

# 恒常性自己調節モデルに対するパターン形成

関西学院大学大学院・理工学研究科 陰山真矢

Maya Kageyama

Graduate School of Science and Technology,

Kwansei Gakuin University

## 1 はじめに

1972年, J.E. Lovelock は地球における恒常性自己調節システムの存在を提唱した. これは, 構成要素の相互作用によってシステム全体を安定化に向けて自己調節するような機能をもつシステムである. これを理想的に単純化したものが Watson-Lovelock[5] によるデイズーワールドである.

デイズーワールドは地球のような惑星で, 太陽のような恒星の周りを公転している. この惑星上には黒色と白色の2種類のデイズーしか存在しておらず, これらは地球の植物と同様に互いの生育域を争っている. デイズーワールドの大域温度は恒星からの放射熱と地表面の光反射率(アルベド)によってのみ決まる. つまり, 地表面の色が濃いほど恒星からの光を吸収して温度が上昇しやすく, 色が薄いほど温度は上昇しにくい.

Watson と Lovelock による最初のデイズーワールドの方程式は, 空間的な広がり無し0次元のモデルであった. これは非常に単純なモデルであったにもかかわらず, 2種類のデイズーが生育域を争いながら, 惑星の大域的な温度を自らの成長に最適な値へと自律的に調節していくことを示した. これについては, その後の多くの関連研究で空間の拡張が行われており, よく知られているもので, von Bloh ら [4] による2次元セルオートマトンモデルや, Adams-Carr[1], Adams-Carr-Lenton-White[2] による1次元モデルなどがある. 特に [1, 2] は, 空間次元の拡張を行うことによって, 0次元モデルにおける白と黒のデイズーの共存の代わりに, 2種類のデイズーが同じ点上で共存することのない棲み分けパターンが現れることを明らかにした. 本研究では, この棲み分けパターン形成についてより詳細に調べるために, [1, 2] の1次元デイズーワールドモデルを2次元長方形上へ拡張する. 本稿では, この2次元モデルに対して定数定常解の安定性について調べ, 一様状態の不安定化が起こる条件について明らかにする(時間大域的一意解の構成および指数アトラクタの存在については Kageyama-Yagi[3] を参照せよ). さらに, その結果を受けて, 実際に数値シミュレーションによって得られたパターン解について紹介する.

## 2 2次元恒常性自己調節モデル

2次元長方形領域  $\Omega$  上で以下の反応拡散系を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + [(1-u-v)\Phi(u,v,w) - f]u, & (x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + [(1-u-v)\Psi(u,v,w) - f]v, & (x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + [1-g(u,v)]R - \sigma w^4, & (x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty). \end{cases} \quad (1)$$

未知変数  $u = u(x, y, t)$ ,  $v = v(x, y, t)$  は, 場所  $(x, y) \in \Omega$ , 時刻  $t$  での白と黒のデージーの被覆率をそれぞれ示し,  $w = w(x, y, t)$  は場所  $(x, y) \in \Omega$ , 時刻  $t$  での地表面温度を示している.  $d$  はデージーの拡散率,  $D$  は熱拡散率を表す.  $\Phi(u, v, w), \Psi(u, v, w)$  はそれぞれ白と黒のデージーの成長率を表し, デージーの成長に最適な温度  $\bar{w}$  で最大値 1 をとるような放物型の正のカットオフ関数

$$\Phi(u, v, w) = \left[1 - \delta(\bar{w} - T_w)^2\right]_+, \quad \Psi(u, v, w) = \left[1 - \delta(\bar{w} - T_b)^2\right]_+,$$

で与えられる. ここで,  $T_w, T_b$  は白と黒のデージーの局所温度であり,

$$T_w = w + q[g(u, v) - a_w], \quad T_b = w + q[g(u, v) - a_b],$$

とする.  $g(u, v)$  は地表面の平均アルベドを表し,  $u, v$  の関数として各点で次のように与えられる.

