リーマン多様体上の最適化法を用いた システム制御のための構造保存モデル低次元化

東京大学大学院情報理工学系研究科　佐藤一宏 (Kazuhiro Sato)

Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo

e-mail: kazuhiro@mist.i.u-tokyo.ac.jp

1　はじめに

システム制御理論の主要目的は「制御対象に適切な入力を加えて所望の出力を実現すること」である．この目的を達成するために，システム同定・モデル低次元化・制御器設計の 3 つが主要問題となることが多い．制御対象への適切な入力を求めることに相当する制御器設計を行うためには，通常，システムの数理モデルが必要である．その数理モデルを物理法則や入出力データを用いて構築するのがシステム同定である．しかし，システム同定によって得られた数理モデルが複雑になるほど制御器設計を行うことが現実には難しくなる．複雑な数理モデルを単純化するのがモデル低次元化であり，システム同定後にモデル低次元化を行うことが多くの場合必要である．

本稿で対象とする数理モデルは

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1}$$

というように記述される線形システムである．ここで，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ は入力，$y(t) \in \mathbb{R}^p$ は出力を表し，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ は定数行列である．線形システム (1) は

- 非線形常微分方程式によって記述されるシステムの平衡点周りの近似
- 線形偏微分方程式によって記述されるシステムの空間方向の離散化
- 動的モード分解 (DMD) のようなデータ駆動型モデリング [1]

を行うことなどで現れる．すなわち，対象システムが本当の意味では (1) のような形で記述されるわけではない場合でも近似的に (1) のように記述されると考えられる場合がよくある．この観点は制御器設計の際にも重要であり，対象システムが (1) のような線形システムだと考えると，多くの制御器設計問題は凸最適化問題に帰着できることが知られている [2]．一方で，対象システムが (1) ではない場合には制御器設計問題が凸最適化問題ではなくなり，解くこと，すなわち制御器を設計することが難しくなることが知られている．しかし，[3] の 2 節で詳しく説明されているように，線形システム (1) を利用したとしても状態の次元 n が大きくなるにつれて，制御器を設計しマイコン等へ実装することは難しくなる．このことからも線形システム (1) の適当なモデル低次元化は重要である．

本稿の構成は以下の通りである．2 節では伝達関数や H^2 ノルムなどの概念を導入する．それらの概念を用いて 3 節では，筆者がこれまで開発してきたリーマン多様体上の最適化法を用いたモデル低次元化法を紹介する [4–9]．また，4 節では，その方法が色々な分野で利用されている固有直交分解 (POD) のような射

影を用いたモデル低次元化法とどのような相違があるのかを説明する．最後に 5 節でリーマン多様体上の最適化法を用いたモデル低次元化法を利用する際の実用上の注意を述べる．

2　伝達関数と H^2 ノルム

本稿ではモデル低次元化問題をリーマン多様体上の最適化問題として定式化するが，その際に伝達関数や H^2 ノルムの概念を必要とする．本節では，伝達関数と H^2 ノルムについて簡単に紹介する．

線形システム (1) では，$x(0)=0$ のもとで，時刻 t の出力は $y(t)=\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau$ となる．ここで，$H(t):=Ce^{At}B$ であり，インパルス応答行列と言われる．伝達関数とは，インパルス応答行列をラプラス変換したものであり，$G(s):=C(sI_n-A)^{-1}B\in\mathbb{C}^{p\times m}$ のことである．ただし，$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合であり，I_n は $n\times n$ の単位行列を表す．伝達関数は $x(0)=0$ のもとでの入力と出力の比を表す関数だと考えられる．実際に，$x(0)=0$ のもとで (1) をラプラス変換すると，

$$Y(s)=G(s)U(s) \tag{2}$$

という関係式が得られる．ただし，$U(s)$ は入力 $u(t)$ のラプラス変換，$Y(s)$ は出力 $y(t)$ のラプラス変換である．線形システム (1) は入力，出力に加えて状態も陽に考えていたが，伝達関数を用いた関係式 (2) の中には状態の概念がないという相違がある．

線形システム (1) が漸近安定，すなわち行列 A のすべての固有値の実部が負だとすると，伝達関数 $G(s)$ のすべての成分は複素平面 $\mathbb{C}$ の右閉半面で極を持たない．このとき，伝達関数 G の H^2 ノルムが

$$\|G\|_{H^2}:=\sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}(G^*(i\omega)G(i\omega))d\omega} \tag{3}$$

