

2つのコンパートメントと2つの感染経路を持つ体内の感染症モデル

岡山大学大学院環境生命科学研究科 梶原 毅, 佐々木 徹, 應谷 洋二,

Tsuyoshi Kajiwara, Toru Sasaki and Yoji Otani,
Graduate School of Environmental and Life Science,
Okayama University,

1 概略

体内の感染モデルにおいては, 以前は主として病原体を通じた感染ルート (v-c route) が考察されていた。近年, 細胞間感染ルート (c-c route) の重要性が注目され, 多くの研究がなされている。Wang *et al.* (2017) は, 2つの感染ルートを持つ感染年齢構造モデルを提案し, 大域安定性を証明した。Qesmi *et al.* (2011) は, 肝臓移植と関連して, 2つのコンパートメントを持つモデルを提案した。さらに Chen *et al.* (2018) は, 2つのコンパートメントと2つの感染ルートを持つ年齢構造モデルを提案した。本発表では, Chen *et al.* (2018) のモデルについて, Lyapunov 汎関数を構成し, 平衡点の大域安定性を示す。また, 基礎再生産数等についての議論も行なう。

次が Chen *et al.* (2018) のモデルとである。体内を二つのコンパートメント 1, 2 にわけると, T_j はコンパートメント j における未感染細胞, i_j はコンパートメント j における感染細胞の年齢密度, V は血液中の病原体の量で, これは共通である。

$$\begin{aligned} \frac{dT_j}{dt} &= f_j(T_j) - \beta_{j1}T_jV - \beta_{j2}T_j \int_0^\infty p_j(a)i_j(a,t) da, \quad (j=1,2) \\ \frac{\partial i_j}{\partial t} + \frac{\partial i_j}{\partial a} &= -(\delta_j(a) + m_j)i_j(a,t), \quad (j=1,2), \\ \frac{dV}{dt} &= \int_0^\infty q_1(a)i_1(a,t) da + \int_0^\infty q_2(a)i_2(a,t) da - cV \\ i_j(t,0) &= \beta_{j1}T_j(t)V(t) + \beta_{j2}T_j \int_0^\infty p_j(a)i_j(a,t) da, \quad (j=1,2) \end{aligned}$$

未感染細胞の増殖関数 f_j は次を満たす。ただし \bar{T}_j は正の定数である。

$$f_j(0) > 0, \quad f_j'(x) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_j(x) = -\infty, \quad f(\bar{T}_j) = 0.$$

感染細胞の減衰率 $\sigma_j(a)$ は $e^{-\int_0^a (\delta_j(b) + m_j) db}$ と表される。

Chen *et al.* (2018) において以下のことが示されている。

- モデルは抽象的コーシー問題として定式化されている。
- 基礎再生産数の取り扱いが明らかでない。
- 内部平衡点の存在が示されている。

- $R_0 > 1$ のときに一様パーシステンスが示されている。
- 限定された状況で、大域安定性が示されているが、一般的ではない。
- そのために漸近的安定性解析が用いられており、リアプノフ汎関数は使われていない。

それに対して、本発表では我々は次のことを示す。

- モデルを積分方程式で定式化した。
- 基礎再生産数、タイプ別再生産数について、関係を明確にした。
- 一様パーシステンスの別証明 (Smith and Thieme (2011) の手法) を行った。
- リアプノフ汎関数の定義が可能な関数の族を指定した。
- リアプノフ汎関数を定義し、導関数の計算を行った。
- 一般的に、大域安定性を証明した。

2 基本的な性質

積分方程式の局所解が存在し、また非負の初期値に対して、局所解は存在する限り非負になることがわかる。非負の初期値と積分方程式の解から $i_j(t, a)$ を求め、

$$u(t) = (T_1(t), i_1(t, \cdot), T_2(t), i_2(t, \cdot), V(t))$$

と置く。

補題 1. 解 $u(t)$ は $t \geq 0$ で有界であり、全ての $t \geq 0$ で定義できる。

$X = (0, \infty) \times L^1([0, \infty))_+ \times (0, \infty) \times L^1([0, \infty))_+ \times [0, \infty)$ と置き、 $u \in X$ に対して $S_t(u) = u(t)$ で S_t ($t \geq 0$) を定義する。