$$g(u, v) = a_w u + a_b v + a_g(1 - u - v).$$

ここで,  $a_w, a_b, a_g$  はそれぞれ白いデージー, 黒いデージー, 裸地のアルベドであり,  $1 > a_w > a_g > a_b > 0$  とする.  $\gamma$  はデージーの枯死率,  $q, \delta$  は適当な正定数である. 温度  $w$  についての方程式は Stefan-Boltzmann の法則とエネルギー平衡の方程式から導き出され,  $R$  は太陽から流入するエネルギー量,  $\sigma$  は Stefan-Boltzmann 定数を表す. また, 境界条件は  $x$  方向に周期境界条件,  $y$  方向に Neumann 境界条件を課す.

### 3 定数定常解の不安定化条件

$u, v, w$  に対して以下の連立方程式を考える.

$$[(1 - u - v)\Phi(u, v, w) - f]u = 0, \quad (2)$$

$$[(1 - u - v)\Psi(u, v, w) - f]v = 0, \quad (3)$$

$$[1 - g(u, v)]R - \sigma w^4 = 0. \quad (4)$$

各パラメータの値は [5] と同様に,

$$\begin{aligned} a_b &= 0.25, & a_g &= 0.50, & a_w &= 0.75, \\ \delta &= 0.003265, & f &= 0.3, & \bar{w} &= 295.5, & q &= 20, & \sigma &= 5.67 \times 10^{-8}, \end{aligned} \quad (5)$$

で与え,  $R$  は制御パラメータとする. このとき, 連立方程式 (2)-(4) を解くと,  $R \geq 4^4/3^3 q \sigma (\bar{w} - q/2)^3$  の場合に正の定数定常解  $U_* = (u_*, v_*, w_*)$  が存在することが分かる. さらに, モデリング上の仮定  $u_* \geq 0, v_* \geq 0, u_* + v_* \leq 1$  を満たすような正の定数定常解  $U_*$  はただ一つに絞られることが確認できる.

さらに, このような正の定数定常解  $U_*$  に対して, 以下の 2 つの条件が満たされていれば, その解は不安定となることが計算によって確認できる.

- 温度の拡散係数  $D$  に対して, デージーの拡散係数  $d$  が十分小さい
- デージーの種間競争が種内競争よりも強い

反応拡散系において, 拡散率の違いが空間的に一様な状態の不安定化を生み, 空間的なパターンが自発的に形成されることが知られている. これは, 拡散誘導不安定性 (diffusion driven instability) と呼ばれている. この結果は, 恒常性自己調節モデルにおいても拡散誘導不安定性のようなものが現れることを示している.

## 4 棲み分けパターン

本節では、2次元長方形領域  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  における恒常性自己調節モデル (1) の数値計算結果の一部を紹介する。

各パラメータは (5) で与える。ただし、デイジーの拡散率を  $d = 10^{-5}$ 、温度の拡散率を  $D = 1.0$  とし、 $R$  は制御パラメータとして扱う。ここでパラメータ  $R$  は、太陽フラックス  $S = 917$  と太陽光度  $L$  を用いて、 $R = 917L$  と書くことができ、以降では  $L$  を変動させる。また、初期関数は各  $L$  に対する正の定数定常解に微小な擾乱を与えたものとしている。空間の刻み幅を  $\Delta x = \Delta y = 256$ 、時刻の刻み幅を  $\Delta t = 0.0002$  とし、ADI 法を用いて解いた。

以下の図 1-5 はそれぞれ  $L = 0.75, 0.85, 0.95, 1.00, 1.30$  の場合における  $t = 6000$  でのデイジーの分布を示しており、いずれもほとんど定常状態となったものである。

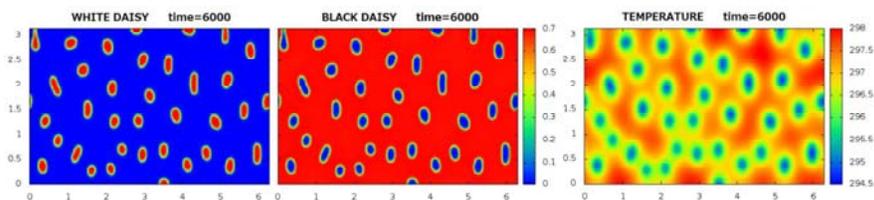


図 1:  $L = 0.75$ .