と定められる．これは線形システム (1) の係数行列 A, B, C を用いて

$$\|G\|_{H^2}^2=\mathrm{tr}(B^\top PB)=\mathrm{tr}(C^\top QC). \tag{4}$$

のように特徴付けられる [2]. ただし，P と Q はリヤプノフ方程式

$$PA+A^\top P+C^\top C=0, \tag{5}$$

$$AQ+QA^\top+BB^\top=0 \tag{6}$$

の解であり，線形システム (1) が漸近安定であるならばこれらは一意に存在し，

$$P=\int_0^\infty e^{At}BB^\top e^{A^\top t}dt, \tag{7}$$

$$Q=\int_0^\infty e^{A^\top t}C^\top Ce^{At}dt \tag{8}$$

で与えられる．すなわち，伝達関数の H^2 ノルムは定義式 (3) によって計算する必要はなく，(4) を用いて計算すれば良い．また，P と Q はそれぞれ積分表示 (7) と (8) を数値計算することで求めることができるが，その計算をする必要はなく，線形方程式 (5) と (6) を数値的に解くことで求めることができる．ただし，線形方程式 (5) と (6) を解く有名な方法として知られる Bartels-Stewart 法の計算量は $O(n^3)$ であり [10], 状態の次元 n が大きくなるにつれて解くことは困難になる．大規模ネットワークシステムを考えると，状態の次元 n は大きくなるものの，行列 A, B, C が疎になる，すなわち成分がほとんど 0 になる場合がよくある．そのような場合のリヤプノフ方程式 (5)，(6) の数値解法や積分 (7)，(8) の効率的な算法の提案が望まれており，現在も活発に研究されている [11].

3　リーマン多様体上の最適化法を用いたモデル低次元化

3.1　リーマン多様体上の最適化法の概要

ここでは以降の内容を理解するために必要なリーマン多様体上の最適化法の概要を述べる．詳しくは [14] を参照せよ．

リーマン多様体 $\mathcal{M}$ 上の滑らかな関数 $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ の最適化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & x \in \mathcal{M} \end{aligned} \tag{9}$$

を考える．ただし，$\mathcal{M}$ にはリーマン計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が導入されているとする．

最適化問題 (9) は，リーマン多様体 $\mathcal{M}$ がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合には，点列 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ を更新式

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k \tag{10}$$

によって生成する反復法によって解かれることが多い．更新式 (10) における $d_k \in \mathbb{R}^n$ を点 x_k における探索方向，$t_k > 0$ を点 x_k におけるステップ幅という．探索方向 d_k は点 $x_k \in \mathbb{R}^n$ における目的関数の勾配の情報を用いて決定されることが多い．

リーマン多様体 $\mathcal{M}$ がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ ではない場合には，$\mathcal{M}$ 上には和の演算が一般には定義されないので，点列 $\{x_k\} \subset \mathcal{M}$ を更新式 (10) によって生成することは一般にはできない．また，$\mathcal{M}$ がユークリッド空間の部分多様体であるときには，そのユークリッド空間上で定義された和 $+$ を用いて $\mathcal{M}$ 上の任意の 2 点 x, y に対して和 $x + y$ を計算できるが，$x, y \in \mathcal{M}$ にも関わらず，$x + y \notin \mathcal{M}$ ということが起こりえる．したがって，$\mathcal{M}$ がユークリッド空間の部分多様体だとしても常に $x_k \in \mathcal{M}$ としたい場合には更新式 (10) を利用できない．そこでリーマン多様体上の最適化問題 (9) の場合には，更新式 (10) を変更する必要があるが，(10) の一般化として自然な方法はリーマン計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に依存して定まる測地線を利用して定義される指数写像を使う方法である．

リーマン多様体 $\mathcal{M}$ 上の測地線 γ が初期条件 $\gamma(0) = x \in \mathcal{M}, \dot{\gamma}(0) = v \in T_x\mathcal{M}$ を満たすとき，点 $x \in \mathcal{M}$ での指数写像 $\mathrm{Exp}_x : T_x\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を

$$\mathrm{Exp}_x v = \gamma(1) \tag{11}$$

と定義する．この指数写像を用いてリーマン多様体上の最適化問題 (9) では更新式を

$$x_{k+1} = \mathrm{Exp}_{x_k}(t_k d_k) \tag{12}$$

とする．更新式 (12) の d_k は探索方向であり，リーマン計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に依存して定まる勾配の情報を利用して定義されることが多い．

3.2　正定値対称行列全体のリーマン多様体

以下で説明するように，モデル低次元化問題を考える際に最も重要な多様体は実数を各成分に持つ n 行 n 列の正定値対称行列全体の集合 $\mathrm{Sym}_+(n)$ である．まず，$\mathrm{Sym}_+(n)$ をリーマン多様体にしよう．そのためには，$\mathrm{Sym}_+(n)$ にリーマン計量を導入する必要があるが，任意の $\xi_1, \xi_2 \in T_S\mathrm{Sym}_+(n)$ に対して，

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_S := \mathrm{tr}(S^{-1}\xi_1 S^{-1}\xi_2) \tag{13}$$

と定義されるリーマン計量が最も適切なリーマン計量の一つである．このリーマン計量は [15] の Appendix A で説明されているように，フィッシャー計量と本質的に同じである．今，関数 $F:\mathrm{Sym}_+(n)\to\mathbb{R}$ が滑らかであり，$\bar{F}$ は F をユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上へ拡張した関数だとする．このとき，リーマン計量 (13) に関するリーマンの意味での勾配 $\mathrm{grad}\,F(S)$ は

$$\mathrm{grad}\,F(S) = S\mathrm{sym}(\nabla\bar{F}(S))S \tag{14}$$

で与えられる．ただし，$\nabla\bar{F}(S)$ は $S\in\mathrm{Sym}_+(n)$ での $\bar{F}$ のユークリッドの意味での勾配であり，$\mathrm{sym}(A)$ は A の対称成分である．このリーマン多様体 $\mathrm{Sym}_+(n)$ 上の点 $S\in\mathrm{Sym}_+(n)$ を通る接ベクトル $\xi\in T_S\mathrm{Sym}_+(n)$ に沿った測地線は

$$\gamma(t) = S^{1/2}\exp(tS^{-1/2}\xi S^{-1/2})S^{1/2} = S\exp(tS^{-1}\xi),$$

となる [5]．ただし，exp は通常の行列の指数関数である．したがって，(11) より，指数写像は

$$\mathrm{Exp}_S(\xi) = S^{1/2}\exp(S^{-1/2}\xi S^{-1/2})S^{1/2} = S\exp(S^{-1}\xi) \tag{15}$$

