

シンプレクティックマップにおける 共鳴島構造の摂動論による抽出

Extraction of resonance island structure in symplectic mappings *

京大・情報 後藤振一郎 (Shin-itiro GOTO),
Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University,

abstract

A symplecticity-preserving renormalization method analysis is carried out to study the resonance structure of symplectic maps in two dimensions. The topology of the resonance structures, such as a chain of resonant islands, can be determined analytically. Before we show such analysis, we review a method to construct symplecticity-preserving renormalization maps using the Liouville operator by which we study the resonance structures.

1 はじめに

ハミルトン力学系はそれ自身に興味注がれているだけでなく、太陽系モデル [Tan02] は元より、化学反応モデル [Tod00], プラズマ物理 [LL] などに応用されるため重要である。高自由度の力学系はそのような系で頻繁に現われるが、高自由度系は必然的に高次元の相空間を持つため、幾何学的直観による軌道族の大域的振舞を知る事は困難である。

従来までの研究により、カオスのハミルトン力学系のある程度共通した認識が得られたのは相空間の次元が 2 の場合である。特に、2 次元相空間上で定義されたシンプレクティックマップ系 (時間発展則が正準変換で書かれる離散力学系) における相空間内に現れる共鳴島構造と、その入れ子構造は近可積分ハミルトン力学系で典型的に現れる事が知られている [Sai]。またその共鳴島の重なる条件は、相空間大域的カオスが生じる条件と深く関連しているとも考えられている [LL]。これに対し、高次元相空間上で定義されたシンプレクティックマップ系での『高次元共鳴島構造』の共通認識は殆どなされていない (図 1)。ここで『高次元』とは 4, 6, 8, ... の事を指す。偶数次元であるのはハミルトン力学系の場合を考えていることによる。しかし我々は高次元近可積分系に関しては摂動法を開発することにより、『高次元共鳴島』の相空間内での大域的配置を特定し、大域的カオスとの関連を議論できると考えている。

*The report which treats this study written in English is going to be published in (i) Proc. 35th Symposium on Celestial Mechanics, (2003). or the published paper (ii) Prog. Theor. Phys. 111 (2004) 464-474. and references therein.

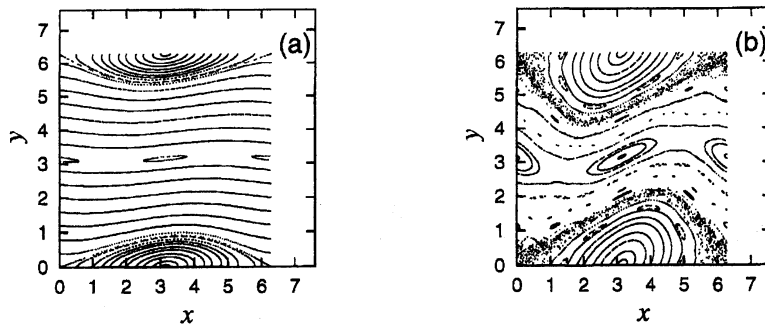


図 1: Phase portraits of a symplectic map. The model we use here is the standard map, $x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}$, $y_{n+1} = y_n + K \sin(x_n) \pmod{2\pi}$. (a) $K = 0.2$, (b) $K = 0.97$. What happens for high-dimensional symplectic maps?

一方近年、微分方程式系に対する摂動法として『くりこみ法』が提案されている [CGO96]. この方法は、与えられた系に対しての予備的考察が少く、かつ多重スケール法や平均化法等の種々の特異摂動法 [Nay] を含む方法の候補として注目されている [Oon00, EFK00, GMN99]. この方法により、系の遅い運動が従う運動方程式が近似的に導出される。また、くりこみ法は古典系での問題に対処するに留まらず、量子力学系にも適用でき [Kun98, Fra97], その意味でも応用範囲が広いと考えられている。それ故、この方法の離散力学系への拡張 [KM98] は自然であると我々は考え、研究を行ってきた。シンプレクティックマップ系は、あるハミルトンフローのポアンカレマップと解釈されることと、加速器科学等での実際の物理系にも現れるからであるので重要な離散力学系のクラスとなっている [LL, AA, Tze01]. ここで、このくりこみ法のシンプレクティックマップへの適用は、簡約系もシンプレクティック性を満たす必要があると考えられ [YN98], そこがくりこみ法がシンプレクティックマップに対してもうまく働くかのポイントになる。これまでに著者らによりシンプレクティック性を保存したくりこみ法の開発が行われてきたが、いずれも人為的な操作が必要であった [GN01JPSJ, GNY02, TD03]. そこで本報告では、シンプレクティック性を保存する自然な方法を与え [GN04], その応用として、高次元相空間内の共鳴島構造の配置についての研究を紹介する [MGN04, Got04].

本報告の構成は以下の通りである。2節で2次元線型シンプレクティックマップ、3節で2次元非線型シンプレクティックマップのくりこみ法によるマップの簡約を取り扱う。4節で共鳴島構造を形成する周期点の解析法を示す。5節ではスタンダードマップと呼ばれる系についての解析例を示す。この節で取り扱うモデルはそれ以外の節の解析例とは、シンプレクティック性が簡約系に自然に備わっているという意味で少し異なるので、節を別にした。なお、常微分方程式、高次元シンプレクティックマップ系に対するくりこみ法の解説については紙数の関係から省略させて頂いた。興味のある読者は簡単な日本語による解説がそれぞれ文献 [Got02] 及び、[GN04] にあるので参考にして頂きたい。2節と3節の内容は文献 [GN04] の内容と重複する部分がある。

2 線型シンプレクティックマップ

ここでは我々の方法を説明するために、厳密解が容易に求められる定数係数の線型シンプレクティックマップの解析を行う。

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= x^n + y^{n+1} \\y^{n+1} &= y^n - ax^n + 2\varepsilon Jx^n.\end{aligned}$$

ここで x^n, y^n は時刻 $n \in \mathbb{Z}$ での実数に値をとる正準共役な力学変数, $a, J \in \mathbb{R}$ はパラメータ, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ はスモールパラメータである. シンプレクティック性とは $dx^{n+1} \wedge dy^{n+1} - dx^n \wedge dy^n = 0$ のことである. また原点が楕円型不動点を持っていると仮定する. これは以下のように変形できる.

$$L_\theta x^n \equiv x^{n+1} - 2x^n \cos \theta + x^{n-1} = \varepsilon 2Jx^n, \quad \cos \theta \equiv 1 - a/2. \quad (1)$$

この節の冒頭に述べたように, この系 (1) は厳密解を簡単に書き下すように設定されている. その解は以下である.

$$\begin{aligned}x_E^n &= A \exp\left(i \arccos(\cos \theta + \varepsilon J)n\right) + \text{c.c.}, \\ &= A \exp\left[i\left(\theta + \varepsilon \frac{-J}{\sin \theta} + \varepsilon^2 \frac{-\cos \theta}{2 \sin \theta} \left(\frac{J}{\sin \theta}\right)^2 + \dots\right)n\right] + \text{c.c.},\end{aligned} \quad (2)$$

ここで $A \in \mathbb{C}$ は積分定数で c.c. はこれ以前の項の複素共役項を表す. 我々はこの系を容易に積分できないとし, その仮定の上でこの系の簡約系を構成することを試みる. そのために時間連続系で発展してきたくりこみ法をそのまま離散系に拡張することを行う. 先ず正則摂動解と呼ばれる, ε に関して自然数幂で展開された解の構成を行う [Nay]. すなわち $x^n = x^{(0)n} + \varepsilon x^{(1)n} + \varepsilon^2 x^{(2)n} + \dots$, を (1) へ代入する. すると以下のような各 ε の自然数幂オーダーでの満たすべき方程式系が得られる.

