'' = r_n$, $n = n' + n''$ であることに注意する. さらに, $\overline{\mathbf{q}} = (|\mathbf{q}'| + n' + q_1'', q_2'', \ldots, q_{n''}'')$ とおく, ただし, $\mathbf{q}'' = \emptyset$ のとき $\overline{\mathbf{q}} = \emptyset$ とする. 例えば $\mathbf{q} = (1,1,1,1)$, $\mathbf{r} = (0,0,1,2)$ のとき $\mathbf{q}' = (1,1)$, $\mathbf{q}'' = (1,1)$, $\mathbf{r}' = (0,0)$, $\mathbf{r}'' = (1,2)$ であり, $\overline{\mathbf{q}} = (5,1)$ である.

このとき関数 F の定義に必要な関数 f は $\sigma \in [0, 2\pi]$, $\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$, $\mathbf{r} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対し

$$f_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}(\sigma) = B_{\mathbf{q}'} \sum_{\mathbf{j} \preceq \overline{\mathbf{q}}} C_{\overline{\mathbf{q}}}^{\mathbf{j}} (i\sigma)^{|\mathbf{q}|+n'-|\mathbf{j}|} L(w_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}''}; e^{i\sigma})$$

で定義される. ここで, 和は $\mathbf{j} \preceq \overline{\mathbf{q}}$ を満たすすべての $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_{n''}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n''}$ を渡る. そして関数 F は関数 f を使って次のように定義される.

定義 2. $\sigma \in [0, 2\pi]$, $\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$, $\mathbf{r} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対し

$$F_{\mathbf{q}}^{\mathbf{r}}(\sigma) = \sum_{\substack{(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_h)=\mathbf{q} \\ (\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_h)=\mathbf{r} \\ \mathrm{d}(\mathbf{q}_j)=\mathrm{d}(\mathbf{r}_j)\geq 1 \\ (1\leq j\leq h)}} (-1)^{h-1} \left(\prod_{j=1}^{h-1} f_{\mathbf{q}_j}^{\mathbf{r}_j}(0) \right) \left(f_{\mathbf{q}_h}^{\mathbf{r}_h}(\sigma) - f_{\mathbf{q}_h}^{\mathbf{r}_h}(0) \right).$$

この和は $\mathbf{q}$ と $\mathbf{r}$ の分割すべてを渡る和である. 例えば

$$\begin{aligned} F_{(q_1,q_2,q_3)}^{(r_1,r_2,r_3)}(\sigma) &= f_{(q_1)}^{(r_1)}(0) f_{(q_2)}^{(r_2)}(0) \left(f_{(q_3)}^{(r_3)}(\sigma) - f_{(q_3)}^{(r_3)}(0) \right) \\ &\quad - f_{(q_1,q_2)}^{(r_1,r_2)}(0) \left(f_{(q_3)}^{(r_3)}(\sigma) - f_{(q_3)}^{(r_3)}(0) \right) - f_{(q_1)}^{(r_1)}(0) \left(f_{(q_2,q_3)}^{(r_2,r_3)}(\sigma) - f_{(q_2,q_3)}^{(r_2,r_3)}(0) \right) \\ &\quad + \left(f_{(q_1,q_2,q_3)}^{(r_1,r_2,r_3)}(\sigma) - f_{(q_1,q_2,q_3)}^{(r_1,r_2,r_3)}(0) \right). \end{aligned}$$

また, $F^{\emptyset}_{\emptyset}(\sigma)=1$ であるとする. この定義から関数 F は σ の冪と多重ゼータ値と多重ポリログの $e^{i\sigma}$ での値の積の $\mathbb{Q}(i)$ 線形結合で書かれる関数であることがわかる.

3.3　証明の概要

ここでは定理 4 の証明の概要を述べる. 証明のために次の式を使う.

$$\mathrm{Li}_1(e^{i\theta})=-\log\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|-i\frac{\theta-\pi}{2}\qquad(0<\theta<2\pi).$$