となる．すなわち，リーマン計量を (13) としたことで指数写像が (15) になり，任意の $\xi\in T_S\mathrm{Sym}_+(n)$ に対して $\mathrm{Exp}_S(\xi)\in\mathrm{Sym}_+(n)$ が保証できる．もしリーマン計量を (13) ではなく，$\langle\xi_1,\xi_2\rangle_S = \mathrm{tr}(\xi_1\xi_2)$ というように定義すると，指数写像は $S+\xi$ で与えられ，ある $\xi\in T_S\mathrm{Sym}_+(n)$ に対して $S+\xi\notin\mathrm{Sym}_+(n)$ となってしまう．

このように，$\mathrm{Sym}_+(n)$ にリーマン計量 (13) を導入すると，任意の $\xi\in T_S\mathrm{Sym}_+(n)$ に対して $\mathrm{Exp}_S(\xi)\in\mathrm{Sym}_+(n)$ が保証できるのだが，これがモデル低次元化問題をリーマン多様体上の最適化問題 (9) に定式化した際に重要な役割を果たす．これは以下で説明するように，正定値対称性の維持がシステムの漸近安定性の維持を意味するからである．すなわち，本来のシステムが漸近安定なときに低次元化後のシステムも漸近安定になるように低次元化しようとするのは自然だが，その漸近安定性の保証が正定値対称性を保存することで達成できるのである．

3.3 本来のシステム (1) が漸近安定な場合

本節ではモデル低次元化問題を考えるが，本来のシステムは (1) であり，低次元化後のシステムは

$$\begin{cases}\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t)\\ y_r(t) = C_r x_r(t)\end{cases} \tag{16}$$

だとする．ただし，$x_r(t)\in\mathbb{R}^r$, $y_r(t)\in\mathbb{R}^p$ であり，r は n に比べてかなり小さい状況を想定している．このとき，$(A_r,B_r,C_r)\in\mathbb{R}^{r\times r}\times\mathbb{R}^{r\times m}\times\mathbb{R}^{p\times r}$ を探索する最適化問題

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \|G-G_r\|_{H^2}^2\\ &\text{subject to}\ \text{「低次元化後のシステムは本来のシステムと同じ性質を持つ」}\end{aligned} \tag{17}$$

はモデル低次元化問題である．ただし，G は (1) の伝達関数で，G_r は (16) の伝達関数であり，$\|G-G_r\|_{H^2}^2 = \|C_e(sI_{n+r}-A_e)^{-1}B_e\|_{H^2}^2$ であることに注意する．ここで，$A_e := \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A_r\end{pmatrix}$, $B_e := \begin{pmatrix}B\\ B_r\end{pmatrix}$, $C_e := \begin{pmatrix}C & -C_r\end{pmatrix}$ である．すなわち，$G(s)-G_r(s)$ は $\begin{cases}\dot{x}_e = A_e x_e + B_e u\\ y_e = C_e x_e\end{cases}$ という線形システムの伝達関数だと考えることができる．

目的関数として $\|G-G_r\|_{H^2}^2$ を用いる理由は，本来のシステムと低次元化後のシステムが漸近安定であるという仮定のもとで

$$\sup_{t\geq 0}\|y(t)-y_r(t)\| \leq \|G-G_r\|_{H^2}\cdot\|u\|_{L^2}. \tag{18}$$

が成り立つからである [7]．入力 u は，通常，エネルギー $\|u\|_{L^2}$ が小さくなるように設計しようとするので，$\|u\|_{L^2}$ は比較的小さいと考えて良い．したがって，$\|G-G_r\|_{H^2}$ が小さければ，不等式 (18) から，本来のシステムと低次元化後のシステムが出力を観測する限りでは区別がつかないということを意味しており，まさしく二つのシステムが近いということになる．

最適化問題 (17) の拘束条件「低次元化後のシステムは本来のシステムと同じ性質を持つ」というのは多様体上への拘束として考えることができる場合が多い．例えば，本来のシステムが漸近安定という性質を持つとしよう．これは，$\mathbb{S}^{n\times n}$ を $n\times n$ の安定な実行列全体の集合としたときに，$(A,B,C)\in\mathbb{S}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^{p\times n}$ であることと同値である．したがって，「低次元化後のシステムは本来のシステムと同じ性質を持つ」というのは，この場合，「低次元化後のシステムも漸近安定という性質を持つ」ということであるから，

$$(A_r,B_r,C_r)\in\mathbb{S}^{r\times r}\times\mathbb{R}^{r\times m}\times\mathbb{R}^{p\times r} \tag{19}$$

