

# 滑らかな領域上の方程式に対するハイブリッド型不連続 Galerkin 法

千葉悠喜 (Chiba Yuki)<sup>1</sup>      Bernard Cockburn<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

<sup>2</sup>School of Mathematics, University of Minnesota

## 1 導入

ハイブリッド型不連続 Galerkin(HDG) 法は、各要素上で多項式となる不連続関数と、各要素間上の数値トレースを用いて計算する数値解法である。HDG 法は不連続 Galerkin(DG) 法を改良したのになっており、その特徴として、数値トレースによって問題の未知数を減らすことができる静的縮約や、適切な条件の元で通常より収束が早くなる超収束などがある。

現実の問題を考える際に、考えている領域が滑らかなものになっている場合が多くある。滑らかな領域上の偏微分方程式を数値的に解く場合、領域を多角形で近似して計算を行っている。その際、問題の近似の仕方によっては、求めたい問題とは異なる問題の近似解を計算してしまうことがある。重調和作用素を含む偏微分方程式に関する Babuška のパラドックス [1, §5] はその一例である。そのため、離散化だけでなく、領域の近似によって生じる誤差に関しても解析することが必要である。この点について、標準的な有限要素法では [8, §4.4] や [4, §4.4], [2] のようなエネルギーノルムを中心とする解析は数多く行われている。近年では [7] のような  $L^\infty$  ノルムなどによる誤差評価も行われている。一方、HDG 法では、多角形領域、もしくは滑らかな領域を厳密に要素分割したことを仮定した解析がほとんどであり、滑らかな領域を多角形領域等で近似した場合における解析は

ほとんど行われていない。その研究の一つである Cockburn らによる [6] では、滑らかな領域上の Dirichlet 境界条件に関して、多角形部分領域に適切な境界条件を定めることで HDG スキームを構成している。しかし、複雑な境界条件に対する解析については研究の余地がある。

本稿では、滑らかな領域上の Poisson 方程式に対する HDG 法のスキームの導出およびいくつかの数値例を示す。さらに、静的縮約について簡単に述べる。

## 2 モデル方程式と HDG スキーム

### 2.1 モデル方程式

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 2, 3$ ) を滑らかな境界  $\Gamma = \partial\Omega$  を持つ有界領域とする。次のような Robin 境界条件を持つ拡散方程式を考える。

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c^{-1} \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ c^{-1} \nabla u \cdot \nu + \alpha u = g & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\nu$  は  $\Gamma$  上の外向き単位法線ベクトルであり、 $\alpha$  は正定数である。 $c$  は一様に正定値対称な行列値関数、 $f$  と  $g$  はスカラー値関数であり、十分に滑らかであるとする。この方程式は以下と同値である。

$$\begin{cases} cq + \nabla u = 0 & \text{in } \Omega \\ \nabla q = f & \text{in } \Omega \\ -q \cdot \nu + \alpha u = g & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

このとき、 $\mathcal{E}g \in H^1(\Omega)$  で  $\Gamma$  上  $\mathcal{E}g = g$  であり、 $\|\mathcal{E}g\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$  を満たすものが存在する。

### 2.2 HDG スキームの導出 (cf. [5, §3])

$\{\mathcal{T}_h\}_h$  を正則な三角形分割の族とし、 $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$  とする。多角形領域  $\Omega_h$  を  $\Omega_h = \text{int}(\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K})$  で定め、その境界を  $\Gamma_h = \partial\Omega_h$  とする。 $\partial\mathcal{T}_h := \{K \in \mathcal{T}_h\}$  とし、

$$\mathcal{F}_h := \{F : F \text{ is an } (N-1)\text{-face of some } K \in \mathcal{T}_h\}, \quad \mathcal{F}_h^\partial = \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Gamma_h\}$$

とする。このとき、 $\Gamma_h$  は  $\Gamma_h = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_h^\partial} F$  と表現できる。 $\Gamma_h$  は次の意味で  $\Gamma$  の近似であると仮定する。

$$F \in \mathcal{F}_h^\partial \text{ のすべての頂点が } \Gamma \text{ 上にある。}$$

さらに,

$$\mathcal{F}_h^i := \{F \in \mathcal{F}_h : F \not\subset \Gamma_h\} = \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^\partial$$

とする.  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{g}$  をそれぞれ,  $f$ ,  $g$  の  $\Omega_h$  を含む領域への拡張とする.