$$L_\theta x^{(0)n} = 0, \quad L_\theta x^{(1)n} = 2Jx^{(0)n}, \quad L_\theta x^{(2)n} = 2Jx_n^{(1)n}, \dots$$

そしてこの方程式系を解くことにより以下の摂動解を得る.

$$\begin{aligned}x^{(0)n} &= A \exp(i\theta n) + \text{c.c.}, \\ x^{(1)n} &= \frac{-iJA}{\sin \theta} n \exp(i\theta n) + \text{c.c.}, \\ x^{(2)n} &= \frac{-J^2 A}{2 \sin^2 \theta} \left(n^2 + i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} n\right) \exp(i\theta n) + \text{c.c.},\end{aligned}$$

ここで $A \in \mathbb{C}$ は積分定数である. この解は永年項と呼ばれる $\propto n, n^2$ の項を含み, 摂動解 $x^{(0)n} + \varepsilon x^{(1)n} + \varepsilon^2 x^{(2)n}$ が $\varepsilon n, \varepsilon^2 n^2$ のようになり, 暗に仮定していた $x^{(0)n} \geq \varepsilon x^{(1)n}$ 等の関

係式を $\varepsilon n \sim 1$ なる n で破る. 従ってその n 以降ではこの近似が妥当ではないことが予想される. この意味で, この解は良い近似になっている有効範囲が狭い.

ここでこの正則摂動解の永年項を除去するように “くりこみ変数 A^n ” を導入する.

$$A^n \equiv A + \varepsilon \frac{-iJA}{\sin \theta} n + \varepsilon^2 \frac{-J^2 A}{2 \sin^2 \theta} \left(n^2 + i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} n \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3)$$

我々の解釈による離散系に単純に拡張されたくりこみ法とは, このくりこみ変数 A^n が満たすべき差分方程式に過ぎない. A^n が満たす差分方程式を構成するには (i) A^{n+1} と A^n の差をとり,

$$A^{n+1} - A^n = \left(-i\varepsilon \frac{J}{\sin \theta} - \varepsilon^2 \frac{J^2}{2 \sin^2 \theta} \left(2n + 1 + i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \right) A + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (4)$$

次に, (ii) A^n, A^{n+1} で方程式が閉じるように, A を A^n を用いて書き直す. くりこみ変換の定義から逆変換 (A を A^n により表す変換) は以下のように求まる.

$$A = \left(1 + i\varepsilon \frac{Jn}{\sin \theta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) A^n. \quad (5)$$

これを (4) に代入することにより “単純くりこみマップ” は以下のように導出される.

$$A^{n+1} = \left(1 + \frac{-i\varepsilon J}{\sin \theta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\varepsilon J}{\sin \theta} \right)^2 - i\varepsilon^2 \frac{J^2 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} \right) A^n + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (6)$$

その解は以下で与えられる.

$$A^n = \left(1 + \frac{-i\varepsilon J}{\sin \theta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\varepsilon J}{\sin \theta} \right)^2 - i\varepsilon^2 \frac{J^2 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right)^n A^0. \quad (7)$$

一方で先程与えた厳密解 (2) から A^n の従う方程式は以下で与えられる.

$$A^n = A^0 \exp \left[i \left(\varepsilon \frac{-J}{\sin \theta} - \varepsilon^2 \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \left(\frac{J}{\sin \theta} \right)^2 + \dots \right) n \right]. \quad (8)$$

ここで注意することは, 今示した “単純くりこみ法” では一般にシンプレクティック性が保存されないことである. シンプレクティックマップの簡約系を構成を目指していたのに, 得られた簡約系は非シンプレクティックとなってしまったのである. (6) から実際に, $dA^{n+1} \wedge dA^{*n+1} - dA^n \wedge dA^{*n} \neq 0$, であることが直接計算により示される. ここで A^* は A の複素共役を表す. なお著者らは一般に k 次までの正則摂動解を考慮したくりこみに対しては $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ 次までシンプレクティック性を保存していると予想している. また, $|A^n|^2$ が厳密解の情報により保存量であるが, 単純くりこみマップ (6) では保存量ではない.

この単純くりこみ法の欠点を改善するために、“シンプレクティック性保zukiりこみ法”の構築を考える。先ず、以下の自励ハミルトンフローの満たす性質に着目する。

$$Z(t + \mu) = \left(1 + \mu \mathcal{L}_H + \frac{\mu^2}{2!} \mathcal{L}_H^2 + \dots \right) Z(t) = \exp(\mu \mathcal{L}_H) Z(t), \quad (9)$$

ここで H はあるハミルトニアン, Z は正準変数 $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ の関数, $t \in \mathbb{R}$ は時間変数, $\mu \in \mathbb{R}$ はパラメーターである。また,

$$\mathcal{L}_H Z \equiv \{Z, H\} \equiv \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial Z}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Z}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right), \quad (10)$$

$\mathcal{L}_H^2 Z = \mathcal{L}_H(\mathcal{L}_H Z) = \{\{Z, H\}, H\}$, 等である。ここで (10) 中の \mathcal{L}_H はリウビル演算子と呼ばれる一階の微分演算子である。この関係式 (10) を $Z^{n+1} \equiv Z(t + \mu)$, $Z^n \equiv Z(t)$ とみなすことによりハミルトニアン H に付随するマップが構成される。

$$Z^{n+1} = \Psi(Z^n; \mu), \quad \Psi(Z^n; \mu) \equiv \exp(\mu \mathcal{L}_H) Z(t)|_{Z(t) \equiv Z^n}. \quad (11)$$

この関係式を頼りに単純くりこみマップをシンプレクティックくりこみマップに変形する。先ず (11) 中のパラメーター μ をスモールパラメーター ε と置く ($\mu = \varepsilon$)。次に (11) にはハミルトニアン H が必要であるが、単純くりこみマップから直接的には H の表式が分からない。この H の表式を見つけるには以下の手続きを踏めばよい。

- 1 連続極限 ($\varepsilon \rightarrow 0$) でのくりこみ変数 $A(t)$ が存在すると仮定する。その仮定の上で、一般論である (9) 式における $Z(t)$ をその存在を仮定したくりこみ変数 $A(t)$ の場合に適用する。更に (9) 式でのハミルトニアン H を ε の自然数幂で展開 ($H = H^{(1)} + \varepsilon H^{(2)} + \dots$) し、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} A(t + \varepsilon) &= \left(1 + \varepsilon \mathcal{L}_H + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathcal{L}_H^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right) A(t) \\ &= \left\{ 1 + \varepsilon \mathcal{L}_{H^{(1)}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\mathcal{L}_{H^{(1)}}^2}{2!} + \mathcal{L}_{H^{(2)}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\} A(t). \end{aligned} \quad (12)$$

2 単純くりこみマップ

$$A^{n+1} = A^n + \varepsilon f_1(A^n, A^{*n}) + \varepsilon^2 f_2(A^n, A^{*n}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

ここで f_1, f_2 は与えられた問題に依存してきまる関数である (今考察している例では A^{n+1} は (6) により与えられている)。これと (12) 式を同一視する。 $H^{(1)}$ はこの同一視の $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 項から求まる。すなわち, $\mathcal{L}_{H^{(1)}} A = f_1$ により $H^{(1)}$ が求まる。次に $H^{(2)}$ は $H^{(1)}$ の具体的な表式と (12) を比べることに決まる。すなわち $\mathcal{L}_{H^{(1)}}^2 A / (2!) + \mathcal{L}_{H^{(2)}} A = f_2$ より $H^{(2)}$ が求まる。以降 $H^{(3)}$ 等も順次 ε の低次から次々と決定される。

3 シンプレクティック性保存くりこみマップを得るには 2. で得られた時間連続ハミルトン系を何らかの方法 (例えばシンプレクティック積分法) で差分化すればよい. この時, 時間ステップは ε にとる.

