

有限単純グラフに付随する組合せ論的ゼータの伊原表示

The Ihara expression of combinatorial zeta functions for finite simple graphs

森田英章（室蘭工業大学・工）

Hideaki Morita

Muroran Institute of Technology

1 概要

表題にある「組合せ論的ゼータ」という用語は、グラフや離散力学系などの離散構造に付随するゼータ関数に対して与えている「総称」である。しかし、単なる「総称」にとどまらず、ある共通の性質を有する点をその本質とする。それは、離散構造がもつ組合せ量を用いて定義された形式的べき級数が、

「三種の表示」

と現在ひとまとめによんでいる表示式をすべて揃えて持つ場合にいう。「三種の表示」の具体名を挙げると、

「指数表示」・「オイラー表示」¹・「橋本表示」²

となる。「オイラー表示」は通常「オイラー積表示」とよばれるところだが、ここでは呼称のバランスと簡便さを取り、このようによぶことにする。指数表示は、対象としている離散構造がもつ組合せ量を数え上げる表式であり、オイラー表示はその離散構造の「素」なるものを記述する。また、橋本表示は離散構造がもつ「サイクル（循環）」を記述する行列式表示である。詳細は後ほど述べるには、それなりに準備が必要なので、それは後にゆずることにする。

グラフ・ゼータにせよ、力学系ゼータにせよ、離散構造に対して定義されるゼータは、現在知られている限りすべてこれら三種の表示をもつ。あるものはオイラー表示で定義され、またあるものは指数表示で定義される。さらには橋本表示で定義する場合もあるが、いずれの場合も結局は文脈中に三種の表示がすべて登場することを常としており、これらの表示はあたかも同値であるかのように扱われていた。その現状を追認すれば、いずれの表式で定義してもかまわない、ということになるのだろうが、しかしそれも精神的に据わ

¹レオンハルト・オイラー

²橋本喜一郎

りが悪い。どの表式で定義すべきか決着をつけたい衝動に駆られる。ただし、この欲求は容易に解消される。実際、これら三種の表示には「強弱関係」があることが知られている。結論を述べると、橋本表示が最強であり、指数表示が最弱である。すなわち、橋本表示は無条件でオイラー表示に書き換えることができ、またオイラー表示はこれも無条件で指数表示に書き換えることができる。よってこの種のゼータを扱う際には、指数表示で定義するのがスジということになる。すると問題となるのは逆の含意、すなわち指数表示からオイラー表示、そしてオイラー表示から橋本表示へ書き換えるために必要な条件である。実際、これら三種の表示は同値ではなく、指数表示をオイラー表示に書き換えるには、本稿でいうところの「オイラー条件」が必要であり、更に加えて「橋本条件」が整えば、オイラー表示を橋本表示に書き換えることができる。そしてこれらの表示や条件を定式化する際の適切な場が「擬有限力学系」であり、その上に与えられた適切な性質を満たす荷重をもつルエル・ゼータ³[20] (c.f., [1]) は、オイラー条件と橋本条件を結果満たすことになり、よって三種の表示の鼎立をみることになる。こうして構成されるゼータを組合せ論的ゼータとよんでいる。組合せ論的ゼータは、この種の既存のゼータをすべて⁴ その枠組みに収めることが知られている [19]。

組合せ論的ゼータには、橋本表示の他にもう一種類の行列式表示が存在する場合がある。その名を

「伊原表示」

という。すなわち、組合せ論的ゼータには二種類の行列式表示を考えるが、最初に見いだされた行列式表示は伊原表示であった。組合せ論的ゼータの原型は、「伊原ゼータ」とよばれるものである。これは、数論的文脈のなかで伊原 [11] により 1966 年に導入されたが、その後、セール [23]、砂田 [25]、橋本 [8] を経て、グラフに対して考えるべき対象として理解されるようになる。グラフゼータの伊原表示と現在よばれている行列式表示は、すでに原典 [11] においてその姿を明確に表しており、それを謳う定理は「パス⁵-伊原の定理」[2, 11] とよばれる⁶。様々な観点もあろうが、伊原表示と橋本表示は一長一短の様相をもつ。伊原表示も橋本表示も共に行列式表示であるので、グラフから定まる行列を用いて記述される。まず、伊原表示に用いられる行列のほうが、橋本表示に用いられる行列より、一般には次数が小さくなる。これが伊原表示の利点の一つであろう。具体的な問題設定にも寄ろうが、組合せ論的には扱いやすくなる可能性が高い。一方、橋本表示は代数的な取り扱いがしやすくなる。まず、形の上で橋本表示の分母は、行列の反転特性多項式であることが目をひ