のことである．すなわち，「本来のシステムが漸近安定という性質を持つ」とした場合の最適化問題 (17) は

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \|G-G_r\|_{H^2}^2\\ &\text{subject to} \quad (A_r,B_r,C_r)\in\mathbb{S}^{r\times r}\times\mathbb{R}^{r\times m}\times\mathbb{R}^{p\times r}\end{aligned} \tag{20}$$

のことであり，(A,B,C) と (A_r,B_r,C_r) の属す集合の構造が次元を除いて一致している．このことから (20) を構造保存モデル低次元化問題と呼ぶ．

しかし，(20) が多様体上の最適化問題になっているのかは一見明らかではないが，[7] の中で

$$\mathbb{S}^{r\times r}=\{(J-R)Q\,|\,(J,R,Q)\in\mathrm{Skew}(r)\times\mathrm{Sym}_+(r)\times\mathrm{Sym}_+(r)\}$$

であることが示されている．ただし，$\mathrm{Skew}(r)$ は $r\times r$ の反対称行列全体の集合，$\mathrm{Sym}_+(r)$ は $r\times r$ の正定値対称行列全体の集合である．このことと，伝達関数は任意の基底の変換行列を用いた座標変換で不変であることを利用することで，最適化問題 (20) を考えることと

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \|G-\tilde{G}_r\|_{H^2}^2\\ &\text{subject to} \quad (J_r,R_r,B_r,C_r)\in\mathcal{M}:=\mathrm{Skew}(r)\times\mathrm{Sym}_+(r)\times\mathbb{R}^{r\times m}\times\mathbb{R}^{p\times r}\end{aligned} \tag{21}$$

を考えることは等価であることが導ける．ただし，$\tilde{G}_r$ は

$$\begin{cases}\dot{x}_r(t)=(J_r-R_r)x_r(t)+B_ru(t)\\ y_r(t)=C_rx_r(t)\end{cases} \tag{22}$$

の伝達関数である．直積集合 $\mathcal{M}$ は，各成分が多様体になっているため，多様体であり，最適化問題 (21) は多様体上の最適化問題ということになる．

多様体上の最適化問題 (21) を解くために，$\mathcal{M}$ にリーマン計量を導入し，3.1 節で説明したリーマン多様体上の最適化法を利用したい．ここでは，システムの漸近安定性を保証するためには行列 R_r の正定値対称性を確実に保証する必要があることを念頭に，

$$\langle(\xi_1,\eta_1,\zeta_1,\kappa_1),(\xi_2,\eta_2,\zeta_2,\kappa_2)\rangle_{P_r}:=\mathrm{tr}(\xi_1^\top\xi_2)+\mathrm{tr}(R_r^{-1}\eta_1R_r^{-1}\eta_2)+\mathrm{tr}(\zeta_1^\top\zeta_2)+\mathrm{tr}(\kappa_1^\top\kappa_2)$$

というリーマン計量を導入する．ただし，$P_r := (J_r, R_r, B_r, C_r) \in \mathcal{M}$ である．右辺第二項の部分が 3.2 節で説明した $\mathrm{Sym}_+(r)$ 上のリーマン計量であり，これが重要である．すなわち，リーマン計量をこのように導入することで，$P_r \in \mathcal{M}$ を現在の点とすると次の点は $(\xi, \eta, \zeta, \kappa) \in T_{P_r}\mathcal{M}$ を探索方向として

$$\mathrm{Exp}_{P_r}(\xi, \eta, \zeta, \kappa) = (J_r + \xi, R_r \exp(R_r^{-1}\eta), B_r + \zeta, C_r + \kappa) \tag{23}$$

によって定められる．式 (23) の右辺の第 2 成分は $R_r \exp(R_r^{-1}\eta) = R_r^{1/2} \exp(R_r^{-1/2}\eta R_r^{-1/2}) R_r^{1/2}$ となるので，$\mathrm{Sym}_+(r)$ に含まれていることが分かる．すなわち，多様体 $\mathcal{M}$ 上の点 P_r を勾配情報を利用して定めた探索方向に伸びる測地線に沿って更新した際に次の点が多様体 $\mathcal{M}$ 上にあることを確実に保証できる．つまり，アルゴリズムの反復途中であっても「低次元化後のシステムは本来のシステムと同じ構造を持つ」ことが保証される．さらに，リーマン計量を導入したので，リーマンの意味での目的関数の勾配を導出することができるが，これについては [7] を参照していただきたい．3.1 節で説明したようように，指数写像と勾配が得られればリーマン多様体上の最適化法を利用することができるので，モデル低次元化問題 (21)，すなわち (20) を解くことができる．

3.4　本来のシステム (1) が漸近安定でポート・ハミルトン構造を持つ場合

上の議論から，伝達関数の差の H^2 ノルムを目的関数とする場合には，漸近安定な線形システム (1) は常に $A = J - R$ だと考えて一般性を失わない．ただし，$J \in \mathrm{Skew}(n)$, $R \in \mathrm{Sym}_+(n)$ である．