考察しているマップ (6) の場合, 極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとり

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{iJ}{\sin \theta} A = \frac{\partial H}{\partial A^*} = \mathcal{L}_{H^{(1)}} A, \quad \frac{dA^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial A} = \mathcal{L}_{H^{(1)}} A^*,$$

となる. ここで dA/dt は $(A^{n+1} - A^n)/\varepsilon$, dA^*/dt は $(A^{*n+1} - A^{*n})/\varepsilon$ による. これにより,

$$H^{(1)} = -i\frac{J|A|^2}{\sin \theta}, \quad \mathcal{L}_{H^{(1)}}^2 A = \{\{A, H^{(1)}\}, H^{(1)}\} = \frac{-J^2 A}{\sin^2 \theta},$$

が得られる. さらにこれを用いると, 以下の関係式が成立することが分かる.

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \varepsilon \mathcal{L}_{H^{(1)}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\mathcal{L}_{H^{(1)}}^2}{2} + \mathcal{L}_{H^{(2)}} \right) \right\} A \\ &= A + \varepsilon \frac{-iJA}{\sin \theta} + \varepsilon^2 \left(\frac{-J^2 A}{2 \sin^2 \theta} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial A^*} \right). \end{aligned}$$

単純くりこみマップ (6) の右辺とあわせると,

$$H^{(2)} = \frac{-iJ^2 \cos \theta |A|^2}{2 \sin^3 \theta}.$$

以上により, 非シンプレクティックの単純くりこみマップから $\varepsilon \rightarrow 0$ により得られたハミルトニアン $H = H^{(1)} + \varepsilon H^{(2)}$ により導出される正準方程式は,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{-iJ}{\sin \theta} A + \varepsilon \frac{-iJ^2 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} A = \frac{\partial H}{\partial A^*}, \quad \frac{dA^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial A}.$$

この解は,

$$A(t) = A(0) \exp \left\{ i \left(\frac{-J}{\sin \theta} + \varepsilon \frac{-J^2 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} \right) t \right\},$$

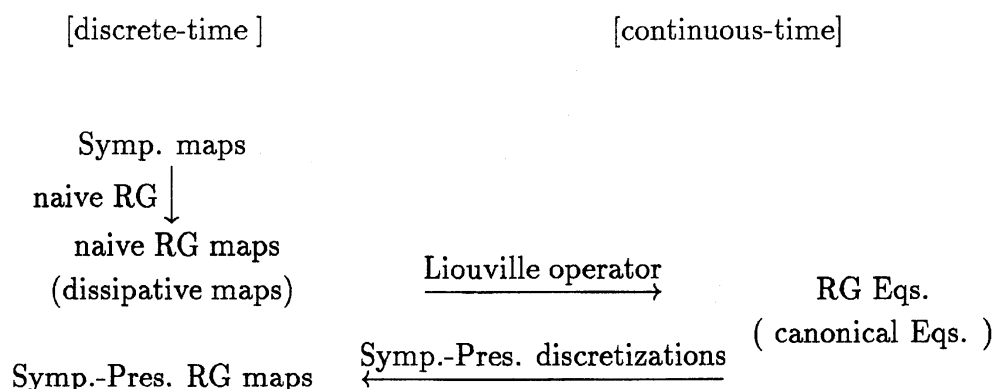
であり, これはこの解の具体的表式から次のシンプレクティックマップをもたらす.

$$A^{n+1} = A^n \exp \left\{ i \varepsilon \left(\frac{-J}{\sin \theta} + \varepsilon \frac{-J^2 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} \right) \right\}.$$

ここで離散化の際の時間ステップは ε にとった. これが (1) におけるシンプレクティック化くりこみマップである.

以上の手続きをまとめると以下の図になる.

A symplecticity-preserving RG method for symplectic maps



3 2次元非線型シンプレクティックマップ

非線型シンプレクティックマップの場合には一般にカオス系となるが、その場合でも我々の方法に変更は生じない。2次元相空間に大きな共鳴島構造が生じない場合はシンプレクティックくりこみマップはその解が解析的に表式を持つ。大きな共鳴島が生じる場合でも我々の方法により簡約系が得られる。

3.1 共鳴島構造を生じない場合

次の形のシンプレクティックマップの簡約を考察する。

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + y^{n+1} \\ y^{n+1} &= y^n - ax^n + 2\varepsilon J(x^n)^3, \end{aligned}$$

ここで x^n, y^n は前節と同様、時刻 n での実数値をとる互いに正準共役な力学変数で ε はスモールパラメーター、 a, J は $\mathcal{O}(1)$ のパラメーターであり、相空間原点は楕円型と仮定する。このマップは以下のように変形できる。

$$L_\theta x^n = \varepsilon 2J(x^n)^3, \quad (13)$$

以下これを考察する。 L_θ の定義は線型の場合と同じである ((1) 式で定義)。

くりこみマップを以下のように導出する。まず正則摂動展開, $x^n = x^{(0)n} + \varepsilon x^{(1)n} + x^{(2)n} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, により

$$L_\theta x^{(0)n} = 0, \quad L_\theta x^{(1)n} = 2J(x^{(0)n})^3, \quad L_\theta x^{(2)n} = 6J(x^{(0)n})^2 x^{(1)n}. \quad (14)$$

そしてその解は,

$$x^{(0)n} = Ae^{i\theta n} + \text{c.c.} \quad (15)$$

$$x^{(1)n} = \frac{-3i|A|^2AJ}{\sin\theta} ne^{i\theta n} + \frac{JA^3}{\cos 3\theta - \cos\theta} e^{3i\theta n} + \text{c.c.} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} x^{(2)n} = & \left\{ \frac{-9J^2|A|^4A}{2\sin^2\theta} n^2 - i \frac{J^2|A|^4A}{\sin\theta} \left(\frac{3}{\cos 3\theta - \cos\theta} + \frac{9\cos\theta}{2\sin^2\theta} \right) n \right\} e^{i\theta n} \\ & + \left\{ \frac{-9iJ^2|A|^2A^3}{(\cos 3\theta - \cos\theta)\sin\theta} n + \frac{J^2|A|^2A^3}{2(\cos 3\theta - \cos\theta)^2} \left\{ 12 - 18 \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} \right\} \right\} e^{3i\theta n} \\ & + \left\{ \frac{3JA^5}{(\cos 5\theta - \cos\theta)(\cos 3\theta - \cos\theta)} \right\} e^{5i\theta n} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (17)$$

と求まる. ここで $\cos\theta \neq \cos 3\theta$, $\cos\theta \neq \cos 5\theta$. を仮定する. この仮定が成立しない場合は次の小節で考察する. 永年項を拾いきりこみ変換を定義する.

$$\begin{aligned} A^n \equiv & A + \varepsilon \frac{-3i|A|^2AJ}{\sin\theta} n \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \frac{-9J^2|A|^4A}{2\sin^2\theta} n^2 - i \frac{J^2|A|^4A}{\sin\theta} \left(\frac{3}{\cos 3\theta - \cos\theta} + \frac{9\cos\theta}{2\sin^2\theta} \right) n \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

