多重ゼータ値に関する一般複シャッフル関係式の表現行列を用いた比較

東北大学大学院理学研究科　木村 藍貴
Aiki Kimura
Mathematical Institute, Graduate School of Science,
Tohoku University

1　序文

多重ゼータ値の間には多くの $\mathbb{Q}$-線型関係式が成り立つ．井原-金子-Zagier によって示された一般複シャッフル関係式 ([2]) と呼ばれる関係式族は, すべての多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線型関係式を生成すると予想されている．一般複シャッフル関係式から明示的な関係式を得るためには煩雑な計算が必要となるので, 見通しを良くする様々な方法が研究されている．今回, 行列を用いて一般複シャッフル関係式の帰納的な表示を与えたので報告する．

2　一般複シャッフル関係式

記号の導入を兼ねて, 一般複シャッフル関係式と正規化について復習する．詳細は井原-金子-Zagier([2]) などを参照されたい．

まず, 収束インデックスを $k_1 \geq 2$ であるインデックス $(k_1, \ldots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$ とする．収束インデックスに対して, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ を

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \quad (\in \mathbb{R})$$

と定義する．この多重級数は $k_1 > 1$ で収束するため, 多重ゼータ値は実数となる．併せて $(k_1, \ldots, k_r)$ の重さを $k_1 + \cdots + k_r$, 深さを r と定義する．

Hoffman によって, $\mathbb{Q}$ 上の非可換多項式環 $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$, 及びその部分間 $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}e_1$, $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + e_0\mathfrak{H}e_1$ が定義された ([1])．このとき, $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^1 \supset \mathfrak{H}^0$ という包含関係がある．次に, $\mathfrak{H}^1$ に調和積 $*$, 及びシャッフル積 $ш$ という 2 通りの新たな積構造をいれる．これらの積は, 多重ゼータ値同士の積が 2 通りの多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線型和で表示されることに由来する．

定義 2.1 (調和積 $*$)**.** $\mathfrak{H}^1$ 上で調和積 $*$ を $\mathbb{Q}$-双線型であるとして, 帰納的に次で定義する:

(H1)　$w \in \mathfrak{H}^1$ に対して，$w * 1 = 1 * w = w$.

(H2)　$w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$: words,　$p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$(z_p w_1) * (z_q w_2) = z_p(w_1 * z_q w_2) + z_q(z_p w_1 * w_2) + z_{p+q}(w_1 * w_2).$$

ただし, $z_i := e_0^{i-1} e_1$ $(i \in \mathbb{Z}_{>0})$ とする.

定義 2.2 (シャッフル積 $ш$)**.** $\mathfrak{H}^1$ 上でシャッフル積 $ш$ を $\mathbb{Q}$-双線型であるとして, 帰納的に次で定義する:

(S1)　$w \in \mathfrak{H}^1$ に対して,　$w \,ш\, 1 = 1 \,ш\, w = w$.

(S2)　$w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$: words,　$e_a w_1, e_b w_2 \in \mathfrak{H}^1$ $(a, b \in \{0, 1\})$ に対して,

$$(e_a w_1) \,ш\, (e_b w_2) = e_a(w_1 \,ш\, e_b w_2) + e_b(e_a w_1 \,ш\, w_2).$$

調和積, もしくはシャッフル積, どちらの積を用いても $\mathfrak{H}^1$ は可換 $\mathbb{Q}$-代数となる（これらをそれぞれ $\mathfrak{H}^1_*$, $\mathfrak{H}^1_ш$ と表す）. また, $\mathfrak{H}^0$ はそれぞれの積において可換部分代数となる. $\mathbb{Q}$-線型写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1) = 1$, $Z(e_0^{k_1-1} e_1 \cdots e_0^{k_r-1} e_1) = \zeta(k_1, \ldots, k_r)$　$(k_1 \geq 2)$ と定義することにより, $\mathfrak{H}^0$ の元と多重ゼータ値を対応づける. 調和積, 及びシャッフル積は多重ゼータ値同士の積に由来するため, どちらの積に関しても写像 Z は代数準同型となる.