³ デビッド・ルエル

⁴ まだ見ぬものもあるかもしれないので、「概ね」というほうが正確かもしれない。

⁵ ハイマン・パス

⁶ 橋本表示は橋本 [8] において導入される。

く、それに加えて、行列式の中身が、伊原表示の場合は行列係数の2次の多項式であるのに対し、橋本表示の場合は1次の多項式である点も、代数的に扱いやすくなり得る点であろう。現在、伊原表示の構成は、橋本表示の変形を基本的な手筋としている [27]。いうなれば、三種の表示の鼎立状況 [19] を確認することが、伊原表示の構成の基盤を与えている。

伊原表示にしても橋本表示にしても、それ自体が研究対象として価値があるとされてきたようである [2, 3, 4, 8, 16, 24]。ゼータとよぶべき対象の行列式表示であるから当然なのであろう。ただ近年になり、これら両者の関連について、それまで意識されていなかった方面から意味が与えられることになった。この意味をもたらした定理を、その方面では

「今野⁷-佐藤⁸の定理」

とよんでいる。今野-佐藤の定理は、有限グラフ上の量子ウォークに関する定理である。量子ウォークに関する基本事項の解説は今野 [13] にある。また、今野-井手⁹編 [14] には、量子ウォークとそれにまつわる話題について、最近の展開を含めた諸々のトピックがまとめられている。以下、今野-佐藤の定理について簡単ではあるがふれておきたい。量子ウォークとは一種の確率過程であり、その挙動は時間発展行列とよばれるユニタリ行列¹⁰によって記述される。その固有値は、量子ウォークに特有の性質¹¹を記述する重要な量として認識されている [13, 14]。したがって、時間発展行列の固有値を決定したり、その性質を詳述することは、量子ウォークの研究において重要な段階の一つとして認識されている。ここで話題に取り上げたいのは、有限グラフ上で定義される量子ウォークである。特に、「グローバー・ウォーク」というモデル (c.f., [13]) を考えることにしよう。グローバー・ウォークの挙動は、与えられた有限グラフの組合せ論的情報から定義される時間発展行列によって規定される。今後、その時間発展行列を「グローバー行列」とよぶ。この発端はエムズ他 [5] である。ここで彼らは、グローバー行列のスペクトラム¹²が、有限グラフ¹³の同型類の不変量になっているであろうことを主張し、実際にそのスペクトラムを決定している。この予想自体は後に反例 [7] が示されることになったが、それでもスペクトラムの完全な記述が得られたことは、量子ウォークの観点からも大きな注目を集めることになる。ただそこでの議論は、いうなればグローバー行列の代数的・組合せ論的性質を用いて、固有ベクトルを数え挙げるとでもいうべきもので、特性多項式を因数分解するという基本的な手立てによるものではない。

⁷今野紀雄

⁸佐藤巖

⁹井手勇介

¹⁰このユニタリ性は本質的である。今野 [13] 参照。

¹¹「局在化」・「線形的な広がり」

¹²固有値全体のなす重複集合のこと

¹³実際には有限強正則グラフ

そこで気になるのはグローバ行列の特性多項式およびその因数分解であるが、今野-佐藤の定理はまさにこの部分をグラフゼータを用いて記述している。彼らの着眼点を具現化した発想の根源は、グローバ行列がグラフゼータの一種である佐藤ゼータ [21] の「辺行列」¹⁴の一例となっていることに着目した点にある。すると、対応する佐藤ゼータの橋本表示の分母は、すでにグローバ行列の反転特性多項式となっており、ほとんど特性多項式のようなものである。そしてそれを伊原表示に書き換える過程 (c.f., [27]) が、特性多項式の因数分解に相当する段となっている。エムズ等 [5] は、グローバ行列の固有値 ± 1 の重複度と、それ以外の固有値をすべて記述したが、今野-佐藤 [15] は伊原表示がそれらを明快に表示することを主張している。

それにとどまらず、今野-佐藤の定理やそれを支える着眼点は、新たな問題群を惹起する。彼らの着想の根本は、グローバ行列が佐藤ゼータの辺行列の一例であることに着目した点であることはすでに述べた。しかしまたその一方で、グローバ行列は佐藤ゼータの辺行列の一例でしかないこと、さらに佐藤ゼータは組合せ論的ゼータの一例であること、ゆえにグローバ行列以外の辺行列に対しても