この公式は $2\sin(\theta/2)=(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})/i$ と $\mathrm{Li}_1(e^{i\theta})=-\log(1-e^{i\theta})$ により容易に証明される. この式を反復 log-sine 積分の定義に代入すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ls}^{\mathbf{l}}_{\mathbf{k}}(\sigma)&=(-1)^{|\mathbf{k}|-|\mathbf{l}|}\int_{0<\theta_1<\cdots<\theta_n<\sigma}\prod_{u=1}^{n}\theta_u^{l_u}\left(\mathrm{Li}_1(e^{i\theta_u})+\frac{i\theta_u}{2}-\frac{i\pi}{2}\right)^{k_u-1-l_u}d\theta_u\\
&=i^{|\mathbf{l}|+n}(-1)^{|\mathbf{k}|+n}\int_{0<\theta_1<\cdots<\theta_n<\sigma}\prod_{u=1}^{n}i\,(i\theta_u)^{l_u}\sum_{p_u+q_u+r_u=k_u-1-l_u}\frac{(k_u-1-l_u)!}{p_u!q_u!r_u!}\\
&\quad\times\left(-\frac{i\pi}{2}\right)^{p_u}\left(\frac{i\theta_u}{2}\right)^{q_u}\left(\mathrm{Li}_1(e^{i\theta_u})\right)^{r_u}d\theta_u\\
&=i^{|\mathbf{l}|+n}(-1)^{|\mathbf{k}|+n}\sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}=\mathbf{k}-\mathbf{1}_n-\mathbf{l}}\frac{(-i\pi)^{|\mathbf{p}|}}{2^{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|}}\left(\prod_{u=1}^{n}\frac{(k_u-1-l_u)!}{p_u!q_u!r_u!}\right)\\
&\quad\times\int_{0<\theta_1<\cdots<\theta_n<\sigma}\prod_{u=1}^{n}i\,(i\theta_u)^{q_u+l_u}\left(\mathrm{Li}_1(e^{i\theta_u})\right)^{r_u}d\theta_u
\end{aligned}$$

となる. 実はこの時点で, 部分積分と多重ポリログの基本的な性質により, 最後の積分は多重ゼータ値と多重ポリログを使って書けることがわかる. しかし, 計算機で計算することがモチベーションであったため, より明示的な表示を得る必要がある. そこで, $\sigma\in[0,2\pi]$ と $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^n$, $\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_n)\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^n$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathrm{ILi}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)&=\int_0^{\sigma}\int_0^{\theta_n}\cdots\int_0^{\theta_2}\prod_{u=1}^{n}i(i\theta_u)^{q_u}\left(\mathrm{Li}_1(e^{i\theta_u})\right)^{r_u}d\theta_1\cdots d\theta_n\\
&=\int_0^{\sigma}i(i\theta_n)^{q_n}\left(\mathrm{Li}_1(e^{i\theta_n})\right)^{r_n}\mathrm{ILi}^{\mathbf{r}_-}_{\mathbf{q}_-}(\theta_n)\,d\theta_n,
\end{aligned}$$

ただし $\mathrm{ILi}^{\emptyset}_{\emptyset}(\sigma)=1$ と定義し, $\mathrm{ILi}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)$ の計算を行う. そして, $\mathrm{ILi}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)=F^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)$ となることを証明することで定理 4 を証明する.

関数 f と関数 F は定義を実際に微分することで次の式を満たすことがわかる.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}f^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)&=i(i\sigma)^{q_n}\left(\mathrm{Li}_1(e^{i\sigma})\right)^{r_n}f^{\mathbf{r}_-}_{\mathbf{q}_-}(\sigma),\\
\frac{d}{d\sigma}F^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)&=i(i\sigma)^{q_n}\left(\mathrm{Li}_1(e^{i\sigma})\right)^{r_n}F^{\mathbf{r}_-}_{\mathbf{q}_-}(\sigma).
\end{aligned}$$

そして,

$$\mathrm{ILi}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)=\int_0^{\sigma}i(i\theta_n)^{q_n}\left(\mathrm{Li}_1(e^{i\theta_n})\right)^{r_n}\mathrm{ILi}^{\mathbf{r}_-}_{\mathbf{q}_-}(\theta_n)\,d\theta_n$$

であることから, 深さに関しての帰納法により $\mathrm{ILi}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)=F^{\mathbf{r}}_{\mathbf{q}}(\sigma)$ を示すことができる. このようにして定理 4 が証明される.