$\mathcal{T}_h$  に関する内積を次で定める.

$$(w, v)_{\mathcal{T}_h} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (w, v)_K, \quad \langle w, v \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle w, v \rangle_{\partial K}.$$

有限要素空間を次で定める.

$$\begin{aligned} W_h &:= \{w_h \in L^2(\Omega_h) : w_h|_K \in W_h(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ V_h &:= \{v_h \in L^2(\Omega_h)^N : v_h|_K \in V_h(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ M_h &:= \{\mu_h \in L^2(\mathcal{F}_h) : \mu_h|_K \in M_h(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_h\}. \end{aligned}$$

ただし,  $K \in \mathcal{T}_h$  および  $F \in \mathcal{F}_h$  に対し,  $W_h(K)$ ,  $V_h(K)$ ,  $M_h(F)$  はそれぞれ適切な有限次元の関数空間である.

以下 HDG 法のスキームを導出する.  $(q_h, u_h) \in V_h \times W_h$  を HDG 法で得られる近似解とし,  $\hat{u}_h \in M_h$  を  $u_h$  の数値トレース,  $\hat{q}_h = \hat{q}_h(q_h, u_h, \hat{u}_h)$  を  $q_h$  の数値トレースとする. 各  $K \in \mathcal{T}_h$  に対し, (2) の第 1 式第 2 式にテスト関数をかけ, 部分積分することで,

$$\begin{aligned} (cq_h, v_h)_K - (u_h, \nabla \cdot v_h)_K + \langle \hat{u}_h, v \cdot n \rangle_{\partial K} &= 0 & \forall v_h \in V_h(K) \\ -(q_h, \nabla w_h)_K + \langle \hat{q}_h \cdot n, w \rangle_{\partial K} &= (\tilde{f}, w)_K & \forall w_h \in W_h(K) \end{aligned} \quad (3)$$

を得る. また, 境界条件より,  $F \in \mathcal{F}_h^\partial$  に対し,

$$-\langle \hat{q}_h \cdot n, \mu_h \rangle_F + \alpha \langle \hat{u}_h, \mu_h \rangle_F = \langle \tilde{g}, \mu_h \rangle_F \quad \forall \mu_h \in M_h(F) \quad (4)$$

を得る.

$K \in \mathcal{T}_h$  とその辺  $\partial K \supset F \in \mathcal{F}_h$  に対し  $\hat{q}_h$  を次で定める.

$$\hat{q}_h \cdot n := q_h \cdot n + \tau(u_h - \hat{u}_h) \quad (5)$$

ただし,  $n$  は  $F$  上の  $K$  に対する外向き単位法線ベクトルであり,  $\tau$  は正定値対称な線形汎関数である.  $\hat{q}_h$  の条件について,  $F \in \mathcal{F}_h^i$  に対し,

$$\langle [\hat{q}_h \cdot n], \mu_h \rangle_F = 0 \quad \forall \mu_h \in M_h(F) \quad (6)$$

とする. ここで,  $F = \partial K^+ \cap \partial K^-$  であり,  $n^\pm$  は  $K^\pm$  の外向き単位法線ベクトル,  $[\hat{q}_h \cdot n] = \hat{q}_h^+ \cdot n^+ + \hat{q}_h^- \cdot n^-$  である.

(3), (4), (6) を合わせて整理することで, 次の HDG スキームを得る.

$$\begin{aligned}
& \text{Find } (q_h, u_h, \hat{u}_h) \in V_h \times W_h \times M_h \quad \text{s.t.} \\
& (cq_h, v_h)_{\mathcal{T}_h} - (u_h, \nabla \cdot v_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \hat{u}_h, v \cdot n \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0 \quad \forall v_h \in V_h \\
& -(q_h, \nabla w_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \hat{q}_h \cdot n, w \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = (\tilde{f}, w)_{\Omega_h} \quad \forall w_h \in W_h \\
& -\langle \hat{q}_h \cdot n, \mu_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \alpha \langle \hat{u}_h, \mu_h \rangle_{\Gamma_h} = \langle \tilde{g}, \mu_h \rangle_{\Gamma_h} \quad \forall \mu_h \in M_h
\end{aligned} \tag{7}$$

このスキームは, 適切な仮定の下で一意解を持つ.

### 2.3 スキームの誤差評価

同様の問題に対する FEM の研究 [2] および, DG 法の研究 [3] をもとに解析を行った. 以下がその概要である.

$h \leq h_0$  ならば

$$\text{dist}(\partial \tilde{\Omega}, \Omega) \geq h_0 \quad \text{and} \quad \text{dist}(\partial \tilde{\Omega}, \Omega_h) \geq h_0. \tag{8}$$

を満たすように, 正定数  $h_0$  と十分滑らかな領域  $\tilde{\Omega}$  を一つ固定する.  $\tilde{f}, \tilde{g}$  をそれぞれ,  $f, g$  の  $\tilde{\Omega}$  への拡張とする.