積として $\bullet \in \{*, ш\}$ を用いて, $\mathfrak{H}^0$ 上 e_1 で生成される多項式環を $\mathfrak{H}^0_\bullet[e_1]$ とする. このとき, 環同型として $\mathfrak{H}^1_\bullet \simeq \mathfrak{H}^0_\bullet[e_1]$ が成り立つことから ($*$:Hoffman [1], $ш$:Reutenauer [3]), 写像 Z は $\mathbb{Q}$-線型写像 $Z^\bullet : \mathfrak{H}^1_\bullet \to \mathbb{R}[T]$（$T$ は不定元）に拡張される:

$$Z^\bullet(e_0^{k_1-1} e_1 \cdots e_0^{k_r-1} e_1 \bullet e_1^{\bullet s}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) T^s \quad (k_1 \geq 2, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

写像 $Z^\bullet$ により, $\mathfrak{H}^1$ の元と多重ゼータ値を係数にもつ多項式が対応する. ここで, $\mathfrak{H}^0$ の元 w_0 と $\mathfrak{H}^1$ の元 w_1 に対して, $Z^\bullet(w_0 * w_1)$ と $Z^\bullet(w_0 \,ш\, w_1)$ は, 係数の値が一致する T の多項式を与える. 係数にはそれぞれ多重ゼータ値の異なる線型和が表れるので, それらを比較することにより一般複シャッフル関係式が導出される.

定理 2.3 (一般複シャッフル関係式　井原-金子-Zagier [2])**.** $\bullet \in \{*, ш\}$, $w_0 \in \mathfrak{H}^0$, $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ に対して, 次が成り立つ:

$$Z^\bullet(w_0 * w_1 - w_0 \,ш\, w_1) = 0.$$

予想 2.4 (井原-金子-Zagier [2])**.** 一般複シャッフル関係式は多重ゼータ値のすべての $\mathbb{Q}$-線型関係式を生成する.

3　主定理を述べるための準備

$\mathfrak{H}^1$ を次数ごとに直和分解した $\mathbb{Q}$-ベクトル空間において, $\mathbb{Q}$-線型基底を定めることにより調和積とシャッフル積に関する行列が定義される.

定義 3.1. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, n 変数関数 $b^{(n)}$ を次で定義する:

$$b^{(n)} : \{0,1\}^{n-1} \times \{1\} \to [1, 2^{n-1}] \cap \mathbb{Z}, \quad b^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) := 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} \cdot 2^{i-1}.$$

例 3.2. 関数 $b^{(n)}$ の具体例を紹介する. $n = 2$ のとき,

$$b^{(2)}(0,1) = 1,\ b^{(2)}(1,1) = 2.$$

同様に, $n = 3$ のとき,

$$b^{(3)}(0,0,1) = 1,\ b^{(3)}(0,1,1) = 2,\ b^{(3)}(1,0,1) = 3,\ b^{(3)}(1,1,1) = 4.$$

定義 3.3. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^{n-1} \times \{1\}$ に対して, words の列 $\mathcal{W}_n$ を次で定義する:

$$e_{a_1} \cdots e_{a_n} =: w^{(n)}_{b^{(n)}(a_1,\ldots,a_n)},$$

$$\mathcal{W}_n := (w^{(n)}_1, \ldots, w^{(n)}_{2^{n-1}}).$$

また, $\bullet \in \{*, ш\}$, $a_1 = \cdots = a_s = 1$, $a_{s+1} = 0$ として, 同様に $\mathcal{W}^\bullet_n$ を次で定義する:

$$e_{a_{s+1}} \cdots e_{a_n} \bullet e_1^{\bullet s} =: w^{(n),\bullet}_{b^{(n)}(a_1,\ldots,a_n)},$$

$$\mathcal{W}^\bullet_n := (w^{(n),\bullet}_1, \ldots, w^{(n),\bullet}_{2^{n-1}}).$$

関数 $b^{(n)}$ は, 辞書式順序として $e_0 < e_1$ を定めて, 同じ次数の words（及び polynomials）に対して小さいものから順に番号を与えている.

注意 3.4. $\mathfrak{H}^1$ を次数ごとに $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 V_n で次のように直和分解することを考える:

$$\mathfrak{H}^1 = \bigoplus_{n \geq 0} V_n.$$

ただし, $V_0 := \mathbb{Q}, V_n := \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{w \in \mathfrak{H}^1 \mid w$ は $\mathrm{word}, \deg w = n\}$ とする. このとき, $\mathfrak{H}^1_\bullet \simeq \mathfrak{H}^0_\bullet[e_1]$ より, $\mathcal{W}_n$ 及び $\mathcal{W}^\bullet_n$ もそれぞれ V_n の $\mathbb{Q}$-線型基底となる.

定義 3.5. $\bullet \in \{*, ш\}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, 基底変換行列 $A^\bullet_n \in M_{2^{n-1}}(\mathbb{Z})$ を

$$\mathcal{W}^\bullet_n = \mathcal{W}_n A^\bullet_n$$

で定義する.