4　予想について

定理 4 により反復 log-sine 積分が多重ゼータ値や多重ポリログを用いて表されることがわかる．これにより反復 log-sine 積分の数値計算が可能となる．ここでは数値実験をもとにしてたてられた多重ゼータ値, 多重 Clausen 値, 多重 Glaisher 値, 反復 log-sine 積分に関しての予想を述べる．なお, 多重ゼータ値や多重ポリログの数値計算には九州大学の広瀬稔氏からいただいたプログラム用いており, 線形関係式の有無は PARI/GP の lindep を使って検証している．

これからいくつかの予想を述べるが, そこで重要な役割を果たすのは反復 log-sine 積分の一種である次の積分である．

定義 3 (Shifted log-sine 積分)**.** $\sigma \in \mathbb{R}$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 2})^n$ に対し,

$$\mathrm{SLs}(\mathbf{k}; \sigma) = \int_0^{\sigma} \int_0^{\theta_n} \cdots \int_0^{\theta_2} \prod_{u=1}^{n} (\theta_u - \sigma)^{k_u - 2} \log \left| 2 \sin \frac{\theta_u}{2} \right| d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

Shifted log-sine 積分は $\prod_{u=1}^{n} (\theta_u - \sigma)^{k_u - 2}$ の部分を展開することで反復 log-sine 積分を使って書かれることがわかる．また, Shifted log-sine 積分はシャッフル積

$$\begin{aligned} &\mathrm{SLs}(k_1, \ldots, k_n; \sigma) \cdot \mathrm{SLs}(k_{n+1}, \ldots, k_{n+m}; \sigma) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n,m}} \mathrm{SLs}(k_{\tau(1)}, \ldots, k_{\tau(n+m)}; \sigma) \end{aligned}$$

を満たすことに注意する．Shifted log-sine 積分の特に $\pi/3$ での値が重要となるので $\pi/3$ を省略し, $\mathrm{SLs}(\mathbf{k}) := \mathrm{SLs}(\mathbf{k}; \pi/3)$ とする．最初の予想は Shifted log-sine 積分に関する次の予想である．

予想 1. 実数の族 $\{\pi^m \,\mathrm{SLs}(k_1, \ldots, k_n) \mid m \geq 0, n \geq 0, k_i \geq 2\}$ は $\mathbb{Q}$ 線形独立である．

この予想に関して, $m + k_1 + \cdots + k_n \leq 8$ を満たす値の間には $\mathbb{Q}$ 線形関係式がないことが数値実験により確かめることができている．

次に多重ゼータ値に関する予想についてを述べる．$\mathcal{Z}_k$ を重さ k のすべての多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とし,

$$S'_{k,d} = \left\{ \pi^{2m} \,\mathrm{SLs}(k_1, \ldots, k_n) \;\middle|\; \begin{array}{c} 2m + k_1 + \cdots + k_n = k, \\ m \geq 0, d \geq n \geq 0, \\ k_i \geq 3 : \mathrm{odd}. \end{array} \right\}$$

とする．このとき次が予想される．

予想 2. 重さ k 深さ d の多重ゼータ値は $S'_{k,d}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれる．

予想 3. $S'_{k,k}$ は $\mathcal{Z}_k$ の基底である．

d_k を $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\quad (k \geq 3)$ で定義される数列とすると, Zagier [9] により $\mathcal{Z}_k$ の次元は d_k であると予想されている．$S'_{k,k}$ の元の個数は d_k であるので, 予想 3 が正しいとすると Zagier 予想も正しいことがわかる．また, Hoffman [4] は

$$H_k = \{\zeta(k_1, \ldots, k_n) \mid k_1 + \cdots + k_n = k,\ k_i \in \{2, 3\}\}$$

が $\mathcal{Z}_k$ の基底になると予想した．当然 H_k の元の個数は d_k に等しい．また, この予想に関して Brown [2] は H_k が $\mathcal{Z}_k$ を生成することを証明している．予想 3 はこの Hoffman の予想の類似とみなすことができるが, $S'_{k,k}$ と

H_k は異なる性質を持っている．H_{k_1} の元と H_{k_2} の元の積が $H_{k_1+k_2}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれることは Brown [2] の結果から従うはずであるが, それを多重ゼータ値のシャッフル積や調和積からは確かめることができない．例えば二つの $\zeta(2) \in H_2$ の積は

$$\zeta(2)\cdot\zeta(2) = \begin{cases} 2\zeta(2,2)+\zeta(4) & (\text{調和積}), \\ 2\zeta(2,2)+4\zeta(1,3) & (\text{シャッフル積}) \end{cases}$$

であるが $\zeta(4) \notin H_4$, $\zeta(1,3) \notin H_4$ である．一方で, S'_{k_1,d_1} の元と S'_{k_2,d_2} の元の積はシャッフル積により $S'_{k_1+k_2,d_1+d_2}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれることが確かめられる．例えば $\mathrm{SLs}(3) \in S'_{3,1}$ と $\mathrm{SLs}(5) \in S'_{5,1}$ の積は

$$\mathrm{SLs}(3)\cdot\mathrm{SLs}(5) = \mathrm{SLs}(3,5)+\mathrm{SLs}(5,3)$$

となり, $\mathrm{SLs}(3,5), \mathrm{SLs}(5,3) \in S'_{8,2}$ である．この意味で予想 3 が正しければ $S'_{k,k}$ は (シャッフル積で) 閉じた基底であるといえる．