「今野-佐藤型定理」

を考える余地があること、すなわち「一般の辺行列」に対してそのユニタリ性を論じることに価値があること、に目を向けることになるのは自然なことであろう。後に触れるように、佐藤ゼータは組合せ論的なので、橋本表示をもつ。まず、この点が佐藤ゼータが組合せ論的であることの、ここでの意義となる。組合せ論的であるがゆえに橋本表示をもち、したがって伊原表示を構成する基盤が整う。しかしこれはなにも佐藤ゼータに限ったことではなく、一般の組合せ論的ゼータに対してもいえることである。そうすれば、橋本表示を持つグラフゼータに対して、その辺行列がユニタリであれば、それを時間発展行列とするグラフ上の量子ウォークが存在することになる。よってグローバ・ウォークの場合と同様に、このようにして得られる新たな量子ウォークモデルの族に対して、今野-佐藤型の定理を考えることができるであろう¹⁵。

本講演では、以上の内容に関して組合せ論的ゼータの設定から、量子ウォークに向けた展望までの概説を行う。なお、本講演は井出勇介（金沢工大）、石川彩香（横浜国大）、佐藤巖（小山高専）、瀬川悦男（横浜国大）との共同研究 [10] に基づく。

¹⁴橋本表示を記述する際に用いられる行列

¹⁵すでに石川 [12] により、一部結果が得られている

2 組合せ論的ゼータ

本稿冒頭でも述べたが、結論からいうと三種の表示のなかでは橋本表示が最強で指数表示が最弱である。すなわち、橋本表示は無条件でオイラー表示に書き換えることができるし、オイラー表示も無条件に指数表示に書き換えることができる。相変わらず詳細を語らずに恐縮であるが、ここではまず最弱の指数表示から話を始め、それぞれの表式の形を紹介しつつ、それがオイラー表示、そして橋本表示に書き換えることができるための条件を眺めてみたい。そのあとで、逆の含意が自明であることを紹介する。そこでまずは、指数表示が定式化できる必要最小限の設定から話を始めることにする。

2.1 有限集合族のゼータ

有限集合のなす族 $\mathcal{F} = \{X_m\}_{m \geq 1}$ があるとする。可換 \mathbb{Q} -代数 R に対し、写像 $\chi_m : X_m \rightarrow R$ が各 $m \geq 1$ に対して与えられているとする。記号 χ は $x \in X_m$ に対して $\chi_m(x) \in R$ を与える記号と定める。したがって、一般に $\chi : X \rightarrow R : x \mapsto \chi(x)$ は写像ではないが、便利なのでうまく機能するように用いていく。たとえば、 $N_m(\chi) = \sum_{x \in X_m} \chi(x)$ などは、矛盾なく意味が定まることに注意する。以下、この対応 χ を荷重とよぶことにする。不定元 t に対して以下で定義される形式的べき級数を $Z_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ であらわし、荷重 χ をもつ有限集合族 \mathcal{F} のゼータ函数という：

$$\exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{N_m(\chi)}{m} t^m \right).$$

後に現れる諸々の表示との兼ね合いも考慮し、この定義式を $Z_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ の指数表示とよぶことにする。以上の設定は、指数表示が定式化できる最小限の設定であることがご理解いただけると思う¹⁶。したがって、この段階ではオイラー表示や橋本表示の存在は、なんら保証されていないことに注意する。

和集合 $X = \cup_{m \geq 1} X_m$ とその元 $x \in X$ に対して、正整数 m が $x \in X_m$ を満たすとき、 m を x の周期¹⁷ とよぶことにする。また、 $x \in X$ の周期の最小値を $\varpi(x)$ であらわし、これを x の素周期とよぶ。このとき自明に $x \in X_{\varpi(x)}$ であるが、 $x \in X$ を $X_{\varpi(x)}$ の元とみたものを x の素節とよび $\pi(x)$ であらわす。正整数 m を $x \in X$ の周期とする。このとき、正整数 k に対して km も x の周期のとき、すなわち $x \in X_{km}$ のとき、 X_{km} の元とみた x を x の k -乗とよび、 x^k であらわす。