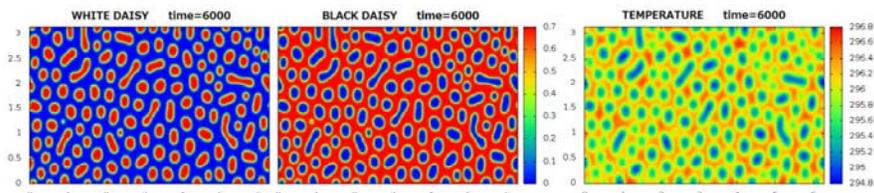


図 2:  $L = 0.85$ .

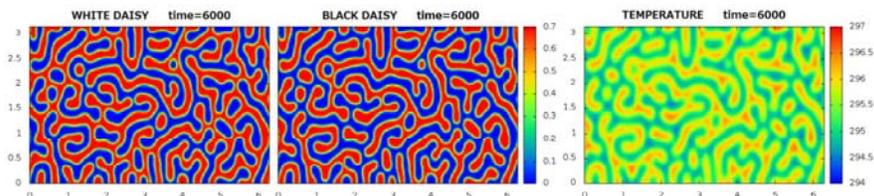


図 3:  $L = 0.95$ .

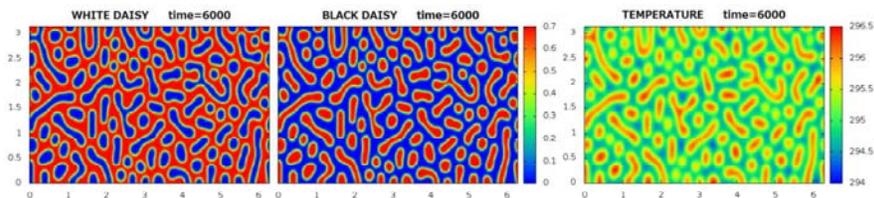


図 4:  $L = 1.00$ .

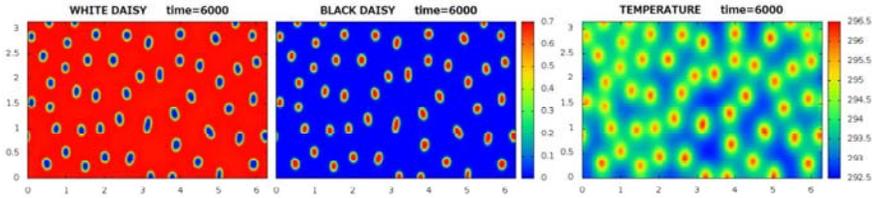
図 5:  $L = 1.30$ .

図 1-5 のすべての  $L$  において不安定化が起り、白と黒のダイジーの生存競争による棲み分けパターンが形成されている。図 1 ( $L = 0.75$ ) の場合、黒いダイジーが領域上で生息域を大きく拡げている中で、白いダイジーが点在するように生息していることが見てとれる（黒優勢の斑点パターン）。図 2 ( $L = 0.85$ ) では、図 1 と比べて白いダイジーが形成する斑点の数が増加し、さらに斑点のいくつかが連なった連鎖状のパターンが現れている（黒優勢の連鎖パターン）。図 3 ( $L = 0.95$ ) の場合になると、白と黒は迷路のようなパターンを形成している（迷路パターン）。このとき、白と黒のダイジーはほぼ均衡状態に近づいているように見え、実際に図 6 からもそのことは確認できる。この  $L = 0.95$  の場合を中心に、 $L$  の増加に伴って白と黒のパターンを反転させたような棲み分けパターンが現れる。図 4 ( $L = 1.00$ ) では、これまでとは逆に白いダイジーが優勢となる中で黒いダイジーが散在して現れるようになり、いくつかの斑点と連鎖を形成する（白優勢の連鎖パターン）。図 5 ( $L = 1.30$ ) では、白いダイジーが優勢である中で黒いダイジーが点在して育っている（白優勢の斑点パターン）。

