数理解析研究所講究録 1408 巻 2004 年 192-197

ベクトルバンドルの一般化切断の超準表現について

(On nonstandard representations of generalized sections of vector bundles)

静岡大学 工学部 明山 浩 (Hiroshi AKIYAMA)
Faculty of Engineering,
Shizuoka University

ここでは，シュワルツ超関数，ド・ラームのカレント，あるいは一般にベクトルバンドルの一般化切断 (generalized section) に対する，超準解析を用いた表現について述べる．

1. 序

ユークリッド空間におけるシュワルツ超関数については，T. Todorov ([T1], [T2]) によって，超準解析を用いた次の表現が得られている．

(1) “ノンスタンダード・デルタ関数” $\Delta(x)$ が存在して，任意の $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に対し，($^*\varphi$ を φ の超準拡大とすれば)

$$\int_{^*\mathbb{R}^n} \Delta(x)\,{}^*\varphi(x)\,{}^*dx = \varphi(0).$$

(2) シュワルツ超関数 $T \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}))'$ の超準的核関数 f_T が存在して，

$$T(\varphi) = \int_{^*\mathbb{R}^n} f_T(x)\,{}^*\varphi(x)\,{}^*dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})(= C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})).$$

注意　上の (1), (2) の等式で，等号は「限りなく近い」の意味ではなく，実際に等号である．また，上の (1) のような $\Delta(x)$ は $\Delta(x) \geq 0 \quad (x \in {}^*\mathbb{R}^n)$ をみたすようにとることはできない．

以下では，(σ-コンパクト) 多様体上で筆者がこれまでに得た結果を述べる (cf. [A1], [A3])．ただし，用いた方法は，Todorov の方法 (一般の多様体の場合には適用できない) とは多少異なる．

2. 超準解析からの準備

この節では超準解析からの若干の準備として，河合 徹氏 ([Ka]) による超準集合論 UNST を簡単に紹介する（[A2] の §2 も参考にされたい）.

UNST の言語は集合論 ZFC（ツェルメロ・フレンケルの集合論に選択公理を加えた理論）の言語に3つの定項 $\mathcal{U}, \mathcal{I}, *$ をつけ加えたものである．$a \in \mathcal{U}$ のとき a は **通常的** (usual)，$a \in \mathcal{I}$ のとき a は **内的** (internal)，$a \notin \mathcal{I}$ のとき a は **外的** (external) であるという．内的集合，外的集合をそれぞれ，内集合，外集合ともいう.

UNST の公理（ただし，飽和性は少し弱めたもの）は次のとおりである.

(1) 集合論 ZFC の公理から正則性公理を除いたものを UNST の世界に置く．正則性公理については制限された形のものを置くのであるが，以後，表立ってはとくに必要ないので省略する．$\mathcal{U}$ の世界では ZFC の公理を置く.

(2) $\mathcal{U}$ は推移的 : $a \in A \in \mathcal{U} \Rightarrow a \in \mathcal{U}$.

(3) $\mathcal{I}$ は推移的 : $a \in A \in \mathcal{I} \Rightarrow a \in \mathcal{I}$.

(4) $A \subset B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$.

(5) $* : \mathcal{U} \to \mathcal{I}$ （写像）．$a \in \mathcal{U}$ に対し $*(a) (\in \mathcal{I})$ を $^*a$ と書き，a の **超準拡大** という.

(6)（移行原理）$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が ZFC の論理式で $x_1, \ldots, x_n$ は φ の自由変項のすべてであるとき，$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{U}$ に対し

$$^{\mathcal{U}}\varphi(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow {}^{\mathcal{I}}\varphi(^*x_1, \ldots, {}^*x_n).$$

ここに $^{\mathcal{U}}\varphi$ は φ を $\mathcal{U}$ へ相対化したもの，すなわち，φ の束縛変項を $\mathcal{U}$ に制限して得られる論理式を表す [φ 中の $(\forall x)$, $(\exists x)$ を $(\forall x \in \mathcal{U})$, $(\exists x \in \mathcal{U})$ に置き換える]．同様に，$^{\mathcal{I}}\varphi$ は φ を $\mathcal{I}$ へ相対化したものである.