さらに，(1) の入出力の数が等しい，すなわち $p = m$ のときに，

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (J - R)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = B^\top x(t) \end{cases} \tag{24}$$

というように，$C = B^\top$ という構造を備えたシステムをポート・ハミルトニアンシステムという [6,16]．本来のシステム (1) が漸近安定かつポート・ハミルトニアンシステムの構造を持っているときに，その構造を保存する問題は以下のように記述できる．

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \|G_{\mathrm{PH}} - G_{\mathrm{PH},r}\|_{H^2}^2 \\ &\text{subject to} \quad (J_r, R_r, B_r) \in \mathrm{Skew}(r) \times \mathrm{Sym}_+(r) \times \mathbb{R}^{r \times m} \end{aligned} \tag{25}$$

ただし，G_{PH} は本来のシステム (24) の伝達関数で，$G_{\mathrm{PH},r}$ は

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = (J_r - R_r)x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = B_r^\top x_r(t) \end{cases} \tag{26}$$

の伝達関数である．3.3 節で考えた問題 (21) と同様に，(25) はリーマン多様体上の最適化問題であり，リーマン多様体上の最適化法によって解くことが可能である．すなわち，リーマン多様体上の最適化法を用いることで「低次元化後のシステムは本来のシステムと同じ構造を持つ」ことが保証される．詳しくは [6] を参照されたい．

4　射影の観点からのモデル低次元化

この節では 3 節で説明したリーマン多様体上の最適化法による構造保存モデル低次元化と射影を利用したモデル低次元化の相違を説明する．

4.1 ガレルキン射影の観点からのモデル低次元化

本節では，ガレルキン射影を利用して得られる低次元化モデルは H^2 ノルムの意味では最適な低次元化モデルには一般にはならないことを説明する．

本来のシステムを (1) としたときに，シュティーフェル多様体 $\mathrm{St}(r,n) := \{U \in \mathbb{R}^{n\times r} \mid U^\top U = I_r\}$ の要素 $U \in \mathrm{St}(r,n)$ を用いて，

$$x = Ux_r \tag{27}$$

という関係式で x_r を定めると，低次元化システム

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = U^\top AUx_r(t) + U^\top Bu(t) \\ y_r(t) = CUx_r(t) \end{cases} \tag{28}$$

が得られる．このとき，$U \in \mathrm{St}(r,n)$ を探索する最適化問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \|G - \hat{G}_r\|_{H^2}^2 \\ &\text{subject to} \ \ U \in \mathrm{St}(r,n) \end{aligned} \tag{29}$$

はモデル低次元化問題である．ただし，G は (1) の伝達関数で，$\hat{G}_r$ は (28) の伝達関数である．行列 U が $\mathrm{St}(r,n)$ の要素ならば，$\Pi_G := UU^\top$ はガレルキン射影と呼ばれる直交射影であり，$\Pi_G^2 = \Pi_G$，　$\Pi_G^\top = \Pi_G$ を満たす．したがって，(1) の状態の発展方程式 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ の左から Π_G を作用させた $\Pi_G\dot{x} = \Pi_G Ax + \Pi_G Bu$ は r 次元部分空間上の発展方程式である．この低次元部分空間上の発展方程式と出力方程式 $y(t) = Cx(t)$ は (27) を用いることで，(28) に一致する．ただし，$y(t) = CUx_r(t)$ の $y(t)$ を改めて $y_r(t)$ と書いている．なお，[9] ではシュティーフェル多様体上の最適化の観点から (29) を解く解法が提案されている．

最適化問題 (29) の実行可能解は色々な分野で利用されている固有直交分解 (POD) を利用して得ることが可能である [12,13]．例えば，線形システム (1) で，入力 $u(t)$ が $\delta(t)e_i$ のとき（$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数，e_i は第 i 成分が 1 で他の成分が 0 のベクトル），状態は $x_i(t) = e^{At}B_i$ となる（B_i は行列 B の第 i 列）が，このようなデータ $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ を並べて構成したデータ行列 $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ を用いた $\int_0^\infty X(t)X^\top(t)dt$ は可制御性グラミアン (7) に一致する．実際に，

$$\int_0^\infty X(t)X^\top(t)dt = \sum_{i=1}^m \int_0^\infty x_i(t)x_i^\top(t)dt = \sum_{i=1}^m \int_0^\infty e^{At}B_iB_i^\top e^{A^\top t}dt = P$$

となる．この文脈での POD は可制御性グラミアン P を

$$P = \mathcal{U}\Lambda\mathcal{U}^\top = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 & \mathcal{U}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1^\top \\ \mathcal{U}_2^\top \end{pmatrix} = \mathcal{U}_1\Lambda_1\mathcal{U}_1^\top + \mathcal{U}_2\Lambda_2\mathcal{U}_2^\top$$

とスペクトル分解することを意味する [17]．ただし，Λ_1 は r 次で Λ_2 は $n-r$ 次であり，共に非負の対角行列だが，Λ_2 のすべての対角成分は Λ_1 の任意の対角成分以下であるとする．このとき，$\mathcal{U}_1 \in \mathrm{St}(r,n)$ であり，$\mathcal{U}_1$ は最適化問題 (29) の実行可能解となっている．また，$\mathcal{U}_1\mathcal{U}_1^\top$ は $\mathcal{U}_1$ の列ベクトルの張る空間へのガレルキン射影，すなわち可制御性グラミアン P の r 個の大きい固有値に対応する固有ベクトルの張る空間への直交射影となっている．