これにより単純くりこみマップを構成すると,

$$\begin{aligned} A^{n+1} = & A^n + \varepsilon \frac{-3iJ}{\sin\theta} |A^n|^2 A^n + \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2!} \left(\frac{-3iJ}{\sin\theta} |A^n|^2 \right)^2 A^n \right. \\ & \left. - \left(\frac{9i\cos\theta}{2\sin^3\theta} J^2 + \frac{3iJ^2}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)} \right) |A^n|^4 A^n \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる. この系はシンプレクティック性を有していないので, この非シンプレクティックマップを近似するシンプレクティックマップを以下のように探す. 実数に値をとる変数 A_1^n, A_2^n ($A^n = A_1^n + iA_2^n$), により単純くりこみマップ (19) を書き換えれば,

$$\begin{aligned} A_1^{n+1} = & A_1^n + \varepsilon \frac{3J}{\sin\theta} (A_1^{n2} + A_2^{n2}) A_2^n + \varepsilon^2 \left[\frac{-1}{2!} \left\{ \frac{3J}{\sin\theta} (A_1^{n2} + A_2^{n2}) \right\}^2 A_1^n \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{9\cos\theta}{2\sin^3\theta} + \frac{3}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)} \right\} J^2 (A_1^{n2} + A_2^{n2})^2 A_2^n \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} A_2^{n+1} = & A_2^n + \varepsilon \frac{-3J}{\sin\theta} (A_1^{n2} + A_2^{n2}) A_1^n + \varepsilon^2 \left[\frac{-1}{2!} \left\{ \frac{3J}{\sin\theta} (A_1^{n2} + A_2^{n2}) \right\}^2 A_2^n \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{9\cos\theta}{2\sin^3\theta} + \frac{3}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)} \right\} J^2 (A_1^{n2} + A_2^{n2})^2 A_1^n \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

線型シンプレクティックマップの節で示した一般論に従い, この系の $\varepsilon \rightarrow 0$ 極限をとることにより以下を得る,

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \frac{3J}{\sin\theta} (A_1^2 + A_2^2) A_2 = \frac{\partial H}{\partial A_2} = \mathcal{L}_{H^{(1)}} A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\frac{3J}{\sin\theta} (A_1^2 + A_2^2) A_1 = -\frac{\partial H}{\partial A_1} = \mathcal{L}_{H^{(1)}} A_2, \end{aligned}$$

ここで $H^{(1)} = 3J(A_1^2 + A_2^2)^2 / (4 \sin \theta)$ である. 従って以下の関係が成立していることがわかる.

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \varepsilon \mathcal{L}_{H^{(1)}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\mathcal{L}_{H^{(1)}}^2}{2!} + \mathcal{L}_{H^{(2)}} \right) \right\} A_1(t) \\ &= A_1 + \varepsilon \frac{3J}{\sin \theta} (A_1^2 + A_2^2) A_2 + \varepsilon^2 \left\{ \frac{-1}{2!} \left(\frac{3J}{\sin \theta} \right)^2 (A_1^2 + A_2^2)^2 A_1 + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial A_2} \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \varepsilon \mathcal{L}_{H^{(1)}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\mathcal{L}_{H^{(1)}}^2}{2!} + \mathcal{L}_{H^{(2)}} \right) \right\} A_2(t) \\ &= A_2 + \varepsilon \frac{-3J}{\sin \theta} (A_1^2 + A_2^2) A_1 + \varepsilon^2 \left\{ \frac{-1}{2!} \left(\frac{3J}{\sin \theta} \right)^2 (A_1^2 + A_2^2)^2 A_2 - \frac{\partial H^{(2)}}{\partial A_1} \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

従い, $H^{(2)}$ は単純くりこみマップ (20)-(21) と (22)-(23) を比べることにより,

$$H^{(2)} = \left\{ \frac{9 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} + \frac{3}{\sin \theta (\cos 3\theta - \cos \theta)} \right\} \frac{J^2 (A_1^2 + A_2^2)^3}{6}.$$

と計算される. 結局 $H = H^{(1)} + \varepsilon H^{(2)}$ は以下のように構成された.

$$\begin{aligned} H &= \alpha (A_1^2 + A_2^2)^2 + \beta (A_1^2 + A_2^2)^3. \\ \alpha &\equiv \frac{3J}{4 \sin \theta}, \quad \beta \equiv \varepsilon \left\{ \frac{9 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} + \frac{3}{\sin \theta (\cos 3\theta - \cos \theta)} \right\} \frac{J^2}{6}. \end{aligned}$$

この系は正準変換 $A_1 = \sqrt{2I} \sin \Theta, A_2 = \sqrt{2I} \cos \Theta, (dA_1 \wedge dA_2 = d\Theta \wedge dI)$ により

$$\frac{d\Theta}{dt} = 8\alpha I + 24\beta I^2 = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad \frac{dI}{dt} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial \Theta},$$

と解析しやすい系に移ることができる. 指数関数でくりこみ変数を書けば以下である.

$$A = A_1 + iA_2 = \sqrt{2I(0)} \exp \left(-i \left(8\alpha I(0) + 24\beta I(0)^2 \right) t - i\theta(0) + i\pi/2 \right).$$

解の具体的表示により, シンプレクティック性保存のくりこみマップは時間差分間隔 ε を用いて,

$$A^{n+1} = A^n \exp \left[i\varepsilon \left\{ \frac{-3J|A^n|^2}{\sin \theta} + \varepsilon J^2 |A^n|^4 \left(-\frac{9 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} - \frac{3}{\sin \theta (\cos 3\theta - \cos \theta)} \right) \right\} \right]. \quad (24)$$

ここで $\sqrt{2I(t)} = |A(t)| = \text{const.}$ の関係を用いた. この表式は発見論的ではあるが, より簡便な方法である“指数化法”により求めることができる [GN01JPSJ]. 更に (24) の解が容易に求められるので, 回転数等の解析的表式が求められる [GN01JPSJ].

3.2 共鳴島構造を生じる場合

シンプレクティックマップ (13) において, $\cos \theta = \cos 3\theta$ に近いパラメターをとる場合について考察する. θ を $\theta = \pi/2 + \varepsilon\theta^{(1)} + \varepsilon^2\theta^{(2)} + \dots$, のように展開する. すると (13) は次の形の方程式になる.

$$L_{\pi/2}x^n = \varepsilon \left(2J(x^n)^3 - 2\theta^{(1)}x^n \right) - 2\varepsilon^2\theta^{(2)}x^n, \quad (25)$$

ここで $L_{\pi/2}x^n \equiv x^{n+1} + x^{n-1}$. 正則摂動展開により以下の方程式系を得る.

$$\begin{aligned} L_{\pi/2}x^{(0)n} &= 0, \\ L_{\pi/2}x^{(1)n} &= 2J(x^{(0)n})^3 - 2\theta^{(1)}x^{(0)n}, \\ L_{\pi/2}x^{(2)n} &= 6J(x^{(0)n})^2x^{(1)n} - 2\theta^{(1)}x^{(1)n} - 2\theta^{(2)}x^{(0)n}. \end{aligned}$$

その解は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} x^{(0)n} &= Ai^n + \text{c.c.} \\ x^{(1)n} &= (-i)i^n n \left[J(A^{*3} + 3|A|^2A) - \theta^{(1)}A \right] + \text{c.c.} \\ x^{(2)n} &= i^n n^2 \left[\frac{3}{2}J^2 \left(-2|A|^4A + |A|^2A^{*3} + A^5 \right) \right. \\ &\quad \left. + J\theta^{(1)} \left(3|A|^2A - A^{*3} \right) - \frac{\theta^{(1)2}}{2}A \right] + i^n ni\theta^{(2)}A + \text{c.c.} \end{aligned}$$

永年項を拾い, くりこみ変換を定義する.