予想 2 と予想 3 は重さ 13 まで数値実験により確かめることができている．また, リーマンゼータ値 $\zeta(k)$ が $S'_{k,1}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれることはオイラーの公式

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

と

$$(-1)^k\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta = -\frac{1}{2}(2k+1)!(1-2^{-2k-2})(1-3^{-2k-2})\zeta(2k+3) \\ +(2k+1)!\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2m}\frac{\zeta(2k+3-2m)}{(2m)!}, \qquad (k\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

(Choi–Cho–Srivistava [3, (4.14)] や Lewin [6, (7.160)]) を参照) により確かめることができる．また, リーマンゼータ値 $\zeta(k)$ が $S'_{k,1}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれることと $S'_{k,d}$ が積で閉じることから他にもいくつかの多重ゼータ値が $S'_{k,d}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれることを示すことができる．

次に多重 Clausen 値, 多重 Glaisher 値に関しての予想を述べる．$\mathcal{C}_k$ を重さ k の多重 Clausen 値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とし, また $\mathcal{G}_k$ を重さ k の多重 Glaisher 値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とする．また,

$$S^o_{k,d} = \left\{\pi^m\,\mathrm{SLs}(k_1,\ldots,k_n)\;\middle|\; \begin{array}{c} m+k_1+\cdots+k_n=k, \\ d\geq n\geq 0,\ n:\mathrm{odd}, \\ m\geq 0, k_i\geq 2. \end{array}\right\},$$

$$S^e_{k,d} = \left\{\pi^m\,\mathrm{SLs}(k_1,\ldots,k_n)\;\middle|\; \begin{array}{c} m+k_1+\cdots+k_n=k, \\ d\geq n\geq 0,\ n:\mathrm{even}, \\ m\geq 0, k_i\geq 2. \end{array}\right\}$$

と定義する．このとき, 次が予想される．

予想 4.

(i) 重さ k 深さ d の多重 Clausen 値は $S^o_{k,d}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれる．
(ii) 重さ k 深さ d の多重 Glaisher 値は $S^e_{k,d}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれる．

予想 5.

(i) $S^o_{k,k}$ は $\mathcal{C}_k$ の基底である．
(ii) $S^e_{k,k}$ は $\mathcal{G}_k$ の基底である．

つまり，予想 5 と予想 1 が正しければ $S^o_{k,k} \cup S^e_{k,k}$ が $\mathcal{C}_k + \mathcal{G}_k$ の基底となる．

$\mathcal{C}_k$ と $\mathcal{G}_k$ の次元はそれぞれ $I(k)$ と $R(k)$ であると Borwein-Broadhurst-Kamnitzer [1] で予想されている．ここで $I(k)$ と $R(k)$ は

$$\begin{gathered} I(0) = I(1) = 0, \quad R(0) = R(1) = 1, \\ I(k) = I(k-1) + R(k-2) \quad (k \geq 2), \\ R(k) = R(k-1) + I(k-2) \quad (k \geq 2) \end{gathered}$$

で定義される数列である．ここで，$W(k) := I(k) + R(k)$ は $k+1$ 番目のフィボナッチ数 F_{k+1} に等しいことに注意しておく．$S^o_{k,k}$ と $S^e_{k,k}$ の元の個数はそれぞれ $I(k)$ と $R(k)$ に等しいことがわかるので予想 5 が正しければ Borwein-Broadhurst-Kamnitzer 予想も正しいことがわかる．

予想 4 と予想 5 は重さ 9 まで数値実験により確かめることができている．また，深さ 1 の多重 Clausen 値と多重 Glaisher 値はそれぞれ $S^o_{k,1}$ と $S^e_{k,1}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれることを示すことができる．(詳細は [8] を参照)

最後に反復 log-sine 積分に関する予想を述べる．$\mathcal{L}^o_k$ を重さ，すなわち $|\mathbf{k}|$ が k で $|\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が奇数の反復 log-sine 積分の $\pi/3$ での値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とし，$\mathcal{L}^e_k$ を重さ k で $|\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が偶数の反復 log-sine 積分の $\pi/3$ での値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とする．ただし，$\mathrm{Ls}^{\emptyset}_{\emptyset}(\pi/3)$ は $|\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が偶数であるとみなす．また，$|\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ は $A(\theta) := \log|2\sin(\theta/2)|$ の冪の総和と等しいことに注意する．また，$\mathcal{L}_k := \mathcal{L}^o_k + \mathcal{L}^e_k$ とする．すると次のことが予想される．

予想 6.