参考文献 [6] で示されているように，オリジナルのシステムが可制御で $J = 0$ のポート・ハミルトニアンシステム (24) のとき，すなわち可制御で漸近安定な対称システムのときに，

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \|G_{\mathrm{PH}} - \tilde{G}_{\mathrm{PH},r}\|_{H^2}^2 \\ &\text{subject to} \ \ (R_r, B_r) \in \mathrm{Sym}_+(r) \times \mathbb{R}^{r\times m} \end{aligned} \tag{30}$$

の任意の局所最適解は最適化問題 (29) のある最適解 $U \in \mathrm{St}(r,n)$ を用いて $(R_r, B_r) = (U^\top RU, U^\top B)$ によって表現できることが示されている．ただし，$\tilde{G}_{\mathrm{PH},r}$ は

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = -R_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = B_r^\top x_r(t) \end{cases} \tag{31}$$

の伝達関数である．これは問題 (30) の大域的最適解が存在するなら，その大域的最適解は問題 (29) の大域的最適解 U^* と本来のシステムの行列 R, B によって表現できることを意味している．このことから，本来のシステムが可制御で漸近安定な対称システムのときには問題 (30) を考える必要はなく，より簡単な射影の観点からの問題 (29) を考えれば十分であると言える．

しかし，本来のシステムが $J \neq 0$ の場合の漸近安定なポート・ハミルトニアンシステム (24) の場合には，最適化問題 (25) の任意の局所最適解を (J_r^*, R_r^*, B_r^*) としたときに，$(J_r^*, R_r^*, B_r^*) = (U^\top JU, U^\top RU, U^\top B)$ となる最適化問題 (29) の実行可能解 $U \in \mathrm{St}(r,n)$ が一般には存在しないことが [6] で示されている．すなわち，ガレルキン射影 $UU^\top$ を用いて低次元化されたシステム (28) よりも H^2 ノルムの意味で良い低次元化モデルが一般には存在する．このことは [5] で研究されたようなポート・ハミルトニアンの構造を持たないシステムに対しても言える．

4.2　ペトロフ・ガレルキン射影の観点からのモデル低次元化

上で説明したようにガレルキン射影では H^2 ノルムの意味で最適な低次元化モデルを構築することは一般にはできない. 次に，ガレルキン射影を一般化したペトロフ・ガレルキン射影について検討する．

ペトロフ・ガレルキン射影とは，$W^\top V = I_r$ を満たす $V, W \in \mathbb{R}^{n\times r}$ によって定義された $\Pi_{PG} := VW^\top$ のことである．この写像 Π_{PG} は $\Pi_{PG}^2 = \Pi_{PG}$ を満たすので射影であるが，一般には $\Pi_{PG}^\top \neq \Pi_{PG}$ なので直交射影とは限らず斜交射影となる．ガレルキン射影 Π_G はペトロフ・ガレルキン射影の特殊な場合である．

システム制御の分野において最も有名なモデル低次元化法であり MATLAB にも実装されている [18] で提案された平衡実現打ち切り法はペトロフ・ガレルキン射影によって低次元化モデルを構築する方法だと解釈することができる [17]．平衡実現打ち切り法を説明するために，本来のシステム (1) は可制御かつ可観測で漸近安定であるとして，(7) で定義された可制御性グラミアン P と (8) で定義された可観測性グラミアン Q を $P = P_U P_U^\top$, $Q = Q_L Q_L^\top$ とコレスキー分解する．ただし，P_U は上三角行列で，Q_L は下三角行列である．このとき，$PQ = P_U P_U^\top Q_L Q_L^\top$ の一部の行列 $P_U^\top Q_L$ の特異値分解 $P_U^\top Q_L = \mathcal{W}\Sigma\mathcal{V}^\top$ の結果を利用して $T := \Sigma^{-1/2}\mathcal{V}^\top Q_L^\top$ を定める．ただし，$\mathcal{W}, \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は直交行列で，$\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は対角成分が正の実数値からなる対角行列である．ここで，Σ の対角成分がすべて正の実数値となることは (1) が可制御かつ可観測だと仮定したからである（可制御かつ可観測でない場合には対角成分は非負であることしか保証できない）．このとき，$TP_U\mathcal{W}\Sigma^{-1/2} = I_n$ となるので，$T_{\mathrm{inv}} := T^{-1} = P_U\mathcal{W}\Sigma^{-1/2}$ である．したがって，

$$TPT^\top = (T^{-1})^\top QT^{-1} = \Sigma \tag{32}$$

となるが，これは本来のシステム (1) の状態 $x(t)$ を基底の変換行列 T を用いて座標変換 $\bar{x}(t) = Tx(t)$ した

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = TAT^{-1}\bar{x}(t) + TBu(t) \\ y(t) = CT^{-1}\bar{x}(t) \end{cases} \tag{33}$$