$$\begin{aligned} A^n &\equiv A + \varepsilon(-i)n \left\{ J(A^{*3} + 3|A|^2A) - \theta^{(1)}A \right\} \\ &\quad + \varepsilon^2 n^2 \left\{ \frac{3}{2}J^2 \left(-2|A|^4A + |A|^2A^{*3} + A^5 \right) + J\theta^{(1)} \left(3|A|^2A - A^{*3} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\theta^{(1)2}}{2}A \right\} + \varepsilon^2 ni\theta^{(2)}A + \text{c.c.} \end{aligned}$$

くりこみ逆変換をくりこみ変換の定義により求めると,

$$A = A^n + \varepsilon in \left\{ J \left((A^{*n})^3 + 3|A^n|^2A^n \right) - \theta^{(1)}A^n \right\}.$$

以上より単純くりこみマップが以下のように求まる.

$$A_1^{n+1} = A_1^n + \varepsilon \left(4J(A_2^n)^3 - \theta^{(1)}A_2^n \right) + \varepsilon^2 \left\{ -24J^2(A_1^n)^3(A_2^n)^2 + 2J\theta^{(1)} \left((A_1^n)^3 + 3A_1^n(A_2^n)^2 \right) - \frac{\theta^{(1)2}}{2}A_1^n - \theta^{(2)}A_2^n \right\}, \quad (26)$$

$$A_2^{n+1} = A_2^n + \varepsilon \left(-4J(A_1^n)^3 + \theta^{(1)}A_1^n \right) + \varepsilon^2 \left\{ -24J^2(A_1^n)^2(A_2^n)^3 + 2J\theta^{(1)} \left((A_1^n)^3 + 3(A_1^n)^2A_2^n \right) - \frac{\theta^{(1)2}}{2}A_2^n - \theta^{(2)}A_1^n \right\}. \quad (27)$$

ここで実数に値をとる変数 A_1^n, A_2^n ($A^n = A_1^n + iA_2^n$) により方程式を書き換え, 極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとることにより $H^{(1)}$ が求まる.

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= 4JA_2^3 - \theta^{(1)}A_2 = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial A_2}, \\ \frac{dA_2}{dt} &= -4JA_1^3 + \theta^{(1)}A_1 = -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial A_1}, \\ H^{(1)}(A_1, A_2) &= (JA_1^4 - \theta^{(1)}A_1^2/2) + (JA_2^4 - \theta^{(1)}A_2^2/2). \end{aligned}$$

この段階で,

$$\begin{aligned} &A(t) + \varepsilon \mathcal{L}_H A(t) + \frac{\varepsilon^2 \mathcal{L}_H^2}{2!} A(t) \\ &= A(t) + \varepsilon \{A(t), H^{(1)}\} + \varepsilon^2 \left(\{A(t), H^{(2)}\} + \frac{1}{2!} \{ \{A(t), H^{(1)}\}, H^{(1)} \} \right), \end{aligned}$$

が計算できるので, $H^{(2)}$ が単純くりこみマップ (26)-(27) との比較により決定され, 結局ハミルトニアンは以下のようなる.

$$H = H^{(1)} + \varepsilon H^{(2)} = J(A_1^4 + A_2^4) - \frac{\theta^{(1)} + \varepsilon\theta^{(2)}}{2}(A_1^2 + A_2^2).$$

共鳴島構造を生じない場合と異なるのは以下の点である, この系も 1 自由度ハミルトン系であるので, 可積分であるが, 解の具体的表示からの離散化は困難である. 従って今の場合には, ハミルトンフローを数値的に積分するアルゴリズムとして知られるシンプレクティック性を保存するように設計された“シンプレクティック積分法” [Yos93] を用いることにより離散化を行う事を考える. 例えば, 得られたハミルトニアン H を,

$$H = H_1 + H_2 = \left(JA_1^4 - \frac{\theta'^{(1)}}{2}A_1^2 \right) + \left(JA_2^4 - \frac{\theta'^{(1)}}{2}A_2^2 \right), \quad \theta'^{(1)} \equiv \theta^{(1)} + \varepsilon\theta^{(2)}.$$

のように分解し, シンプレクティック積分法

$$e^{\varepsilon D_H} = \exp\left(\varepsilon \frac{D_{H_1}}{2}\right) \exp(\varepsilon D_{H_2}) \exp\left(\varepsilon \frac{D_{H_1}}{2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

により差分化を行うものとする. そのために以下を準備する. $\tau \in R$ をパラメーターとして, H_1 単独で以下のフローを生成する.

$$e^{\tau D_{H_1}} : A_1(t + \tau) = A_1(t), \quad A_2(t + \tau) = A_2(t) + \left(-4JA_1^3(t) + \theta^{(1)}A_1(t) \right) \tau.$$

同様に H_2 単独では,

$$e^{\tau D_{H_2}} : A_1(t + \tau) = A_1(t) + \left(4JA_2^3(t) - \theta^{(1)}A_2(t) \right) \tau, \quad A_2(t + \tau) = A_2(t),$$

なる関係式を与える.

これによりシンプレクティック積分法に従い合成写像を構成すると, 最終的に以下のシンプレクティック性保存くりこみマップを得る.

$$A_1^{n+1} = A_1^n + \varepsilon \left[4J \left\{ A_2^n + \frac{\varepsilon}{2} (-4JA_1^{n3} + \theta^{(1)}A_1^n) \right\}^3 - \theta^{(1)} \left\{ A_2^n + \frac{\varepsilon}{2} (-4JA_1^{n3} + \theta^{(1)}A_1^n) \right\} \right], \quad (28)$$

$$A_2^{n+1} = A_2^n + \frac{\varepsilon}{2} \left(-4JA_1^{n3} + \theta^{(1)}A_1^n \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(-4JA_1^{n+13} + \theta^{(1)}A_1^{n+1} \right). \quad (29)$$

ここで差分化の際に生じる不定性の時間ステップは一般論により ε に選んだ.

3.3 シンプレクティック性保存くりこみ法の正当性の数値的検証

この小節では我々が提唱するシンプレクティック性保存くりこみ法の正しさを数値的に確かめる. まず, 共鳴島構造が相空間内に現れない場合について調べる (図 2). シンプレクティック性を保存するくりこみマップは, その相構造において元のマップとの対応が良く, 正準性回復の操作は重要である事が確認される.

次に共鳴島構造が相空間に現れる場合について調べる (図 3). 共鳴島構造を無視した場合におけるシンプレクティック性保存くりこみによる簡約結果を, 共鳴島構造を有する系に適用すると数値的にも正しくないことがわかる.

ここまで考察してきた例題は 2 次元の相空間を持つ系であった. 我々の方法は高次元系に対しても何ら問題は生じない. 簡約系を得るための手続きは 2 次元系の場合と全く同じである [GN04].

なお, 共鳴島構造をなす双曲点から延びる不安定多様体の構成も興味ある話題である. この節での手法を用いれば, 近似的にそれら双曲型不動点の位置が確定できる. その1つの双曲点からの不安定多様体の解析的構成は例えば, 論文 [GN01Prog] の手法により構成可能である [Got02].

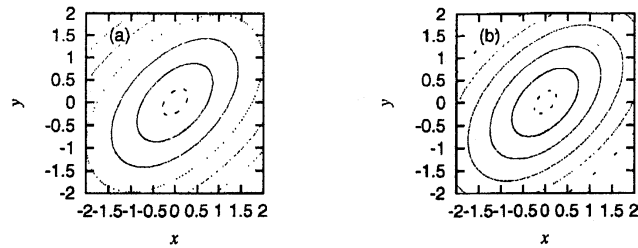


図 2: Phase portraits of the 2-dimensional symplectic map model when any big resonant islands does not appear, with the parameters are $\varepsilon = 0.01, a = 1.0, J = 1.0$: (a) the original map [Eq. (13)], (b) the Liouville operator approach to the RG method [Eq.(24) up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$, x, y are reconstructed.].