¹⁶よりゆかい設定も可能だが、ここでは既存の組合せ論的ゼータを考慮した若干の制約を設けている。

¹⁷周期は $x \in X$ に対し一意的にはさだまらない。

有限集合族 $\mathcal{F} = \{X_m\}$ と和集合 $X = \cup_m X_m$ の上の同値関係 \sim , および対応 $\chi : X \rightarrow R$ に関する以下の4つの条件 (E1), (E2), (E3), (E4) を, 合わせて (E) であらわしオイラー条件とよぶことにする. オイラー条件 (E) が満たされるとは, (E1) から (E4) のすべての条件がみたされることをいう. (E1) における (m, n) は最大公約数をあらわす:

$$(E1) \quad X_m \cap X_n = X_{(m,n)},$$

$$(E2) \quad \chi(x^k) = \chi(x)^k \text{ if } \exists x^k,$$

$$(E3) \quad \chi(x) = \chi(y) \text{ and } \varpi(x) = \varpi(y) \text{ if } x \sim y,$$

$$(E4) \quad \varpi(x) = \#\{y \in X_m \mid x \sim y\} \text{ for } x \in X_m.$$

同値関係 \sim に対し, $x \in X$ を代表元とする同値類を $[x]$ であらわすことにする. オイラー条件 (E) が成立すれば, t を不定元とする形式的べき級数

$$\prod_{[x] \in \mathcal{X}} \frac{1}{1 - \chi(\pi(x))t^{\varpi(x)}}$$

は矛盾なく定義される. この形式的べき級数を $E_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ で表す. 以下の等式が成立する. この表式 $E_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ を有限集合族のゼータ $Z_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ のオイラー表示とよぶ.

定理 1 ([19]) オイラー条件 (E) が成立すれば, 次の等式が成立する: $Z_{\mathcal{F}}(t; \chi) = E_{\mathcal{F}}(t; \chi)$.

橋本表示の構成にはさらに条件が必要である. 以下, $(\mathcal{F}, \chi, \sim)$ に対してオイラー条件を仮定する. オイラー条件に加えてさらに以下の条件を仮定する. 有限全順序集合 \mathfrak{A} に対し, \mathfrak{A} を文字集合とする語全体のなす集合を \mathfrak{A}^* で表す (c.f., [18]). 語 $w = a_1 a_2 \cdots a_m \in \mathfrak{A}^*$ に対して, 非負整数 m ¹⁸ を w の長さおよび, 記号 $|w|$ であらわす. \mathfrak{A} に添字付けられた R -成分の行列 $M = (m_{aa'})_{a, a' \in \mathfrak{A}}$ に対し, 語 $w = a_1 a_2 \cdots a_m \in \mathfrak{A}^*$ に沿った循環積

$$m_{a_1 a_2} m_{a_2 a_3} \cdots m_{a_{m-1} a_m} m_{a_m a_1}$$

を $\text{circ}_M(w)$ であらわすことにする. 写像 $\omega : X / \sim \rightarrow \text{Lyn}(\mathfrak{A})$ を考える. ただし, $\text{Lyn}(\mathfrak{A})$ は \mathfrak{A} を文字集合とする「リンドン語」の集合を表す. 語 $w = a_1 a_2 \cdots a_m$ がリンドン語であるとは, \mathfrak{A} の全順序から定まる辞書式順序に関して, w の m 個の巡回置換のなかで, w が最小である場合をいう. リンドン語の詳細については [18] を参照してもらいたい. 以下に挙げる4つの条件 (H1), (H2), (H3), (H4) を, 合わせて (H) であらわし橋本条件とよぶことにする. 橋本条件 (H) が満たされるとは, (H1) から (H4) のすべての条件がみたされることをいう:

¹⁸ \mathfrak{A}^* の元に空語 \emptyset を考える場合には, その長さは 0 とする.

(H1) ω は単射,

(H2) $\text{circ}_M(l) \neq 0 \Rightarrow l \in \text{Im } \omega$ for $l \in \text{Lyn}(\mathfrak{A})$

(H3) $\text{circ}_M(\omega(x)) = \chi(\pi(x))$ for $\forall [x] \in X/\sim$,

(H4) $|\omega(x)| = \varpi(x)$ for $\forall [x] \in X/\sim$.

以上の設定のもと, 形式的ベキ級数

$$\frac{1}{\det(I - tM)}$$

を $H_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ であらわすことにする. オイラー条件 (E) と橋本条件 (H) が成立すれば, 以下の等式が成立する. この表式 $H_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ を有限集合族のゼータ $Z_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ の橋本表示とよぶ¹⁹.

定理 2 ([19]) オイラー条件 (E) と橋本条件 (H) が成立すれば, 次の等式が成立する: $Z_{\mathcal{F}}(t; \chi) = H_{\mathcal{F}}(t; \chi)$.