有限要素空間を

$$\begin{aligned}
W_h(K) &:= \{w_h \in L^2(K) : w_h \in \mathcal{P}^1(K)\}, \\
V_h(K) &:= \{v_h \in L^2(K)^N : v_h \in \mathcal{P}^1(K)^N\}, \\
M_h(F) &:= \{\mu_h \in L^2(F) : \mu_h \in \mathcal{P}^1(F)\}
\end{aligned}$$

とする. このとき,

$$\|v_h\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C_1 h_K^{-1} \|v_h\|_{L^2(K)}^2 \quad \forall v_h \in V_h(K), K \in \mathcal{T}_h. \tag{9}$$

が成り立つ.  $c_{K,\min}$  を

$$c_{K,\min} := \min_{v \in L^2(K)^2 \setminus \{0\}} \frac{(cv, v)_K}{\|v\|_{L^2(K)}^2}$$

同様に  $\tau_{\min}$  を

$$\tau_{K,\min} := \min_{\mu \in M_h(K) \setminus \{0\}} \frac{\langle \tau \mu, \mu \rangle_{\partial K}}{\|\mu\|_{L^2(\partial K)}^2}$$

で定める.  $\tau$  について

$$\tau_{K,\min} > MC_1 c_{K,\min}^{-1} h_K^{-1} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \tag{10}$$

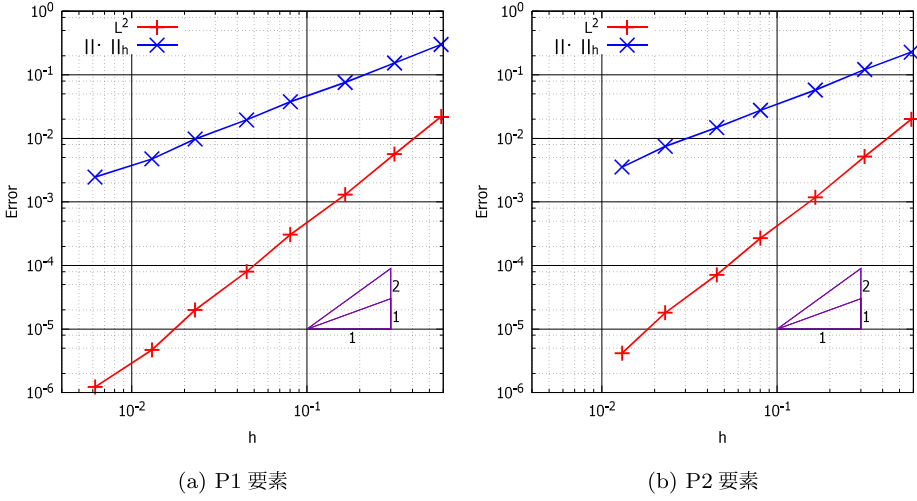


図1  $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2)$

を満たすような正定数  $M > 1$  が存在すると仮定する.

$\Omega_h$  上の関数  $w$  および  $\mathcal{F}_h$  上の関数  $\mu$  に対し, HDG ノルムを次で定める.

$$\|\{w, \mu\}\|_h^2 := \left\| c^{1/2} P_V c^{-1} \nabla w \right\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\| \tau^{1/2} (w - \mu) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 + \alpha \|\mu\|_{\Gamma_h}^2. \quad (11)$$

ここで,  $P_V$  は次で定められる  $V_h$  への射影である.

$$(P_V q, cv_h)_{\mathcal{T}_h} = (q, cv_h)_{\mathcal{T}_h} \quad \forall v_h \in V_h$$

(1) の解  $u$  が十分滑らかならば, 十分小さな  $h$  に対し, 以下の誤差評価が成り立つ.

$$\|\{\tilde{u} - u_h, \tilde{u} - \hat{u}_h\}\|_h \leq Ch(\|u\|_{H^3(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\tilde{\Omega})}) \quad (12)$$

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch^2(\|u\|_{H^3(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^3(\tilde{\Omega})}) \quad (13)$$

ここで,  $\tilde{u}$  は  $u$  の  $\tilde{\Omega}$  への拡張である.

### 3 数値例

以下, いくつかの数値例を紹介する. 考える領域は  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2: |x| < 1\}$  とする.