の可制御性グラミアンと可観測性グラミアンが共に Σ であることを意味している．このように可制御性グラミアンと可観測性グラミアンが対角行列で一致しているシステムを平衡実現という．すなわち，(33) は平

衡実現システムである．平衡実現システム (33) の可制御性グラミアンと可観測性グラミアンは Σ であるが，

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r\times r},\ \Sigma_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)} \tag{34}$$

という分割を考えることができる．ただし，Σ_2 のすべての対角成分は Σ_1 の任意の対角成分の大きさ以下であるように T を選ぶことができるので，そのように T を選ぶ．この分割に対応して (33) の中の行列が

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},\ CT^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

というように分割される．この分割を用いて

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_{11}x_r(t) + B_1u(t) \\ y_r(t) = C_1x_r(t) \end{cases} \tag{35}$$

と低次元化モデルを定めることを平衡実現打ち切り法という．

上で説明した平衡実現打ち切り法がペトロフ・ガレルキン射影によって低次元化モデルを構築する方法になっていることは，以下のように確認することができる．いま，分割 (34) に対応して $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix}$ と適当なサイズで $\mathcal{W}, \mathcal{V}$ を分割すると，$T_i = \Sigma_i^{-1/2}\mathcal{V}_i^\top Q_L^\top$, $T_{\mathrm{inv},i} = P_U\mathcal{W}_i\Sigma_i^{-1/2}$ $(i = 1, 2)$ を用いて $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$, $T_{\mathrm{inv}} = \begin{pmatrix} T_{\mathrm{inv},1} & T_{\mathrm{inv},2} \end{pmatrix}$ と書ける．$TT_{\mathrm{inv}} = I_n$ より，$T_1T_{\mathrm{inv},1} = I_r$ であり，$\Pi := T_{\mathrm{inv},1}T_1$ はペトロフ･ガレルキン射影である．すなわち，本来のシステム (1) の状態の発展方程式 $\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)$ の左から Π を作用させた $\Pi\dot{x} = \Pi Ax + \Pi Bu$ は r 次元部分空間上の発展方程式であり，$x(t) = T_{\mathrm{inv},1}x_r(t)$ と $x_r(t)$ を定めることで，この低次元部分空間上のシステムは

$$A_{11} = T_1AT_{\mathrm{inv},1},\ B_1 = T_1B,\ C_1 = CT_{\mathrm{inv},1}$$

の (35) で記述することができる．また，Π は可制御性グラミアン P と可観測性グラミアン Q の積 PQ の r 個の大きい固有値に対応する固有ベクトル，すなわち $T_{\mathrm{inv},1}$ の列ベクトルの張る空間への斜交射影となっていることが $PQ = T^{-1}\Sigma^2T = T_{\mathrm{inv},1}\Sigma_1^2T_1 + T_{\mathrm{inv},2}\Sigma_2^2T_2$ より分かる．

このようにシステム制御の分野で最も有名な平衡実現打ち切り法は本来のシステムをペトロフ・ガレルキン射影して低次元モデルを得る方法だと考えることができるが，この方法によって得られる低次元化モデルは H^2 ノルムや他の指標の意味で最適とはならないことが [7] で示されている．すなわち，平衡実現打ち切り法の結果を初期点として，リーマン多様体上の最適化問題 (21) を解くと H^2 ノルムと他の指標の意味で結果が改善することがある．最適化問題 (21) は H^2 ノルムの意味での最適化なので，H^2 ノルムの意味で結果が改善することは自明だが，他の指標の意味でも多くの場合に結果が改善されることが確認されている．

また，本来のシステムが (26) というようなポート・ハミルトニアンシステムのときに，ペトロフ・ガレルキン射影 Π_{PG} を用いてポート・ハミルトニアンの構造を保存することは容易ではない．文献 [19] ではペトロフ・ガレルキン射影によるポート・ハミルトニアンシステムのモデル低次元化法を与えていると解釈することができるが，本来のシステムを (24) に変換した場合には，[19] で与えられたペトロフ・ガレルキン射影はガレルキン射影に一致する [6]．したがって，この場合には 4.1 節で説明したように，H^2 ノルムの意味で最適な低次元化モデルを得ることができない．

5　まとめと注意

本稿ではリーマン多様体上の最適化法を用いたシステム制御のための構造保存モデル低次元化法を解説し，射影を利用したモデル低次元化法との相違を説明した．

最後に以下を注意したい．

1. リーマン多様体上の最適化法を用いたモデル低次元化は本来のシステムの状態の次元 n が 1000 程度までしか利用できない．これは最適化を実行する際に，$O(n^3)$ 以上の計算量が必要となるためである．したがって，$n > 1000$ となるような状況では，従来からよく用いられている射影を利用したモデル低次元化法が有効である．しかし，$n > 1000$ の場合にリーマン多様体上の最適化法によるモデル低次元化が役に立たないというわけではないと筆者は考えている．なぜなら，$n > 1000$ の場合に，まず射影を利用して 100 次元程度までモデルを低次元化し，それからリーマン多様体上の最適化法によるモデル低次元化が実行できるからである．すなわち，射影と最適化によるハイブリッド法を考えることができる．このハイブリッド法の有効性の調査は今後の課題である．