以上, 指数表示をオイラー表示や橋本表示に書き換えるために必要な条件を眺めてきた. 逆に, 橋本表示は無条件でオイラー表示, そして指数表示に書き換えることができる. まずは次のフォアタ=ザイルベルガーによる結果を紹介する²⁰:

命題 3 ([6]) 有限全順序集合 \mathfrak{A} で添字付けられた可換成分の行列 $M = (a_{aa'})_{a, a' \in \mathfrak{A}}$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\frac{1}{\det(I - M)} = \prod_{l \in \text{Lyn}(\mathfrak{A})} \frac{1}{1 - \text{circ}_M(l)}.$$

この等式により, 橋本表示 $H_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ が無条件でオイラー表示 $E_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ に書き換えることができることは明らかであろう. また, オイラー表示 $E_{\mathcal{F}}(t; \chi) = \prod_{[x] \in \mathcal{X}} (1 - \chi(\pi(x))t^{\varpi(x)})^{-1}$ が与えられたとき, $N_m = \sum_{\substack{[x] \in X/\sim \\ \varpi(x) | m}} \varpi(x) \chi(\pi(x))^m$ とおくことにより, オイラー表示 $E_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ はいつでも指数表示 $E_{\mathcal{F}}(t; \chi) = \exp(\sum_{m \geq 1} N_m t^m / m)$ に書き換えることができる. また, $N_m = \text{tr } M^m$ とおくことにより, 橋本表示を指数表示に直接書き換えることもできる.

¹⁹ オイラー条件より Z は E に書き換えられ, さらに橋本条件により E が H に書き換えられる.

²⁰ 「リンドンの分解定理」(c.f., [18]) により, 右辺はオイラー積とみなせる.

2.2 組合せ論的ゼータ

有限全順序集合 \mathfrak{A} , および \mathfrak{A} に成分をもつ両側無限列全体のなす集合 $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ を考える. 集合 $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ の左シフトを φ であらわす: $\varphi: \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}: (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (a_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. いま, $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ の部分集合 Ξ で φ -不変なもの, すなわち $\varphi(\Xi) \subset \Xi$ をみたまものが与えられたとする²¹. 以下, 制限 $\varphi|_{\Xi}$ を λ であらわす. また, λ に関する m -周期点全体のなす集合を X_m であらわせば²², 和集合 $X = \cup_{m \geq 1} X_m$ は周期点全体の集合をあらわすことになる. このとき, 対 (X, λ) を力学系とみなせば, X 自身は一般に無限集合であるが, 各周期点の集合 X_m は有限集合になっている²³. このような力学系を擬有限力学系とよぶことにする. 写像

$$\theta: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow R$$

が与えられたとき, $x = (a_i) \in X_m$ に対して 循環積 $\theta(a_1, a_2)\theta(a_2, a_3) \cdots \theta(a_m, a_1)$ を $\text{circ}_{\theta}(x)$ であらわす²⁴. 2つの周期点 $x, y \in X$ が同値 $x \sim y$ であることを, x と y が力学系 (X, λ) において同じ軌道に属する, すなわち $\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t., $y = \lambda^k(x)$ の場合という. 以上で, 有限集合族 $\mathcal{F} = \{X_m\}_{m \geq 1}$, 荷重 $\chi = \text{circ}_{\theta}$, 和集合 $X = \cup_m X_m$ 上の同値関係 \sim が出揃った. そこでゼータを考える. 特に, 上記の設定に対して定義した有限集合族のゼータを $Z_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ を,

$$Z_{\Xi}(t; \theta)$$

であらわすことにする. これに応じてオイラー表示 $E_{\mathcal{F}}(t; \chi)$, 橋本表示 $H_{\mathcal{F}}(t; \chi)$ も, それぞれ $E_{\Xi}(t; \theta)$, $H_{\Xi}(t; \theta)$ であわそう. ただし, 橋本表示に用いる辺行列は $M = (\theta(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$ で与えられる. すると, 対 $(\mathcal{F}, \chi, \sim)$ はオイラー条件と橋本条件を満たすことが示され, 三種の表示の鼎立を得る²⁵.

定理 4 ([19]) $Z_{\Xi}(t; \theta) = E_{\Xi}(t; \theta) = H_{\Xi}(t; \theta)$.

以上の設定のもと, かくの如く構成されるゼータ $Z_{\Xi}(t; \theta)$ を組合せ論的ゼータとよぶ. したがって, 組合せ論的ゼータは三種の表示をもつ.

既存のグラフゼータはすべて組合せ論的である. 有限有向グラフ Δ が与えられたとき, 上記設定における \mathfrak{A} は Δ の有向辺集合にとる. 頂点 u から頂点 v にむかう有向辺 $a = (u, v)$ に対して, u を a の尾, v を頭とよび, それぞれ $t(a)$, $h(a)$ であらわすことにする. 更に, Ξ としては有向辺の両側無限列 $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ のうち, 「両側無限路」全体 Π_{Δ} , あるいは

²¹これは議論に柔軟性をもたせるための設定である.