厳密解が  $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2)$  となるように  $c, f, g$  および  $\alpha$  を定め,  $\tau$  は (10) を満たすように定めた. エネルギーノルム  $\|\{\tilde{u} - u_h, \tilde{u} - \hat{u}_h\}\|_h$  および  $L^2$  ノルム

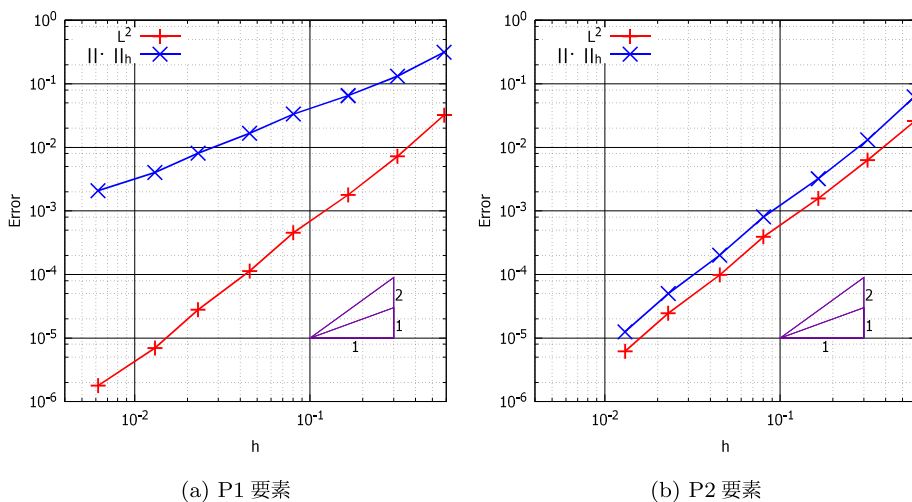
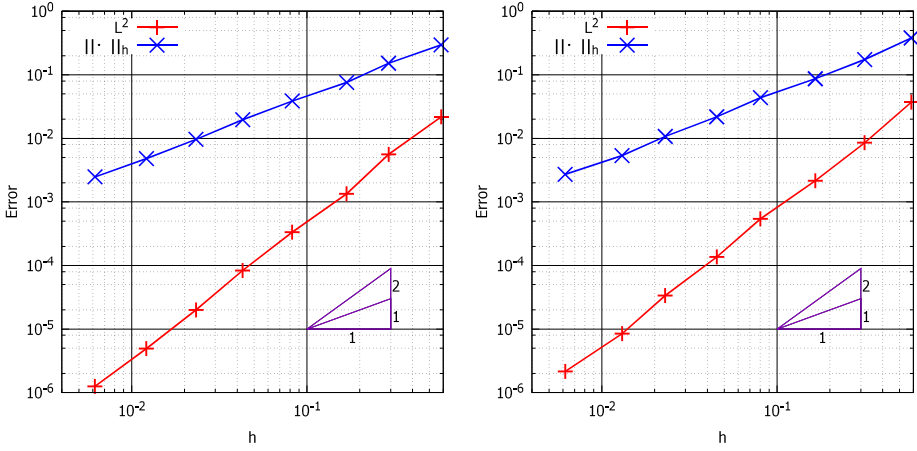


図2  $u(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$

$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)}$  による誤差を計算し、その結果を図1に示した。左 (a) が P1 要素を用いて計算したものであり、右 (b) が P2 要素を用いて計算したものである。どちらについても、エネルギーノルムの誤差は  $O(h)$ 、 $L^2$  ノルムによる誤差は  $O(h^2)$  となっていることがわかる。

次に、厳密解が球対称関数  $u(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$  となる計算例を示す。結果は2である。左 (a) が P1 要素を用いて計算したものであり、右 (b) が P2 要素を用いて計算したものである。P2 要素を用いた場合、エネルギーノルム、 $L^2$  ノルムの両方とも  $O(h^2)$  となっていることがわかる。

最後に、 $\tau = 1$  とした例を示す。これは (10) を満たしていない。図3がその結果であり、左 (a) が厳密解  $u(x_1, x_2) = \sin(x_1)\sin(x_2)$  の計算結果、右 (b) が厳密解  $u(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$  の計算結果である。誤差のオーダーが (10) を満たしているときと同じであることがわかる。これは (10) を  $\tau_{K,\min} > 0$  に弱められる可能性があることを示している。

(a)  $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2)$ (b)  $u(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$ 図3  $\tau = 1$  による誤差

## 4 静的縮約

$K \in \mathcal{T}_h$  と  $\mu \in L^2(\partial K)$  に対し,  $(Q_\mu, U_\mu) \in V(K) \times W(K)$  を次で定める.