命題 2. $\{S_t\}_{t \geq 0}$ は相空間 X 上の連続な半群である。

補題 3. X 上の半群 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ は point dissipative であり、有界集合の像は有界である。

命題 4. 半群 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ は asymptotic smooth であり、 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ に対してコンパクトアトラクタが存在する。

3 再生産数

Chen *et al.* (2018) に従い、以下のように定義する。

$$M_j = \int_0^\infty p_j(a) \sigma_j(a) da, \quad N_j = \int_0^\infty q_j(a) \sigma_j(a) da, \quad (j = 1, 2),$$

$$\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_{j1} + \mathcal{R}_{j2}, \text{ where } \mathcal{R}_{j1} = \frac{\beta_{j1} N_j}{c} \bar{T}_j, \quad \mathcal{R}_{j2} = \beta_{j2} M_j \bar{T}_j, \quad (j = 1, 2),$$

$$\mathcal{R}_m = \frac{\mathcal{R}_{11}}{1 - \mathcal{R}_{12}} + \frac{\mathcal{R}_{21}}{1 - \mathcal{R}_{22}} \quad \text{for } \mathcal{R}_{12} < 1, \mathcal{R}_{22} < 1.$$

病原体のクラスを 0, 1 コンパートメントの感染細胞のクラスを 1, 2 コンパートメントの感染細胞のクラスを 2 と番号をつける。ほとんど未感染の状態で、 j クラスの 1 つが i クラスに直接生み

出す感染細胞または病原体の平均数を t_{ij} とする。

$$K = \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}.$$

K は次世代行列であり, K のスペクトル半径が基礎再生産数 R_0 である。

命題 5. K の元について次が成り立つ。

$$t_{00} = 0, \quad t_{12} = 0, \quad t_{21} = 0, \quad t_{10}t_{01} = \mathcal{R}_{11}, \quad t_{20}t_{02} = \mathcal{R}_{21}, \quad t_{11} = \mathcal{R}_{12}, \quad t_{22} = \mathcal{R}_{22}.$$

命題 6. $R_{12} < 1, R_{22} < 1$ のとき, \mathcal{R}_m は 0 クラスのタイプ別再生産数 (Roberts and Heesterbeek, 2003), すなわちクラス 0 から最初にクラス 0 に生み出す病原体の個数の総和の平均値である。

基礎再生産数 R_0 は計算できないが, 1 との大小について次が成り立つ。

補題 7. $R_0 > 1$ は次と同値である。『 $\mathcal{R}_1 > 1$, または $\mathcal{R}_2 > 1$, または 「 $\mathcal{R}_1 \leq 1, \mathcal{R}_2 \leq 1$ かつ $\mathcal{R}_m > 1$ 』』。

$R_0 < 1$ は次と同値である。『 $\mathcal{R}_1 \leq 1, \mathcal{R}_2 \leq 1$ かつ $\mathcal{R}_m < 1$ 』』。

命題 8. $R_0 > 1$ なら内部平衡点が存在する。 $R_0 \leq 1$ なら内部平衡点は存在しない。

前半は Chen *et al.* (2018) で示されている。後半は後で述べる大域安定性から従う。

4 パーシステンス

パーシステンス関数 ρ , X の境界 X_0 を次のように定義する。。

$$\rho(u) = J_1(u) + J_2(u) + V, \quad X_0 = \{u \in X \mid \rho(S_t(u)) = 0, \text{ for each } t \geq 0\}.$$

$R_0 > 1$ とする。

命題 9. X は uniformly weakly ρ -persistent である。

Proof. DFE の近傍の状況を調べるにより, Smith and Thieme (2011) の Theorem 8.17 から従う。 \square

命題 10. 半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ は uniform ρ -persistence である。

Proof. 半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ がコンパクトアトラクタをもつことなどから, Smith and Thieme (2011) の Theorem 5.2 より従う。 \square