²² $X_m = \{x \in \Xi \mid \lambda^m(x) = x\}$

²³ $|X_m| \leq |\mathfrak{A}|^m$ である.

²⁴本来任意の k に対して, $\theta(a_k, a_{k+1})\theta(a_{k+1}, a_{k+2}) \cdots \theta(a_{k+m}, a_k)$ で定義する. $x \in X_m$ なのでこれで矛盾なく定義される.

²⁵正確には Ξ に対する θ の「路条件」が必要 [19] だが, 形式的な条件なので省略する.

「両側被約無限路」 Π_{Δ}^b になっているもの等を考えればよい. 両側無限列 $(a_i) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ が路であるとは, すべての i に対して $\mathfrak{h}(a)_i = \mathfrak{t}(a_{i+1})$ となっている場合²⁶. また, 被約であるとは, すべての i に対して $a_{i+1} \neq a_i$ となっている場合²⁷. いずれにしても, Π_{Δ} , Π_{Δ}^b ともに λ -不変であることは容易に理解できるであろう. $\Xi = \Pi_{\Delta}^{(b)}$ の m -周期点のなす集合 X_m は, Δ における長さ m の (被約) 閉路全体の集合 $C_m^{(b)}$ と同一視することができる²⁷. また, 写像 θ としては, 以下にあげる形のもの²⁸ を考える. ただし, τ, v は \mathfrak{A} から R への写像である:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow R : (a, a') \mapsto \tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - v(a')\delta_{a^{-1}a'}.$$

ここで, δ はクロネッカーのデルタをあらわす. 以下, この θ を θ^{GS} であらわし, 組合せ論的ゼータ $Z_{\Xi}(t; \theta^{\text{GS}})$ を一般佐藤ゼータ²⁸ とよぶ²⁹. 既存のグラフゼータはすべて一般佐藤ゼータである. 以下, 有向グラフ Δ は, 有限グラフ Γ の「対称有向グラフ」(c.f., [22]) とする. ここで $\tau = v = 1$ とすると伊原ゼータ [11] となるし, $v = 1$ の場合は佐藤ゼータ [21], またパラメータ q に対して $\tau = 1, v = 1 - q$ とおくとバーソルディ・ゼータ³⁰ [3] が得られる. その他の場合も, τ, v を適切に設定することにより得ることができる. これらのゼータはかようにして組合せ論的であるから一括して三種の表示, とくに橋本表示をもつ. そして伊原表示の構成が次の問題となるが, 一般佐藤ゼータに対してその伊原表示を構成することができれば, 既存のゼータに対して伊原表示を構成する議論を, すべて包括的に扱うことが可能になる. そして, 本稿の主結果はこれを有限グラフの対称有向グラフに対して行う.

3 主結果

3.1 伊原表示

ここでは結果のみを眺めておきたい. 詳細は井手他 [10] を参照してほしい. Γ は有限単純グラフとし, その対称有向グラフを $\Delta = \Delta(\Gamma)$ であらわす. Δ の頂点集合を V , 有向辺集合を \mathfrak{A} であらわす. 頂点 $u, v \in V$ に対して, $\mathfrak{A}_{uv} = \{a \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{t}(a) = u, \mathfrak{h}(a) = v\}$, $\mathfrak{A}(u, v) = \mathfrak{A}_{uv} \sqcup \mathfrak{A}_{vu}$ とおく³¹. また, $\theta = \theta^{\text{GS}}$, $\Phi_{\Gamma} = \{(u, v) \mid \mathfrak{A}(u, v) \neq \emptyset\}$ とおく. 各 $(u, v) \in \Phi_{\Gamma}$ に対して次の行列を考える: $J^{\theta}(u, v) = (v(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a, a' \in \mathfrak{A}(u, v)}$, $K^{\theta}(u, v) =$

²⁶ 頂点 u から頂点 v にむかう有向辺 $a = (u, v)$ に対して, u を a の尾, v を頭とよぶ.

²⁷ 長さ m の閉路を両側無限に反復複製していけばよい.

²⁸ あるいは一般荷重ゼータとよぶ.

²⁹ 一般の写像 $\theta: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow R$ に対する組合せ論的ゼータを, 普遍グラフゼータとよんでいる.

³⁰ 佐藤巖の命名による.

³¹ 頂点集合 V に全順序 $<$ をあらかじめ設定しておき, $\mathfrak{A}(u, v)$ と書いたらつねに $u < v$ であると規約しておく.