例 3.6. $\bullet = *, n = 2$ のとき, $\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_2^*, A_2^*$ は

$$\begin{aligned}\underbrace{(e_0e_1,\ e_1 * e_1)}_{\mathcal{W}_2^*} &= (e_0e_1,\ e_0e_1 + 2e_1e_1)\\ &= \underbrace{(e_0e_1,\ e_1e_1)}_{\mathcal{W}_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A_2^*}\end{aligned}$$

となる.

注意 3.7. 基底変換行列であることから $A_n^\bullet$ は正則である. さらに, $(A_n^\bullet)^{-1}$ の定義, 及び写像 $Z^\bullet$ が $\mathbb{Q}$-線型写像であることにより,

$$\begin{aligned}&\left(w_1^{(n)}, \ldots, w_{2^{n-1}}^{(n)}\right) = \left(w_1^{(n),\bullet}, \ldots, w_{2^{n-1}}^{(n),\bullet}\right)(A_n^\bullet)^{-1}\\ &\qquad \Rightarrow \left(Z^\bullet(w_1^{(n)}), \ldots, Z^\bullet(w_{2^{n-1}}^{(n)})\right) = \left(Z^\bullet(w_1^{(n),\bullet}), \ldots, Z^\bullet(w_{2^{n-1}}^{(n),\bullet})\right)(A_n^\bullet)^{-1}\end{aligned}$$

を得る. 右辺の列において $Z^\bullet(w_i^{(n),\bullet})$ が直ちに多重ゼータ値と T の積で書けることから, $(A_n^\bullet)^{-1}$ は $Z^\bullet(w_i^{(n)})$ を, 多重ゼータ値を係数にもつ T の多項式で表すという操作を行っている.

定義 3.8. $\bullet \in \{*, ш\}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \{0, 1\}^{k-1} \times \{1\}$, もしくは $\boldsymbol{a} = \emptyset$ に対して, $\mathbb{Q}$-線型写像 $f_{\boldsymbol{a}}^\bullet : \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ を

$$f_{\boldsymbol{a}}^\bullet(w) = \begin{cases} w \bullet e_{a_1} \cdots e_{a_k} & (\boldsymbol{a} \neq \emptyset) \\ \mathrm{id}_{\mathfrak{H}^1} & (\boldsymbol{a} = \emptyset) \end{cases}$$

と定義する. また, $\mathcal{W}_n$ と $\mathcal{W}_{n+k}$ に関する $f_{\boldsymbol{a}}^\bullet$ の表現行列を $X_{\boldsymbol{a}}^{(n),\bullet} \in M_{2^{n+k-1}, 2^{n-1}}(\mathbb{Z})$ とする（$\boldsymbol{a} = \emptyset$ のときは $k = 0$ とみなす）. すなわち, $X_{\boldsymbol{a}}^{(n),\bullet}$ を用いて

$$\left(f_{\boldsymbol{a}}^\bullet(w_1^{(n)}), \ldots, f_{\boldsymbol{a}}^\bullet(w_{2^{n-1}}^{(n)})\right) = \left(w_1^{(n+k)}, \ldots, w_{2^{n+k-1}}^{(n+k)}\right) X_{\boldsymbol{a}}^{(n),\bullet}$$

と定義する.

注意 3.9. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, 次の事実が得られている:

$$\operatorname{rank} X_{\boldsymbol{a}}^{(n),\bullet} = 2^{n-1}.$$

ここで, $\bullet \in \{*, ш\}$, $w \in \mathfrak{H}$ に対して, $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{W}_n^\bullet$ に関する略記法を次で与える:

$$w\mathcal{W}_n := (ww_1^{(n)}, \ldots, ww_{2^{n-1}}^{(n)}), \qquad \mathcal{W}_n^\bullet \bullet w := (w_1^{(n),\bullet} \bullet w, \ldots, w_{2^{n-1}}^{(n),\bullet} \bullet w).$$

この表記を用いることにより, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\mathcal{W}_{n+1}$, $\mathcal{W}_{n+1}^\bullet$ は結合としてそれぞれ次のように表記できる:

$$\mathcal{W}_{n+1} = (e_0\mathcal{W}_n, e_1\mathcal{W}_n),\ \mathcal{W}_{n+1}^\bullet = (e_0\mathcal{W}_n, \mathcal{W}_n^\bullet \bullet e_1).$$

4 主結果

表現行列を用いて主定理である多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線型関係式を表示する. 略記として

$$X_{\boldsymbol{a}}^{(n),*-ш} := X_{\boldsymbol{a}}^{(n),*} - X_{\boldsymbol{a}}^{(n),ш}$$

を用いることにより, 次の主定理を得る.