$$\begin{aligned} (cQ_\mu, v_h)_K - (U_\mu, \nabla \cdot v_h)_K &= -\langle \mu, v \cdot n \rangle_{\partial K} & \forall v_h \in V_h(K) \\ -(Q_\mu, \nabla w_h)_K + \langle Q_\mu \cdot n + \tau U_\mu, w \rangle_{\partial K} &= \langle \tau \mu, w \rangle_{\partial K} & \forall w_h \in W_h(K). \end{aligned} \quad (14)$$

同様に,  $f \in L^2(K)$  に対し,  $(Q_f, U_f) \in V(K) \times W(K)$  を次で定める.

$$\begin{aligned} (cQ_f, v_h)_K - (U_f, \nabla \cdot v_h)_K &= 0 & \forall v_h \in V_h(K) \\ -(Q_f, \nabla w_h)_K + \langle Q_f \cdot n + \tau U_f, w \rangle_{\partial K} &= (f, w)_K & \forall w_h \in W_h(K). \end{aligned} \quad (15)$$

これを用いると, HDG スキーム (7) は以下のように書き換えることができる.

$$\begin{aligned} \text{Find } \hat{u}_h \in M_h \quad \text{s.t.} \\ -\langle Q_{\hat{u}_h} \cdot n + \tau(U_{\hat{u}_h} - \hat{u}_h), \mu_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \alpha \langle \hat{u}_h, \mu_h \rangle_{\Gamma_h} \\ = \langle Q_f \cdot n + \tau U_f, \mu_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \hat{g}, \mu_h \rangle_{\Gamma_h} & \forall \mu_h \in M_h \quad (16) \\ q_h = Q_{\hat{u}_h} + Q_f, \quad u_h = U_{\hat{u}_h} + U_h \end{aligned}$$

(14), (15) は各  $K$  で独立な低次の連立一次方程式であり, 高速かつ容易に解くことができる. また, (16) も, 元のスキーム (7) より低次の連立一次方程式であり, 比較的高速に解くことができる.

	FEM	DG	HDG
P1	頂点 (25)	3 × 要素 (96)	2 × 辺 (112)
P2	頂点 + 辺 (81)	6 × 要素 (192)	3 × 辺 (168)
P3	頂点 + 2 × 辺 + 要素 (169)	10 × 要素 (320)	4 × 辺 (224)

表 1 問題の未知数の比較

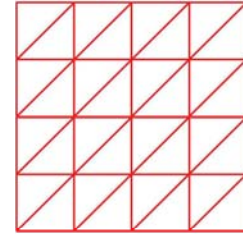


図 4 分割の例

表 1 は、FEM, DG 法および HDG 法について、2 次元領域における問題の未知数を比較したものであり、括弧内は図 4 の分割における未知数を表したものである。FEM および DG 法は、多項式の次数を上げることで未知数が大きく増えているのに対し、HDG 法は増加量が比較的抑えられていることがわかる。特に、2 次以上の次数の多項式を用いた場合、DG 法よりも、HDG 法の方が問題の未知数が少なく、高速に計算可能なことが期待できる。ただし、実際に計算を行う際には、行列の生成コスト等の別の要素も計算時間に影響するため、実装には注意が必要である。

## 謝辞

本研究は、博士課程教育リーディングプログラムの助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] I. Babuška. The theory of small changes in the domain of existence in the theory of partial differential equations and its applications. In *Differential Equations and Their Applications (Proc. Conf., Prague, 1962)*, pages 13–26. Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague; Academic Press, New York, 1963.
- [2] J. W. Barrett and C. M. Elliott. Finite-element approximation of elliptic equations with a Neumann or Robin condition on a curved boundary. *IMA J. Numer. Anal.*, 8(3):321–342, 1988.
- [3] Y. Chiba and N. Saito. Nitsche’s method for a robin boundary value problem in a smooth domain, 2019.
- [4] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978. Studies in Mathematics and



its Applications, Vol. 4.

- [5] B. Cockburn. Static condensation, hybridization, and the devising of the HDG methods. In *Building bridges: connections and challenges in modern approaches to numerical partial differential equations*, volume 114 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 129–177. Springer, [Cham], 2016.
- [6] B. Cockburn, W. Qiu, and M. Solano. A priori error analysis for HDG methods using extensions from subdomains to achieve boundary conformity. *Math. Comp.*, 83(286):665–699, 2014.
- [7] T. Kashiwabara and T. Kemmochi. Pointwise error estimates of linear finite element method for Neumann boundary value problems in a smooth domain. *Numer. Math.*, 144(3):553–584, 2020.
- [8] G. Strang and G. J. Fix. *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973. Prentice-Hall Series in Automatic Computation.