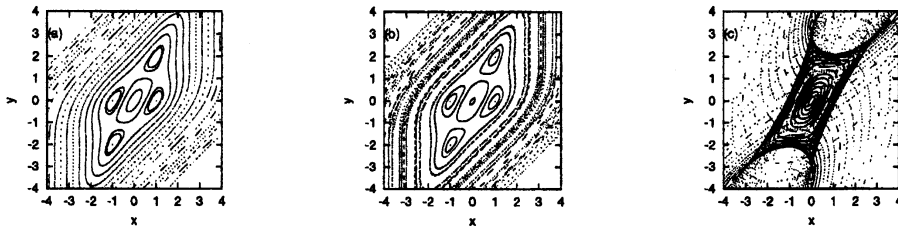


図 3: Phase portraits of the 2-dimensional symplectic map model when a resonant island appears, with the parameters are $\varepsilon = 0.01, J = 1.0$, and $\theta^{(1)} = 1.0$: (a) the original map [Eq. (25)], (b) the Liouville operator approach to the RG method [Eq. (28)–(29) up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$, x, y are reconstructed.], (c) the exponentiated RG method [Eq.(24) up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$, x, y are reconstructed.].

4 共鳴島構造を形成する周期点の解析

本節では 2 次元シンプレクティックマップにおける共鳴島を形成する周期点達の安定性 (すなわち 楕円的であるか, 双曲的であるか) が我々のくりこみ法を用いて予言可能であることを丸尾らの論文 [MGN04] に沿って示す.

本節で用いる数理的手法は 3 節で解説した手法が基本となる. くりこみ変数 A^n と, もともとの力学変数 x^n とが $x^n = A^n \exp(i\theta n) + c.c.$ と関連付けられているとする. ここで θ はある有理数の 2π 倍である. 小節 3.2 の例では $\theta = \pi/2$ となっている. このような設定のもと, 我々の安定性解析は以下の観察に基づく.

- くりこみ変数 A^n がくりこみ力学系の相空間で不動点であるならば, もともとの変数 x^n はもともとの相空間で周期解をなす.
- くりこみ方程式の固定点解析は周期解の安定性解析に他ならない. すなわち, 注目する共鳴島を形成する周期点の安定性解析が可能となる.

例えば小節 3.2 の例を考える。 A^n がくりこみ力学系での不動点ならば、その座標を A_f と書くことにする。この時、もともとの変数 x^n の時間発展は $x^n = A_f \exp(i\pi n/2) + \text{c.c.}$ であるからもとの与えられたマップではこの時、4 周期点となる事がわかる。従ってこのような考察から、与えられた系の周期解の (i) 位置を探す作業と (ii) 安定性解析の作業が

- (i) くりこみ方程式の不動点を探すこと、すなわち代数方程式を解くこと。
- (ii) くりこみ方程式の不動点の線形安定性解析。

へと置き換わったことになる。

以下具体的に以下のシンプレクティックマップを取り扱う事にする。

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= x^n + y^{n+1}, \\y^{n+1} &= y^n + a_1 x^n + a_2 (x^n)^2,\end{aligned}$$

ここで a_1 及び、 a_2 は定数である。 y^n 変数の消去により、

$$x^{n+1} - 2x^n \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) + x^{n-1} = a_2 (x^n)^2,$$

を得る。相空間原点周りでの解は原点周りの線型化により $A \in \mathbb{C}$ を定数として $x^n = A \exp(i\omega n) + \text{c.c.}$, ($\cos \omega \equiv 1 - a_1/2$) であることが分かる。パラメータ a_1 を選ぶことにより、相空間原点での振動数を $2\pi/3$ 近くにおく、即ち、 $\omega = 2\pi/3 + \varepsilon\delta$, (但し、 δ は $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ の定数) とおく。このようにパラメータ a_1 を定めると、 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ まで打ち切った方程式は以下になる

$$L_{2\pi/3} x^n \equiv x^{n+1} + x^n + x^{n-1} = \left(-\varepsilon\delta\sqrt{3} + \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2}\right) x^n + a_2 (x^n)^2.$$

ここで原点近傍の解析を行なうので $x^n \mapsto \varepsilon x^n$ と置くと、

$$L_{2\pi/3} x^n \equiv x^{n+1} + x^n + x^{n-1} = \left(-\varepsilon\delta\sqrt{3} + \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2}\right) x^n + \varepsilon a_2 (x^n)^2, \quad (30)$$

を得る。もしくは $x^n \mapsto \varepsilon x^n$ と置き換えることなしに、始めから a_2 の係数が小さい ($a_2 \approx \varepsilon$) 問題設定としてもよい。正則摂動展開 $x^n = x^{(0)n} + \varepsilon x^{(1)n} + \dots$ の解は以下である。

$$x^n = A e^{2i\pi n/3} + \varepsilon \left[\left(\delta A - \frac{a_2}{\sqrt{3}} (A^*)^2 \right) n e^{2i\pi n/3} + \frac{a_2}{3} |A|^2 \right] + \text{c.c.} + \dots$$

ここで $\exp(2i\pi n/3)$ に比例する項を拾い、永年項を取り除くようにくりこみ変換を定義し、それにより単純くりこみマップを構成すると

$$A^n \equiv A + \varepsilon i \left(\delta A - \frac{a_2}{\sqrt{3}} (A^*)^2 \right), \quad A^{n+1} = A^n + \varepsilon i \left(\delta A^n - \frac{a_2}{\sqrt{3}} (A^{*n})^2 \right).$$

シンプレクティック性保存くりこみの一般論に従い, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で“時間”連続近似 ($A^n \rightarrow A(t)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$) での運動方程式が得られる

$$\frac{dA}{dt} = i \left(\delta A - \frac{a_2}{\sqrt{3}} (A^*)^2 \right) = \mathcal{L}_H A = \{A, H\} = \frac{\partial H}{\partial A^*}, \quad (31)$$

$$\frac{dA^*}{dt} = -i \left(\delta A^* - \frac{a_2}{\sqrt{3}} A^2 \right) = \mathcal{L}_H A^* = \{A^*, H\} = -\frac{\partial H}{\partial A}, \quad (32)$$

$$H(A, A^*) = i \left(\delta |A|^2 - \frac{a_2}{3\sqrt{3}} (A^{*3} + A^3) \right).$$

この方程式系の不動点を探すために不動点 $A_f \equiv A^n, (\forall n \in \mathbb{Z})$ を $A_f = r_f \exp(i\theta_f)$ と置くと (31) 及び (32) の不動点が満たすべき方程式は

$$\delta A_f - \frac{a_2}{\sqrt{3}} A_f^{*2} = \left(\delta - \frac{a_2 r_f}{\sqrt{3}} \right) r_f e^{i\theta_f} = 0,$$

$$\delta A_f^* - \frac{a_2}{\sqrt{3}} A_f^2 = \left(\delta - \frac{a_2 r_f}{\sqrt{3}} \right) r_f e^{i\theta_f} = 0.$$

今 (x, y) 相空間原点以外の周期点を探すものとする $r_f \neq 0$, この条件の基でくりこみ系の不動点, 即ち 与えられた問題 (30) での周期解は $\delta/a_2 > 0$ に対しては

$$\theta_f = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \quad r_f = \frac{\sqrt{3}}{a_2} \delta.$$

$\delta/a_2 < 0$ に対しては

$$\theta_f = \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \quad r_f = -\frac{\sqrt{3}}{a_2} \delta,$$

と決定される.