(7)（飽和性；以下では，次の形のもので十分）$\Lambda \in \mathcal{U}$ を添字集合とする内的な集合 $A_\alpha (\in \mathcal{I})$ の族 $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ は，それが有限交差的ならば交差的である.

UNST の公理（で飽和性は弱めたもの）は以上である．UNST は ZFC の保存拡大になっている.

いくつかの注意

(1) 上の (4) とは異なり，「$A \subset B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$」は成立しないが，このことが超準解析にとっては重要である.

(2) 移行原理より，$a, b \in \mathcal{U}$ かつ $a \neq b$ なら $^*a \neq {}^*b$ となる．一般に $A \in \mathcal{U}$ に対し，$^\sigma A := \{^*a : a \in A\}$ とおく．もし $A \in \mathcal{U}$ の各元については集合としての構造を考えないなら，A と $^\sigma A := \{^*a : a \in A\}$ とは同一視することにする．とくに複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と $^\sigma\mathbb{C} := \{^*c : c \in \mathbb{C}\}$ とは同一視される．実数全体の集合についても同様である．個々の複素数や $\mathbb{C}, \mathcal{P}(\mathbb{C})$ は $\mathcal{U}$ の元である．飽和性より $^\sigma\mathbb{C} \subsetneqq {}^*\mathbb{C}$ であることが示される．$\mathbb{C}$（$^\sigma\mathbb{C}$ と同一視）は外的な集合である.

(3) 写像はそのグラフと同一視することにより，内的であるとか，外的であるとかの定義ができる．$f: A \to B$ $(f \in \mathcal{U})$ に対し，$f: {}^*A \to {}^*B$ であり，とくに $a \in A$ に対し，${}^*f({}^*a) = {}^*(f(a))$ となる．

(4) $A \in \mathcal{U}$ に対し，${}^*(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}({}^*A) \cap \mathcal{I}$ が成り立つ．すなわち，${}^*(\mathcal{P}(A))$ は ${}^*A$ の部分集合のうち内的なものの全体である．

(5) 一般に，関係や演算については $*$ を省略することが多い．

(6) $\mathcal{U}$ での種々の"概念"が移行原理によって $\mathcal{I}$ での"$*$-概念" に写される．たとえば，${}^*\mathbb{C}$ 上の **$*$-有限次元**（**超有限次元**ともいう）の内的なベクトル空間といったものが考えられる．

(7) $m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ は正整数全体の集合）に対し集合 $A_m = \{n \in {}^*\mathbb{N} : n > m\}$ は内的であり，有限交差的だから飽和性より $\exists \eta \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$，すなわち，$m \in \mathbb{N}$ なら $m < \eta$ となる．このような η は "無限大超自然数" であるという．${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ は無限大超自然数の全体であり，外的な集合である．

(8) $0 < r <\in \mathbb{R}$ として，$\mathbb{R}$ の開区間 $(0, r) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < r\}$ に対しては ${}^*(0, r) = \{\xi \in {}^*\mathbb{R}; 0 < \xi < r\}$ であり，飽和性より

$$\varepsilon \in \bigcap_{0<r\in\mathbb{R}} {}^*(0, r)$$

をみたす ε が存在する．このような ε は "正の無限小超実数" とよばれる．

さて，C^∞ 多様体の概念からは，その "$*$-概念" として，${}^*(C^\infty)$ ($*$-) 多様体の概念が得られる．たとえば $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の，通常の

$S^n(r)$: 原点中心，半径 r $(0 < r \in \mathbb{R})$ の n 次元球面 $(n \in \mathbb{N})$

に対し，${}^*(S^n(r))$ は ${}^*\mathbb{R}^{n+1}$ 内の半径 r の $*$-球面（内的な n 次元球面）であり，$S^n(r) \subsetneqq {}^*(S^n(r))$ とみなされる．${}^*(S^n(r))$ はノンスダンダードな点，つまり ${}^*(S^n(r)) \setminus S^n(r)$ の点も含むが，そのような点はそれぞれ，$S^n(r)$ のある点に "無限に近い"．