$(\delta_{h(a)q})_{a \in \mathfrak{A}(u,v), q \in V}$, $L^\theta(u, v) = (\tau(a')\delta_{pt(a')})_{p \in V, a' \in \mathfrak{A}(u,v)}$. ここで Δ は有限単純グラフの対称有向グラフであることを思い出す. すなわち $\mathfrak{A}(u, v)$ は空でなければその元の個数は 2 であるので, $J^\theta(u, v)$ の型は 2×2 であることに注意する. さらに $(u, v) \in \Phi_\Gamma$ に対して, 2 次の正方行列 $T^\theta(u, v) = I_2 + tJ^\theta(u, v)$ を考え, その行列式を $\Delta^\theta(u, v)$ とおく³².

これらを用いてさらに次の行列を定義する:

$$\begin{aligned} A_\Gamma^\theta &= (1 - t^2)^{-1} \sum_{(u,v) \in \Phi_\Gamma} \Delta^\theta(u, v)^{-1} L^\theta(u, v) K^\theta(u, v), \\ D_\Gamma^\theta &= (1 - t^2)^{-1} \sum_{(u,v) \in \Phi_\Gamma} \Delta^\theta(u, v)^{-1} L^\theta(u, v) J^\theta(u, v) K^\theta(u, v). \end{aligned}$$

前者を有限グラフ Γ の荷重隣接行列, 後者を荷重次数行列とよぶ. 以下が本稿の主定理である. $\Xi = \Pi_\Delta$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$ の場合には, 組合せ論的ゼータ $Z_\Xi(t; \theta)$ を $Z_\Gamma(t; \theta)$ であらわすことにする. また, $\Delta^\theta = \prod_{(u,v) \in \Phi_\Gamma} \Delta^\theta(u, v)$ とおく.

定理 5 ([10]) 有限単純グラフ Γ に対し, 次の等式が成立する:

$$Z_\Gamma(t; \theta) = \frac{1}{\Delta^\theta \det(I - tA_\Gamma^\theta + t^2D_\Gamma^\theta)},$$

ただし θ は θ^{GS} をあらわす.

この等式の右辺を $Z_\Gamma(t; \theta)$ の伊原表示という. これは既存のグラフゼータの伊原表示に関する結果を統括する. たとえば, 伊原ゼータの場合, すなわち θ^{GS} において $\tau = \nu = 1$ の場合, 定理 5 の等式は, 伊原ゼータの伊原表示 [2, 11] に一致する. 簡単に触れておこう. 有限単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ ³³ の通常の隣接行列と次数行列を, それぞれ A_Γ, D_Γ であらわすことにすると, 次が成り立つ:

命題 6 $\theta = \theta^{\text{GS}}$ に対し, $A_\Gamma^\theta|_{\tau=\nu=1} = (1 - t^2)^{-1}A_\Gamma$, $D_\Gamma^\theta|_{\tau=\nu=1} = (1 - t^2)^{-1}D_\Gamma$.

伊原ゼータは $\theta^{\text{I,b}} := \theta^{\text{GS}}|_{\tau=\nu=1}$ に対する組合せ論的ゼータ $Z_\Gamma(t; \theta^{\text{I,b}})$ であるので, これに基づき定理 5 の等式右辺に少し計算を施せば

$$Z_\Gamma(t; \theta^{\text{I,b}}) = \frac{1}{(1 - t^2)^{|E|-|V|} \det(I - tA_\Gamma + t^2D_\Gamma)}$$

を得る. これは伊原ゼータの伊原表示としてよく知られた式である.

³² \mathfrak{A}_{uv} の元を a_{uv} であらわすと, $\Delta^\theta(u, v) = 1 - \nu(a_{uv})\nu(a_{vu})t^2$ となる. ちなみに, $a_{vu} = a_{uv}^{-1}$ (逆アーク) である.

³³ V は頂点集合, E は辺集合.