今考慮した正則摂動の次数は $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ であるが, もちろん高次の計算も原理的には可能である. 高次の摂動計算により不動点を解析的に求めようとする, 代数方程式を解くことが困難になる. 同様な困難は高次元のマップに対して不動点を解析的に求める問題で現れる.

もともとの与えられた系とシンプレクティック性保存くりこみ法で得られたマップの数値計算による比較を 図 4 に示す [MGN04].

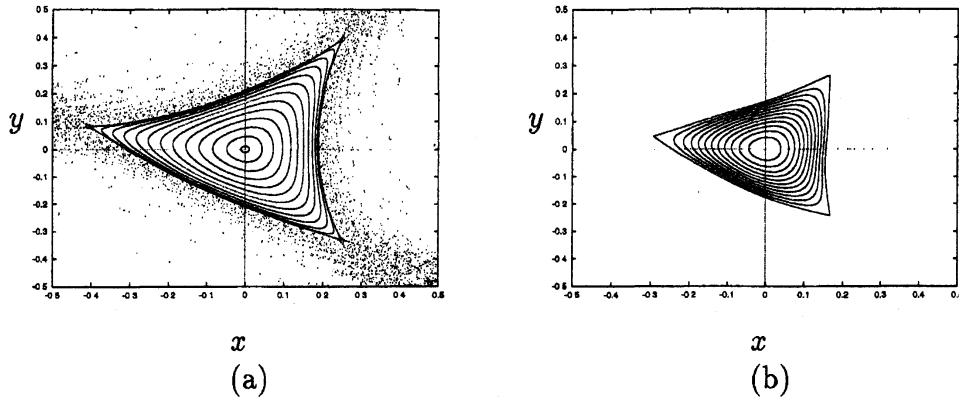


図 4. (a)Phase portrait near the $2\pi/3$ resonance derived through a numerical calculation of the Hénon map. (b)Phase portrait near the $2\pi/3$ resonance obtained from the RG map.

5 スタンダードマップの共鳴島構造

スタンダードマップとは、以下のシンプレクティックマップの事である (図 1)

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}, \quad y_{n+1} = y_n + K \sin(x_n) \pmod{2\pi}. \quad (33)$$

ここで K はパラメータで $K = 0$ の時、系は可積分である。文字通り 2次元シンプレクティックマップで標準的に研究される系である [LL]. 3節で扱った問題と異なるのは非線型性が多項式ではなく級数、つまりこの例では \sin 関数、である事が挙げられる。スタンダードマップ (33) を我々のくりこみ法で取り扱う際、3節での数理的手法と若干異なるので、節を分けて考察する。数理的手法が異なるのは非摂動解 ($K = 0$ の解) が $\exp(i\theta n)$ の様に書けていない点に起因する。また、この問題を特異摂動法の 1つである多重スケール法で扱った論文 [BR83] と同様の結果を与える事を示す。但し、論文 [BR83] で取り扱っているのは (33) 式において、 $K \rightarrow -K$ とした場合である事を付記しておく。

共鳴島構造をくりこみ法で抽出を試みる [Got04]. (33) 式から y 変数を消去すると、

$$L_0 x^n \equiv x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1} = K \sin x^n.$$

$K = 0$ が可積分であるので、 K が小さい時に生じる共鳴島構造を抽出する事を考える。我々のくりこみ法の一般論に従い、正則摂動展開 $x^n = x^{(0)n} + Kx^{(1)n} + K^2x^{(2)n} + \dots$ を行なう。すると以下の正則摂動問題が得られる

$$L_0 x^{(0)n} = 0, \quad L_0 x^{(1)n} \sin x^{(0)n}, \quad L_0 x^{(2)n} = x^{(1)n} \cos x^{(0)n}.$$

非摂動解 $x^{(0)n}$ は a と P を積分定数として

$$x^{(0)n} = a + nP,$$

で与えられる. P は $y^{(0)n+1} \equiv x^{(0)n+1} - x^{(0)n} = P$ なので y (:アクション変数) の $K = 0$ での値と解釈できる. $x^{(1)n}$, 及び $x^{(2)n}$ は

$$x^{(1)n} = \begin{cases} -\frac{\sin(a + nP)}{4 \sin^2 \frac{P}{2}}, & (P \neq 0) \\ \frac{\sin(a)}{2} n^2, & (P = 0) \end{cases}$$

$$x^{(2)n} = \begin{cases} \frac{\sin(2(a + nP))}{32 \sin^2 P \sin^2 \frac{P}{2}}, & (P \neq 0, P \neq \pi) \\ -\frac{\sin(2a)}{16} n^2, & (P = \pi) \\ \frac{\sin(a)}{24} (n^4 - n^2). & (P = 0) \end{cases}$$

以後 $P = \pi$ に生じる共鳴を考察する

$$x^n = a + \pi n + K \frac{-\sin(a + n\pi)}{4} + K^2 \frac{-\sin(2a)}{16} n^2 + \dots$$

正則摂動解から共鳴項を拾い, くりこみ変換を以下の様に定義する

$$a^n \equiv a + K^2 \frac{-\sin(2a)}{16} n^2. \quad (34)$$

我々のくりこみ方程式とはくりこみ変数 a^n の満たす方程式に他ならない. a^n の自励系を得るために L_0 を左から a^n の定義式 (34) へ作用させると, $L_0 a^n = -K^2 \sin(2a)/8$, を得て, $a = a^n + \mathcal{O}(K)$ の関係を用いることにより, くりこみ方程式を得る

$$L_0 a^n = -K^2 \frac{\sin(2a^n)}{8}. \quad (35)$$

ここでくりこみ方程式を得る際, 前節までの方法同様に1階差分をとると, くりこみ方程式が非自励系になってしまう. L_0 を左から a^n の定義式 (34) へ作用させたのは, くりこみ方程式が自励系になるようにしたからである. この結果 (35) は論文 [BR83] と同様である. なお, くりこみ変数 a^n ともともとの変数 x^n の関係は

$$x^n = a^n + \pi n + K \frac{-\sin(a^n + n\pi)}{4}. \quad (36)$$

y^n と a^n に関しては

$$y^n = x^n - x^{n-1} = (a^n - a^{n-1}) + \pi - K \frac{\sin(a^n + \pi n)}{4}. \quad (37)$$

くりこみマップ (35) は既にシンプレクティックである. つまり単純くりこみマップにおけるシンプレクティック性の回復手順が不要である. 実際, シンプレクティック性を有していることは (35) 式を

$$a^{n+1} = a^n + Kb^n, \quad b^{n+1} = b^n - K \frac{\sin(2a^n)}{8}, \quad (38)$$

と分割するとシンプレクティックであることが分かる. そのくりこみ系の不動点は

$$\begin{aligned} a^* &= 0, \pi, \quad b^* = 0, && \text{(elliptic)} \\ a^* &= \pi/2, 3\pi/2, \quad b^* = 0. && \text{(hyperbolic)} \end{aligned}$$

これらのくりこみマップの不動点が共鳴島構造の骨組みをなす. 数値計算によるもとの系とくりこみマップの比較を 図5 に示す.