次の図 6 は、 $0.40 \leq L \leq 1.80$  に対する空間平均温度を示している。温度  $w(x, y, t)$  の空間平均値は、

$$W(t) = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} w(x, y, t) dx dy, \quad 0 \leq t < \infty,$$

によって計算される。ただし、図 6 では  $W(t)$  を華氏から摂氏に変換している。

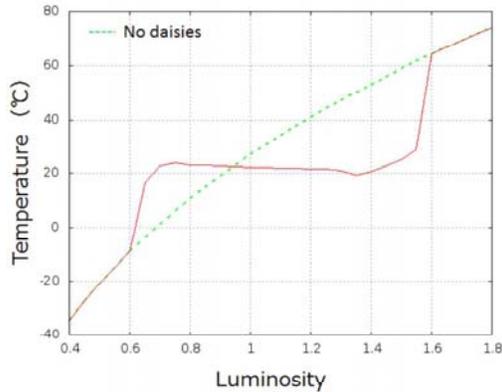
図 6: 太陽光度  $L$  に対する空間平均温度  $W(6,000)$ .  $\Delta L = 0.05$ .

図 6 より、 $0.40 \leq L \leq 0.60$  の区間では温度が低すぎるためダイジーは育つことができず、温度の調節も行われていないことが分かる。  $L = 0.65$  のときに初めて惑星上にダイジーが現れ、低温で優位に育つ黒いダイジーのみが空間一様に広がる。これ以降、ダイジーが生育可能な  $L$  の区間では、ダイジーの成長に適した温度 ( $\bar{w} = 22.5^\circ\text{C}$ ) の周辺に保たれている。  $0.75 \leq L \leq 1.35$  では、2種類のダイジーの共存が見られ、特に、

$0.75 \leq L \leq 1.30$  では図 1-5 のような棲み分けパターンが観測される。この区間内での  $W(t)$  は、 $L = 0.75$  で最大となり、 $L = 0.95$  で最適温度  $22.5^\circ\text{C}$  に最も近づき、 $L = 1.35$  で最小の値をとる。 $L = 1.40$  になると黒いデイジーは惑星上で育つことができなくなり、高温で優位に育つ白いデイジーのみが領域上に拡がる。さらに太陽光度が強まり  $L = 1.60$  になると、白いデイジーも惑星上から消え、温度は急激に上昇する。

## 参考文献

- [1] B. Adams and J. Carr, *Spatial pattern formation in a model of vegetation-climate feedback*, *Nonlinearity* **16** (2003), 1339–1357. <http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/16/4/309>.
- [2] B. Adams, J. Carr, T. M. Lenton and A. White, *One-dimensional daisyworld: spatial interactions and pattern formation*, *J. Theor. Biol.* **223** (2003), 505–513. [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193\(03\)00139-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193(03)00139-5).
- [3] M. Kageyama and A. Yagi, *Pattern formation for self-regulating homeostasis model in a rectangle*, *Sci. Math. Jpn.*, accepted for publication.
- [4] W. von Bloh, A. Block and H. J. Schellnhuber, *Self-stabilization of the biosphere under global change: a tutorial geophysiological approach*, *Tellus* **49(B)** (1997), 249–262. <http://dx.doi.org/10.3402/tellusb.v49i3.15965>.
- [5] A. J. Watson and J. E. Lovelock, *Biological homeostasis of the global environment: the parable of Daisyworld*, *Tellus* **35(B)** (1983), 284–289. <http://dx.doi.org/10.3402/tellusb.v35i4.14616>.