命題 11. (Smith and Thieme [5] Theorem 5.7) 半群 $\{S_t\}$ が uniformly ρ -persistent であるとき, コンパクトアトラクタ \mathcal{A} は $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{C}$ と分解される。 \mathcal{A}_1 は X の内点のアトラクタで, パーシステンスアトラクタと呼ばれる。

命題 12. $(T_1^*, i_1^*(\cdot), T_2^*, i_2^*(\cdot), V^*)$ を正の平衡点とする。全域解 $u(t)$ がパーシステンスアトラクタ \mathcal{A}_1 に含まれるとする。そのとき正の数 M, M' で次を満たすものが存在する。

$$0 < M \leq u_j(t, a)/u_j^*(a) \leq M' \text{ for } t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+$$

これは, リアプノフ汎関数を定義するために必要である。

5 リアプノフ汎関数： $R_0 > 1$

ある内部平衡点を $(T_1^*, i_1^*(\cdot), T_2^*, i_2^*(\cdot), V^*)$ とする。 $c_1 > 0, c_2 > 0$ を次のように定義する。

$$c_1 = \frac{\int_0^\infty q_1(a) i_1^*(a) da}{V^*}, \quad c_2 = \frac{\int_0^\infty q_2(a) i_2^*(a) da}{V^*},$$

また、次のように $\psi^j(a)$ を定義する。

$$\psi^j(a) = \int_a^\infty \beta_{j2} T_j^* p_j(b) \sigma_j(b) \sigma_j(a)^{-1} db + \int_a^\infty \frac{\beta_{j1} T_j^* q_j(b)}{c_j} \sigma_j(b) \sigma_j(a)^{-1} db.$$

X 上の汎関数 W (リアプノフ汎関数の候補) を定義する。

$$W(u) = V - V^* - V^* \log \frac{V}{V^*} + \sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{\beta_{j1} T_j^*} \left(W_1^j(u) + W_2^j(u) \right). \quad (1)$$

ただし、 W_1^j, W_2^j は次で定義される。

$$W_1^j(T_j) = T_j - T_j^* - T_j^* \log \frac{T_j}{T_j^*}, \quad W_2^j(i_j(\cdot)) = \int_0^\infty \psi^j(a) \left(i_j(a) - i_j^*(a) - i_j^*(a) \log \frac{i_j(a)}{i_j^*(a)} \right) da.$$

前のページの式を利用し、1コンパートメントモデルの計算を組み合わせ、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dW(u(t))}{dt} &= \sum_{j=1}^2 \left[\frac{c_j}{\beta_{j1} T_j^*} \left\{ \frac{1}{T_j} (T_j - T_j^*) (f_j(T_j) - f_j(T_j^*)) + \int_0^\infty \frac{\beta_{j1} T_j^* q_j(a) i_j^*(a)}{c_j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left(3 - \frac{T_j^*}{T_j} - \frac{V^* i_j(t, a)}{V i_j^*(a)} - \frac{T_j V i_j^*(0)}{T_j^* V^* i_j(t, 0)} + \log \frac{i_j(t, a) i_j^*(0)}{i_j^*(a) i_j(t, 0)} \right) da \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \beta_{j2} T_j^* p_j(a) i_j^*(a) \left(2 - \frac{T_j^*}{T_j} - \frac{T_j i_j^*(0) i_j(t, a)}{T_j^* i_j^*(a) i_j(t, 0)} + \log \frac{i_j^*(0) i_j(t, a)}{i_j^*(a) i_j(t, 0)} \right) da \right\} \right] \leq 0. \end{aligned}$$

定理 13. $R_0 > 1$ とする。 $u(t)$ をパーシステンスアトラクタに含まれる全域解とすると、 $W(u(t))$ の時間微分は 0 以下である。また $\{u \in X \mid \dot{W}(u) = 0\}$ の最大不変集合は、内部平衡点だけからなる 1 点集合である。