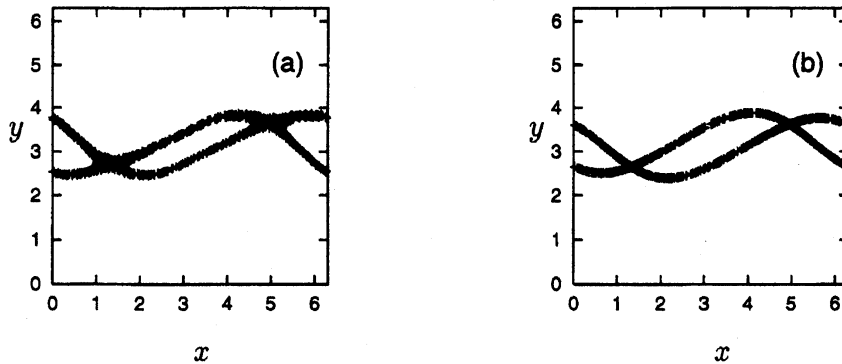


図 5. Perturbation parameter K is 0.97 for both figures, the number of the initial conditions is 1 for both cases. (a) The phase portrait near $\theta = \pi$ obtained by iterating the standard map (33). (b) The reconstructed phase portrait near $\theta = \pi$ using the relations (36),(37) and (38).

数値計算によるくりこみ法ともとの系の比較も定性的に正しいものとなっていると言って良いだろう. 今回の例では, $P = \pi$ に共鳴が生じることが $O(K^2)$ における摂動計算から示された. この節での解析はその $P = \pi$ 周りで生じる共鳴島構造に絞って解析を行なったが, 他の共鳴島構造の解析も正則摂動の高次解を構成することにより原理的には可能であると筆者は考えている.

6 結語

我々はハミルトン力学系一般において成立する, リウビル演算子の満たす関係式を介してのシンプレクティック性保存くりこみ法を提案した. この方法により, 近可積分シンプレクティックマップにおいて永年項以外を無視した簡約シンプレクティックマップが欲しい ε の次数まで系統的に構成できるようになった. 更に, 今までの特異摂動法では到達が

困難な共鳴島構造を有するパラメータ領域においても、共鳴島構造が無い場合と全く同様な手続きで簡約系を得ることができる。今回提案した方法の更なる特色は、時間ステップ幅が与えられた問題に入っていないだけでも良いことがあげられる。つまり、差分幅が $O(\varepsilon^0)$ であっても何ら我々の方法に困難を与えない。

更にその手法を用いて、共鳴島構造を解析する手法を具体的に構成し、数値的にも理論が定性的に正しい結果を与えている事が確認された。今回の共鳴島構造をなす双曲型不動点と楕円型不動点の位置の予言例は、相空間の次元が 2 である場合に限られていた。我々の問題意識は高次元の場合であるので、今後は、今回開発した手法を高次元の場合へと適用し、高次元空間内での共鳴島構造の解析例を構成したい。

Acknowledgements

The author (S.G.) has been supported by a JSPS Fellowship for Young Scientists. The author wishes to thank K. Nozaki and T. Maruo, Nagoya University, for the collaboration, and wishes to thank G. Rowlands, University of Warwick, for sending the author a paper written by him and D.S. Broomhead [BR83].

References

- AA : for example, V. I. Arnold and A. Avez, “Ergodic Problems in classical Mechanics”, *Benjamin-Cummings Reading, Massachusetts*. : 吉田耕作 訳, “古典力学のエルゴード問題”, 吉岡書店.
- BR83 : D.S. Broomhead and G. Rowlands, “On the analytic treatment of non-integrable difference equation”, *J. Phys.* **A16** (1983), 9—24.
- CGO96 : L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono, “Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory”, *Phys. Rev.* **E54** (1996), 376–394.
- EFK00 : S-I. Ei, K. Fujii and T. Kunihiro, “Renormalization-Group Method for Reduction of Evolution Equations: Invariant Manifolds and Envelopes”, *Annals of Physics* **280** (2000), 236–298.
- Fra97 : M. Frasca, “Renormalization group methods in quantum optics”, *Phys Rev.* **A56** (1997), 1548–1552.
- GMN99 : S. Goto, Y. Masutomi, and K. Nozaki, “Lie-Group Approach to Perturbative Renormalization Group Method”, *Prog. Theor. Phys.* **102** (1999), 471–497.
- GN01Prog : S. Goto and K. Nozaki, “Asymptotic Expansions of Unstable and Stable Manifolds in Time-Discrete Systems”, *Prog. Theor. Phys.* **105** (2001), 99–107.
- GN01JPSJ : S. Goto and K. Nozaki, “Regularized Renormalization Group Reduction of Symplectic Maps”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** (2001), 49–54.
- GNY02 : S. Goto, K. Nozaki, and H. Yamada, “Random Wandering around Homoclinic-Like Manifolds in a Symplectic Map Chain”, *Prog. Theor. Phys.* **107** (2002), 637–654.

- GN04 : S. Goto, and K. Nozaki, “*Liouville operator approach to symplecticity-preserving renormalization group method*”, *Physica D* **194** (2004), 175–186.: 後藤振一郎, “*Liouville Operator Approach to Symplecticity-Preserving RG Method*”, *数理解析研究所講究録* vol. 1386, (2004), 102–116 (In Japanese).
- Got02 : 後藤振一郎, “*ハミルトン系に対するくりこみの方法と運動の簡約*”, *数理解析研究所講究録* vol. 1282, (2002), 121–141.
- Got04 : S. Goto, in progress.
- KM98 : T. Kunihiro, J. Matsukidaira, “*Dynamical reduction of discrete systems based on the renormalization-group method*”, *Phys. Rev.* **E57** (1998), 4817–4820.
- Kun98 : T. Kunihiro, “*Renormalization-group resummation of a divergent series of the perturbative wave functions of the quantum anharmonic oscillator*”, *Phys. Rev.* **D57** (1998), 2035–2039.
- LL : for example, A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman, “*Regular and Chaotic Dynamics (second edition)*”, *Springer, Berlin* (1991).
- MGN04 : T. Maruo, S. Goto and K. Nozaki, “*Renormalization Analysis of Resonance Structure in a 2-D Symplectic Map*”, *Prog. Theor. Phys.* **111** (2004), 463–474.
- Nay : for example, A.H. Nayfer, “*Introduction to Perturbation Techniques*”, *Weiley, New York* (1981).
- Oon00 : Y. Oono, “*RENORMALIZATION AND ASYMPTOTICS*”, *Int. J. Mod. Phys.* **B14** (2000), 1327–1361. : 大野克嗣, “*くりこみ, 現象論, そして漸近解析 (別冊・数理科学『20世紀の物理学』)*”, *サイエンス社* (1998).
- Sai : 斎藤信彦, “*カオスの物理 (物理学最前線 30)*”, *共立出版* (1992).
- Tan02 : 谷川清隆, “*天体力学とハミルトン力学系*”, *数理解析研究所講究録* vol. 1282, (2002), 4–16 (In Japanese).
- TD03 : S. I. Tzenov and R.C. Davidson, “*Renormalization group reduction of the Hénon map and application to the transverse betatron motion in cyclic accelerators*”, *New Journal of Physics* **5** (2003), 67.
- Tod00 : 戸田幹人, “*化学反応の動力学とカオス*”, *物性研究* **74-6** (2000) 597–643. : M. Toda, “*Dynamics of Chemical Reactions and Chaos*”, *Adv. Chem. Phys.* **123** (2002) 153–198.
- Tze01 : S.I. Tzenov, “*Renormalization Group Approach to the Beam-Beam Interaction in Circular Colliders*”, <http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0106101>, (2001).
- YN98 : Y.Y. Yamaguchi and Y. Nambu, “*Canonical structure of renormalization group equation and separability of Hamiltonian systems*”, *Prog. Theo. Phys.* **100** (1998), 199–204.
- Yos93 : H. Yoshida, “*Recent progress in the theory and application of symplectic integrators*”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **56** (1993), 27–43. : 吉田春夫, “*シンプレクティック数値解法*”, *数理科学*, 384 (1995) JUNE, pp37 – 46.