定理 4.1. $\bullet \in \{*, ш\}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \{0\} \times \{0,1\}^{k-2} \times \{1\}$ に対して,

$$\Bigl(Z^{\bullet}\bigl(w_1^{(n+k),\bullet}\bigr), \ldots, Z^{\bullet}\bigl(w_{2^{n+k-1}}^{(n+k),\bullet}\bigr)\Bigr)\,(A_{n+k}^{\bullet})^{-1} X_{\boldsymbol{a}}^{(n),*-ш} = \mathbf{0} \quad (\in \mathbb{R}^{2^{n-1}})$$

が成り立つ.

左辺の列における $Z^{\bullet}(w_i^{(n),\bullet})$ は多重ゼータ値と T の積そのものであるため, 主定理は行列 $(A_{n+k}^{\bullet})^{-1} X_{\boldsymbol{a}}^{(n),\bullet}$ の成分を係数とする多重ゼータ値の線型関係式を表している.

また, $\mathfrak{H}^0$ の元である $\mathcal{W}_n$ の前半分, すなわち, $e_0\mathcal{W}_{n-1}$ のみを用いることにより次の定理が得られた.

定理 4.2. $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n \in \mathrm{Z}_{\geq 2}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \{0,1\}^{k-1} \times \{1\}$ に対して,

$$\Bigl(Z^{\bullet}\bigl(w_1^{(n+k),\bullet}\bigr), \ldots, Z^{\bullet}\bigl(w_{2^{n+k-1}}^{(n+k),\bullet}\bigr)\Bigr)\,(A_{n+k}^{\bullet})^{-1} X_{\boldsymbol{a}}^{(n),*-ш} \begin{bmatrix} I_{2^{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\in \mathbb{R}^{2^{n-2}})$$

が成り立つ.

注意 4.3. 定理 4.1, 及び定理 4.2 は一般複シャッフル関係式 (定理 2.3) と同値であることが分かっている.

特に, $\boldsymbol{a} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k})$ としたとき, 定理 4.2 より次の系を得る.

系 4.4. $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n \in \mathrm{Z}_{\geq 2}$ に対して,

$$\Bigl(Z^{\bullet}\bigl(w_1^{(n+k),\bullet}\bigr), \ldots, Z^{\bullet}\bigl(w_{2^{n+k-1}}^{(n+k),\bullet}\bigr)\Bigr)\,(A_{n+k}^{\bullet})^{-1} X_{\underbrace{1,\ldots,1}_{k}}^{(n),*-ш} \begin{bmatrix} I_{2^{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\in \mathbb{R}^{2^{n-2}})$$

が成り立つ.

この系は, 井原-金子-Zagier によって示された多重ゼータ値の導分関係式 ([2]) と呼ばれる $\mathbb{Q}$-線型関係式族と同値であることが分かっている.

さらに, 定理 4.1 や定理 4.2 に用いられる行列 $A_n^{\bullet}$ と $X_{\boldsymbol{a}}^{(n),\bullet}$ について, それぞれブロック行列として帰納的な表示が得られた.

定理 4.5. $\bullet \in \{*, ш\}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$A_n^\bullet = \begin{cases} [\,1\,] & (n=1) \\ \begin{bmatrix} I_{2^{n-2}} & B_{n-1}^\bullet \\ \mathbf{0} & A_{n-1}^\bullet N_{n-1} \end{bmatrix} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$(A_n^\bullet)^{-1} = \begin{cases} [\,1\,] & (n=1) \\ \begin{bmatrix} I_{2^{n-2}} & -B_{n-1}^\bullet N_{n-1}^{-1}(A_{n-1}^\bullet)^{-1} \\ 0 & N_{n-1}^{-1}(A_{n-1}^\bullet)^{-1} \end{bmatrix} & (n \geq 2) \end{cases}$$

となる. B_n, N_n もブロック行列として次のように帰納的に表示される:

$$B_n^\bullet = \begin{cases} [\,\delta_\bullet\,] & (n=1) \\ \begin{bmatrix} B_{n-1}^\bullet(A_{n-1}^\bullet)^{-1} & B_{n-1}^\bullet(A_{n-1}^\bullet)^{-1}B_{n-1}^\bullet \\ A_{n-1}^\bullet N_{n-1}(A_{n-1}^\bullet)^{-1} & A_{n-1}^\bullet N_{n-1}(A_{n-1}^\bullet)^{-1}B_{n-1}^\bullet \end{bmatrix} \\ \qquad -\delta_\bullet \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_{2^{n-2}} & B_{n-1}^\bullet - A_{n-1}^\bullet N_{n-1} \end{bmatrix} & (n \geq 2), \end{cases}$$

$$N_n = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \mathbf{0} \\ & J_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{n-1} & \\ \mathbf{0} & & & & n+1 \end{bmatrix}.$$

ただし, $\delta_\bullet := \begin{cases} 1 & (\bullet = *) \\ 0 & (\bullet = ш) \end{cases}$, $J_0 := \emptyset$, $J_i := iI_{2^{n-i-1}}$ とする.