また，上のかわりに半径 r を ノンスタンダードにとる (つまり，$0 < r \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ととる) と，${}^*\mathbb{R}^{n+1}$ 内の，ノンスタンダードな点ばかりからなる球面を得る．

あるいは n を無限大超自然数にとる（つまり $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ ととる）ことにより，超有限次元の球面（これは $*$-コンパクト）の概念を得る．

3. リーマン多様体上の超関数の超準積分表現

(M, g) を C^∞ リーマン多様体とするとき，次のことが成り立つ ([A1])．

定理 1 次のような $\delta \in {}^*(C_0^\infty(M \times M; \mathbb{R}))$ が存在する：$x, y, z \in {}^*M$ に対し，

(1) $\delta(x, x) \geq 0, \quad \delta(x, y) = \delta(y, x), \quad (\delta(x, y))^2 \leq \delta(x, x)\delta(y, y).$

(2) $\quad {}^*f(x) = \int_{{}^*M} \delta(x,y)\,{}^*f(y)\,{}^*dv_g(y), \quad f \in C_0^\infty(M;\mathbb{C}).$

(3) $\quad \int_{{}^*M} \delta(x,y)\delta(y,z)\,{}^*dv_g(y) = \delta(x,z).$

(4) $T \in (C_0^\infty(M;\mathbb{C}))'$（$M$ 上のシュワルツ超関数）ならば，$\gamma_T(y) := {}^*T(\delta(\cdot,y))$ として，

$$T(f) = \int_{{}^*M} {}^*f(y)\,\gamma_T(y)\,{}^*dv_g(y), \qquad f \in C_0^\infty(M;\mathbb{C}).$$

(5) F は M-値確率変数で，$f \in C_0^\infty(M;\mathbb{R})$ ならば，$f(F)$ の期待値 $\mathbf{E}[f(F)]$ について，

$$\mathbf{E}[f(F)] = \int_{{}^*M} {}^*f(y)\,{}^*\mathbf{E}[\delta({}^*F,y)]\,{}^*dv_g(y).$$

証明（概略） $\delta \in {}^*(C_0^\infty(M \times M;\mathbb{R}))$ を以下のように構成する．

まず，

$$^\sigma(C_0^\infty(M;\mathbb{R})) := \{{}^*f;\ f \in C_0^\infty(M;\mathbb{R})\}$$

とすると，${}^*\mathbb{R}$ 上の超有限次元の内的なベクトル空間 V で

$$^\sigma(C_0^\infty(M;\mathbb{R})) \subset V \subset {}^*(C_0^\infty(M;\mathbb{R}))$$

をみたすものが存在する．そこで $\nu = {}^*\dim V (\in {}^*\mathbb{N}_\infty)$ とし，$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$（ここの "$\ldots$" は内的な[つまり，$\mathcal{I}$ における] "$\ldots$" である）を V の ${}^*dv_g$ に関する "正規直交基底" とする：

$$\int_{{}^*M} \varphi_i\varphi_j\,{}^*dv_g = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,\ldots,\nu).$$

このとき，$\delta \in {}^*(C_0^\infty(M \times M;\mathbb{R}))$ を次のように定義する．

$$\delta(x,y) := \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_i(x)\varphi_i(y) \quad (x,y \in {}^*M).$$

(1), (3) の成立は容易にわかる．

(2) は次のようにして示される．$f \in C_0^\infty(M;\mathbb{C})$ に対し

$$\begin{aligned}
{}^*f(x) &= \sum_{i=1}^{\nu} c_i\varphi_i(x) \qquad \left(c_i = \int_{{}^*M} {}^*f(y)\varphi_i(y)\,{}^*dv_g(y)\right) \\
&= \sum_i \left(\int_{{}^*M} {}^*f(y)\varphi_i(y)\,{}^*dv_g(y)\right)\varphi_i(x) \\
&= \int_{{}^*M} \left(\sum_i \varphi_i(x)\varphi_i(y)\right) {}^*f(y)\,{}^*dv_g(y) \\
&= \int_{{}^*M} \delta(x,y)\,{}^*f(y)\,{}^*dv_g(y).
\end{aligned}$$