6 リアプノフ汎関数： $R_0 \leq 1$

$R_0 \leq 1$ より $\mathcal{R}_m \leq 1$ なので、 $\mathcal{R}_m \leq 1$ と仮定する。

補題 14. $c_1 > 0, c_2 > 0, c_1 + c_2 = c$ で次を満たす c_1, c_2 が取れる。

$$\frac{\beta_{11} \bar{T}_1 M_1}{c_1} + \beta_{12} \bar{T}_1 N_1 \leq 1, \quad \frac{\beta_{21} \bar{T}_1 M_2}{c_2} + \beta_{22} \bar{T}_2 N_2 \leq 1.$$

$j = 1, 2$ に対して $\bar{\psi}^j(a)$ を定義する。

$$\bar{\psi}^j(a) = \int_a^\infty \frac{\beta_{j1} \bar{T}_j q_j(b)}{c_j} \sigma_j(b) \sigma_j(a)^{-1} db + \int_a^\infty \beta_{j2} \bar{T}_j p_j(b) \sigma_j(b) \sigma_j(a)^{-1} db$$

相空間 X 上の汎関数 $\bar{W}(u)$ を定義する。

$$\bar{W}(u) = V + \sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{\beta_{j1} \bar{T}_j} \left\{ T_j - \bar{T}_j + \bar{T}_j \log \frac{T_j}{\bar{T}_j} + \int_0^\infty \bar{\psi}^j(b) i_j(b) db \right\}.$$

定理 15. $R_0 \leq 1$ とする。 $u(t)$ をコンパクトアトラクタ \mathcal{A} に含まれる全域解 $u(t)$ に対して、方程式の解に沿った $\bar{W}(u(t))$ の微分は 0 以下である。さらに、集合 $\{u \in X \mid \dot{\bar{W}}(u) = 0\}$ の最大不変集合は、 $\{\text{DFE}\}$ である。

Proof.

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{W}(u(t))}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{\beta_{j1} \bar{T}_j} \left\{ \frac{1}{T_j} (T_j - \bar{T}_j) (f_j(T_j) - f_j(\bar{T}_j)) + \left(\frac{\beta_{j1} \bar{T}_j N_j}{c_j} + \beta_{j2} \bar{T}_j M_j - 1 \right) i_j(t, 0) \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

□

7 大域安定性の証明

補題 16. (Sell and You 2002)

コンパクトアトラクタまたはパーシステンスアトラクタが 1 点集合になる場合は、それらの点は平衡点であり、局所安定である。

定理 17. $R_0 > 1$ なら、内部平衡点が大域安定である。 $R_0 \leq 1$ なら、DFE が大域安定である。

Proof. パーシステンスアトラクタ、あるいはコンパクトアトラクタに含まれる全域解の α 極限集合は $R_0 > 1$ のときには内部平衡点、 $R_0 \leq 1$ のときには DFE だけからなる。これより、パーシステンスアトラクタ、あるいはコンパクトアトラクタは 1 点集合となる。補題 16 からそれぞれの平衡点が大域漸近安定となる。 □

参考文献

- [1] C.Y. Cheng, Y. Dong and Y. Takeuchi, An age-structured virus model with two routes of infection in heterogeneous environment, *Nonl. Anal. RWA*, 39 (2018), 464-491.
- [2] M.G. Roberts and J.A.P. Heesterbeek, A new method for estimating the effort required to control an infectious disease, *Proc. Roy. Soc. B.*, 270(2003), 1359-1364.
- [3] R. Qesmi, S. Elsaadany, J.M. Heffernan and J. Wu, A hepatitis B virus model with age since infection that exhibits backward bifurcation, *SIAM J. Appl.*, 71(2011), 1509-1530
- [4] G. Sell and Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Applied Mathematical Sciences. 143, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [5] H. Smith and H.R. Thieme, *Dynamical systems and population persistence*, Graduate Studies in Mathematics 118, Amer. Math. Soc., 2011.
- [6] J. Wang., J. Lang. and X. Zou, Analysis of an age structured HIV infection model with virus-to-cell infection and cell-to-cell transmission, *Nonl. Anal. RWA*, 34(2017), 75-96.