(i) 重さが k で $d := |\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が奇数の反復 log-sine 積分の $\pi/3$ での値は $S^o_{k,d}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれる．
(ii) 重さが k で $d := |\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が偶数の反復 log-sine 積分の $\pi/3$ での値は $S^e_{k,d}$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書かれる．

予想 7.

(i) $S^o_{k,k}$ は $\mathcal{L}^o_k$ の基底である．
(ii) $S^e_{k,k}$ は $\mathcal{L}^e_k$ の基底である．

予想 7 が正しければ $\dim \mathcal{L}^o_k = I(k)$, $\dim \mathcal{L}^e_k = R(k)$ が成り立つ．予想 7 に加えて予想 1 も正しければ $\mathcal{L}_k = W(k)$ が成り立つ．

$\mathcal{L}^o_k$ と $\mathcal{L}^e_k$ の次元の自明な評価については次のことが分かっている．$\mathcal{L}^o_k$ の生成元，つまり重さが k で $|\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が奇数の反復 log-sine 積分の個数は $(F_{2k} - F_k)/2$ 個であり，$\mathcal{L}^e_k$ の生成元，つまり重さが k で $|\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が偶数の反復 log-sine 積分の個数は $k = 0$ のとき 1 個，$k \geq 1$ のとき $(F_{2k} + F_k)/2$ 個である．つまり $k \geq 1$ のとき $\dim \mathcal{L}^o_k \leq (F_{2k} - F_k)/2$, $\dim \mathcal{L}^e_k \leq (F_{2k} + F_k)/2$, $\dim \mathcal{L}_k \leq F_{2k}$ である．しかし，この評価は自明な関係式 (命題 2) により改善することができる．M^o_k を M_k の元で $|\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が奇数のものとし，M^e_k を M_k の元で $|\mathbf{k} - \mathbf{1}_n - \mathbf{l}|$ が偶数のものとする．このとき，命題 2 により $\mathcal{L}^o_k = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(M^o_k)$, $\mathcal{L}^e_k = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(M^e_k)$ であることが証明できる．M^o_k の元の個数は $k = 0, 1$ のとき 0 個，$k \geq 2$ のとき 2^{k-2} 個であり，M^e_k の元の個数は $k = 0, 1$ のとき 1 個，$k \geq 2$ のとき 2^{k-2} 個である．したがって，自明な評価として $k = 0, 1$ のとき $\dim \mathcal{L}^o_k = 0$, $\dim \mathcal{L}^e_k = 1$, $\dim \mathcal{L}_k = 1$, $k \geq 2$ のとき $\dim \mathcal{L}^o_k \leq 2^{k-2}$, $\dim \mathcal{L}^e_k \leq 2^{k-2}$, $\dim \mathcal{L}_k \leq 2^{k-1}$ が得られる．

予想 6 は予想 2 と予想 4 を仮定すれば定理 4 により示すことができる．したがって，予想 6 は間接的に重さ 9 まで数値実験により確かめることができている．

謝辞

講演の機会を与えてくださった名古屋大学の古庄英和氏に感謝いたします．また, 数値計算のプログラムをくださった九州大学の広瀬稔氏にも改めて感謝いたします．

参考文献

[1] J. M. Borwein, D. J. Broadhurst and J. Kamnitzer, *Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta values*, Experiment. Math. **10** (2001), 25–34.

[2] F. C. S. Brown, *Mixed Tate motives over Z*, Annals of Math. **175** (2012), 949-976.

[3] J. Choi, Y. J. Cho, and H. M. Srivistava, *Log-Sine integrals involving series associated with the zeta function and polylogarithms*, Math. Scand., **105** (2009), 199–217.

[4] M. E. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[5] M. Yu. Kalmykov and A. Sheplyakov, lsjk–*a* C++ *library for arbitrary-precision numeric evaluation of the generalized log-sine functions*, Comput. Phys. Commun., **172** (2005), 45–59.

[6] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, 1981.

[7] R. Umezawa, *Multiple zeta values and iterated log-sine integrals*, arXiv:1904.09717.

[8] R. Umezawa, *Evaluation of iterated log-sine integrals in terms of multiple polylogarithms*, arXiv:1912.07201.

[9] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, Progress in Math*, **120** (1994), 497-512.