ただし，上の式の3行目で，超有限和と $*$-積分（内的な積分）との順序交換を行っているが，これは移行原理により可能である．

また，(4) は次のように示される．$\gamma_T(y) := {}^*T(\delta(\cdot, y))$ とおけば，

$$\begin{aligned}
T(f) &= {}^*(T(f)) = {}^*T({}^*f) \\
&= {}^*T\left(\sum_{i=1}^{\nu} c_i\varphi_i\right) = \sum_i c_i{}^*T(\varphi_i) \\
&= \sum_i \left(\int_{{}^*M} {}^*f(y)\varphi_i(y)\,{}^*dv_g(y)\right) {}^*T(\varphi_i) \\
&= \int_M {}^*f(y) \left(\sum_i {}^*T(\varphi_i)\varphi_i(y)\right) {}^*dv_g(y) \\
&= \int_{{}^*M} {}^*f(y)\gamma_T(y)\,{}^*dv_g(y).
\end{aligned}$$

(5) も同様である． □

4. カレントの超準積分表現

簡単のため，(M, g) は向き付けられた C^∞ リーマン多様体とする．$\mathcal{A}_0(M)$ を M 上のコンパクトな台をもつ C^∞ 微分形式の空間とする．このとき，M 上のド・ラームのカレントについても，次のような超準積分表現が得られる．

定理 2 ${}^*M \times {}^*M$ 上の ${}^*C^\infty$ 二重形式 Θ が存在して，次のことが成り立つ：

(1) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}_0(M)$ と任意の $y \in {}^*M$ に対し，

$$ {}^*\alpha(y) = \int_{x \in {}^*M} {}^*\alpha(x) \wedge \Theta(x, y). $$

(2) $T : \mathcal{A}_0(M) \to \mathbb{R}$ が（ド・ラームの）カレントならば，任意の $\alpha \in \mathcal{A}_0(M)$ に対し，

$$ T(\alpha) = \int_{x \in {}^*M} {}^*\alpha(x) \wedge {}^*T(\Theta(x, \cdot)). $$

5. ベクトルバンドルの一般化切断に対する超準積分表現

$E \to M$ を C^∞（実または複素）ベクトルバンドルとし，$E^\dagger$ を E の双対バンドル，$|\wedge_M|$ を密度バンドルとする．$\Gamma_0^\infty(E)$ を E のコンパクトな台をもつ C^∞ 切断の空間，$\Gamma^{-\infty}(E)$ を E の一般化切断 (generalized section) の空間とする．このとき，

ベクトルバンドル E の一般化切断に対する超準積分表現について，次の定理が成り立つ ([A1]).

定理 3 E の一般化切断 $T \in \Gamma^{-\infty}(E)$ に対し，$\beta_T \in {}^*(\Gamma_0^\infty(E))$ が存在して

$$T(u) = \int_{{}^*M} \beta_T \cdot {}^*u, \qquad u \in \Gamma_0^\infty(E^\dagger \otimes |\wedge_M|), \quad [\cdot \text{ は pairingを表す}].$$

関連する応用については [A3] を参照されたい.

参考文献

[A1] H. Akiyama: *Nonstandard representations of generalized sections of vector bundles*, Osaka. J. Math. **32** (1995), 817–822.

[A2] H. Akiyama (明山　浩)：ベクトルバンドル上の微分作用素に対する超準的可解性について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1070**「力学系と微分幾何学」, pp. 11–17, 1998.

[A3] H. Akiyama: *Nonstandard solvability for linear operators between sections of vector bundles*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2129–2135.

[Ka] T. Kawai: *Nonstandard analysis by axiomatic method*, in “Southeast Asian Conference on Logic” (ed. by C.-T. Chong and M.J. Wicks), Proc. Logic Conf., Singapore, 1981, Elsevier(Noth-Holland), Amsterdam, 1983, pp. 55-76.

[T1] T. Todorov: *A nonstandard delta function*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 1143–1144.

[T2] T. Todorov, *Pointwise kernels of Schwartz distributions*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 817–819.