2. 4 節で説明した射影の観点では (27) のように本来のシステムの状態 x と低次元化後のシステムの状態 x_r が関連付けられている．一方で，3 節で説明した最適化の観点からのモデル低次元化の場合は x と x_r の間には何の関係性もない．しかし，これは制御器設計の観点からは問題ない．なぜなら，システム行列 (A_r, B_r, C_r) が既知であれば制御器を設計することができるからである．

3. 3 節で説明したリーマン多様体上の最適化法の場合には低次元化後のシステムの状態の次元 r をどの程度にすれば良いかということは不明瞭である．一方で，4 節で説明した平衡実現打ち切り法の場合は r をどの程度にすれば良いかを (34) の行列 Σ の対角成分，すなわち可制御性グラミアン P と可観測性グラミアン Q の積 PQ の固有値を観察することで決定しやすい．つまり，平衡実現打ち切り法の場合には PQ の対角成分で最大のものに近いものを選び，その個数を r とするという方針が取られている．したがって，PQ の固有値を調べて平衡実現打ち切り法の場合に妥当な r を求め，この r を参考にリーマン多様体上の最適化法の場合の r を決定するという方法が考えられる．

4. 制御対象が 3.4 節で紹介した漸近安定なポート・ハミルトニアンシステムとしてモデル化できる状況を考えよう．このとき，最適化問題 (25) の解を用いるよりも (21) の解を用いた方が，原理的には，H^2 ノルムの意味では良い低次元化モデルを得ることができる．しかし，本来のシステムがポート・ハミルトニアンの構造を持っているので低次元化後のシステムもポート・ハミルトニアンの構造を持っていた方が他の指標で評価した場合よくなることがあると考えられる．したがって，(21) の解と (25) の解を用いて制御器設計を行い，どちらの制御器を利用したら閉ループ系の性能が良くなるかは実用上有益な問題である．筆者は，本来のシステムが漸近安定なポート・ハミルトニアンシステムならば低次元化後のシステムも漸近安定なポート・ハミルトニアンとなる (25) の解を用いた方が閉ループ系の性能が良くなると予想しているが，この調査は今後の課題である．

謝辞

本研究は日本学術振興会科学研究費補助金（課題番号：JP18K13773）および旭硝子財団の助成を受けている．

参 考 文 献

[1] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton, and J. L. Proctor: "Dynamic mode decomposition: data-driven modeling of complex systems," SIAM, 2016.

[2] 蛯原義雄：LMI によるシステム制御，森北出版株式会社，2012.

[3] 佐藤一宏：リーマン多様体上の最適化法の制御工学への応用，機械の研究, Vol. 72, No. 2, pp. 93-99, 2020.

[4] K. Sato: "Riemannian optimal model reduction of linear second-order systems," *IEEE Control Systems Letters*, Vol. 1, No. 1, pp. 2–7, 2017.

[5] K. Sato and H. Sato: "Structure preserving H^2 optimal model reduction based on Riemannian trust-region method," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 63, No. 2, pp. 505–511, 2018.

[6] K. Sato: "Riemannian optimal model reduction of linear port-Hamiltonian systems," *Automatica*, Vol. 98, pp. 428–434, 2018.

[7] K. Sato: "Riemannian optimal model reduction of stable linear systems," *IEEE Access*, Vol. 7, pp. 14689–14698, 2019.

[8] H. Sato and K. Sato: "A New H^2 Optimal Model Reduction Method Based on Riemannian Conjugate Gradient Method," 55th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 5762–5768, 2016.

[9] H. Sato and K. Sato: "Riemannian Trust-Region Methods for H^2 Optimal Model Reduction," 54th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 4648–4655, 2015.

[10] R. H. Bartels and G. W. Stewart: "Solution of the matrix equation $AX+XB=C$," *Communications of the ACM*, Vol. 15, No. 9, pp. 820–826, 1972.

[11] V. Simoncini: "Computational methods for linear matrix equations," SIAM Review, Vol. 58, No. 3, pp. 377–441, 2016.

[12] 平邦彦：「固有直交分解による流体解析：1. 基礎」，ながれ 30, pp. 115–123, 2011.

[13] 平邦彦：「固有直交分解による流体解析：2. 応用」，ながれ 30, pp. 263–271, 2011.

[14] P.-A. Absil, R. Mahony, and R. Sepulchre: Optimization Algorithms on Matrix Manifolds, Princeton University Press, 2008.

[15] K. Sato, H. Sato, and T. Damm: "Riemannian optimal identification method for linear systems with symmetric positive-definite matrix," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020.

[16] K. Sato: "Riemannian optimal control and model matching of linear port-Hamiltonian systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 62, No. 12, pp. 6575–6581, 2017.

[17] A. C. Antoulas: "Approximation of large-scale dynamical systems," SIAM, 2015.

[18] B. C. Moore: "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, No. 1, pp. 17–32, 1981.

[19] S. Gugercin, R. V. Polyuga, C. Beattie, and A. van der Schaft: "Structure-preserving tangential interpolation for model reduction of port-Hamiltonian systems," Vol. 48, No. 9, pp. 1963–1974, 2012.