注意 4.6. $A_n^\bullet$ は正則かつ上三角行列, N_n は正則かつ対角行列である.

定理 4.7. $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \{0,1\}^{k-1} \times \{1\}$, もしくは $\boldsymbol{a} = \emptyset$ に対して, $X_{\boldsymbol{a}}^{(n),\bullet}$ はブロック行列として次のように表示される.

(i) $\underline{\ n=1\ }$

$$X_{\boldsymbol{a}}^{(1),\bullet} = \begin{cases} [\,1\,] & (\boldsymbol{a}=\emptyset),\\ \begin{bmatrix} \delta_{0,a_1} X^{(1),\bullet}_{a_2,\dots,a_k} \\ \\ \delta_{1,a_1} X^{(1),\bullet}_{a_2,\dots,a_k}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1,\,b^{(k+1)}(1,a_1,\dots,a_k)} \\ \vdots \\ \delta_{2^k,\,b^{(k+1)}(1,a_1,\dots,a_k)}\end{bmatrix} & \\ \qquad - (-1)^{a_1}\delta_\bullet \begin{bmatrix} \delta_{1,\,b^{(k+1)}(0,1,a_2,\dots,a_k)} \\ \vdots \\ \delta_{2^k,\,b^{(k+1)}(0,1,a_2,\dots,a_k)}\end{bmatrix} & (\boldsymbol{a}\neq\emptyset).\end{cases}$$

(ii) $\underline{\ n\geq 2\ }$

$$X_{\boldsymbol{a}}^{(n),\bullet} = \begin{cases} I_{2^{n-1}} & (\boldsymbol{a}=\emptyset),\\ \left[\begin{array}{c} \delta_{0,a_1}X^{(n),\bullet}_{a_2,\dots,a_k} \\ \hdashline \delta_{1,a_1}X^{(n),\bullet}_{a_2,\dots,a_k}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} X^{(n-1),\bullet}_{a_1,\dots,a_k} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & X^{(n-1),\bullet}_{a_1,\dots,a_k}\end{array}\right] & \\ \qquad -\delta_\bullet \left[\begin{array}{cc} \delta_{0,a_1}X^{(n-1),\bullet}_{a_2,\dots,a_k} & \mathbf{0} \\ \delta_{1,a_1}X^{(n-1),\bullet}_{a_2,\dots,a_k} & (-1)^{a_1}X^{(n-1),\bullet}_{a_2,\dots,a_k} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}}\end{array}\right] & (\boldsymbol{a}\neq\emptyset).\end{cases}$$

ただし, $\delta_{x,y} := \begin{cases} 1 & (x=y) \\ 0 & (x\neq y)\end{cases}$, $\delta_\bullet := \begin{cases} 1 & (\bullet = *) \\ 0 & (\bullet = \text{ш})\end{cases}$ とする.

定理 4.5 と定理 4.7 より, 主定理（定理 4.1）の行列 $(A^\bullet_{n+k})^{-1}X_{\boldsymbol{a}}^{(n),*-\text{ш}}$ は帰納的に表示される. 主定理は一般複シャッフル関係式と同値であることから, その帰納的表示を与えたことになる. また, 行列 $(A^\bullet_{n+k})^{-1}X_{\boldsymbol{a}}^{(n),*-\text{ш}}$ は多重ゼータ値の線型関係式の係数であったので, その階数を調べることにより線型独立な関係式の個数が得られる. もし, 行列の階数を帰納的に計算できれば, 一般複シャッフル関係式の関係式族としての大きさが分かるので, 先に述べた予想 2.4 及び多重ゼータ値に関する Zagier の次元予想 ([4]) の解決に有用であると期待される.

謝辞

最後になりましたが, 今回発表の機会を与えご支援くださった名古屋大学の古庄英和先生に, この場をお借りして, 心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.
[2] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), 307–338.
[3] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications, 1993.
[4] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in ECM volume, Progress. Math. **120** (1994), 497–512.