3.2 展望～量子ウォークの視点から

本稿のおわりに、近年になり今野-佐藤 [15] によって指摘された、グラフゼータと量子ウォークの関連と、そこから得られる展望について触れておきたい。主題は「グローバール・ウォーク」である。グローバール・ウォークとは有限単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ 上定義される離散時間量子ウォークで、その時間発展はグローバール行列により記述される。グローバール行列を定義しよう。有向グラフ $\Delta = (V, \mathfrak{A})$ は Γ の対称有向グラフ $\Delta = \Delta(\Gamma)$ とする。このとき、各 $a, a' \in \mathfrak{A}$ に対して

$$u_{aa'} = \begin{cases} \frac{2}{\deg t(a')} - \delta_{a^{-1}a'}, & \text{if } h(a) = t(a'), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とおく。ただし、 $\deg v$ は頂点 $v \in V$ の次数³⁴を表す。このとき、正方行列 $U_\Gamma = (u_{aa'})_{a, a' \in \mathfrak{A}}$ を Γ のグローバール行列とよび、 U_Γ により時間発展が記述される Γ 上の量子ウォークをグローバール・ウォークという (c.f., [13, 14])。

エムズ等 [5] は、グローバール行列 U_Γ のスペクトラム $\text{Spec}(U_\Gamma)$ を決定した。彼らの結果はグラフの同型問題に動機を求めるものであるが、本稿冒頭でも簡単に触れたように、時間発展行列のスペクトラムは量子ウォークの観点からも重要性が認識されており、その面からも興味を喚起するものであった。エムズ等 [5] をうけ、今野-佐藤 [15] は、特性多項式 $\det(tI - U_\Gamma)$ の興味深い記述をあたえた。行列 $W_\Gamma = (w_{uv})_{u, v \in V}$ は、成分が $w_{uv} = \delta(\{u, v\} \in E) / \deg u$ であたえられる $|V|$ -次正方行列とする³⁵。

命題 7 (今野-佐藤, 2011) $\det(tI - U_\Gamma) = (t^2 - 1)^{|E|-|V|} \det((t^2 + 1)I - 2tW_\Gamma)$.

この等式の右辺は、本質的に佐藤ゼータ [21] の伊原表示である。佐藤ゼータ $Z_\Gamma(t; \theta^S)$ は、写像

$$\theta^S : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow A : (a, a') \mapsto \tau(a')\delta_{h(a)t(a')} - \delta_{a^{-1}a'}$$

により定義される組合せ論的ゼータであり、その橋本表示 $H_\Gamma(t; \theta^S)$ の辺行列は、 $M_\Gamma^S = (\theta^S(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$ であたえられる。よって、写像 $\tau : \mathfrak{A} \rightarrow R$ を $\tau(a') = 2 / \deg t(a')$ にとれば、辺行列 M_Γ^S はグローバール行列 U_Γ に一致する。したがって、橋本表示 $H_\Gamma(t; \theta^S)$ の分母は、グローバール行列の反転特性多項式 $\det(I - tU_\Gamma)$ であり、定理 5 を用いれば、これは $\Delta^\theta \det(I - tA_\Gamma^\theta + t^2 D_\Gamma^\theta)$ に書き換えることができる。ただし、ここでは $\theta = \theta^S$ としている。あとは、 t を $1/t$ に置き換えて簡単な計算を施せば、今野-佐藤の定理 (命題 7) を得る。

³⁴ Γ において頂点 v からでている辺の本数のこと。

³⁵ 記号 $\delta(\{u, v\} \in E)$ はクロネッカー・デルタ。 $\{u, v\}$ が Γ の辺であれば 1, そうでなければ 0 を与える。

今野-佐藤の定理は、ある興味深い観点をあたえる。この定理に至る経緯を逆から眺めれば、「グラフゼータの（あるいは普遍グラフゼータ³⁶）の辺行列は、グラフ上の量子ウォークの時間発展行列になりうる」と読むことができよう。すなわち、写像 $\theta: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、行列 $M = (\theta(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$ がユニタリ行列となる条件をあたえればよい。事実、すでに石川 [12] により、その部分的な結果が得られており、そこではグローバー・ウォークを含むグラフ上の量子ウォークの族が姿をあらわしている。今後はそれらの挙動の解析が待たれるところであろう。

謝辞 本講演が基づく研究の過程においては、今野紀雄氏（横浜国立大学）から多大な啓発を受けた。この場を借りて氏に深い感謝の念を捧げる。

References

- [1] M. Artin and B. Mazur, On periodic points, *Ann. Math.*, **81** (1965), 82-99.
- [2] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice, *Internat. J. Math.*, **3** (1992), 717-797.
- [3] L. Bartholdi, Counting paths in graphs, *Eiseign. Math.* **45** (1999), 83-131.
- [4] Y. Choe, J. H. Kwak, Y. S. Park and I. Sato, Bartholdi zeta and L -functions of weight digraphs, their coverings and products, *Adv. Math.* **213** (2007), 865-886.
- [5] D. Emms, E. Hancock, S. Severini and R. Wilson, A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant, *Electr. J. Comb.*, **13** (2006).
- [6] D. Foata and D. Zeilberger, A combinatorial proof of Bass's evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351** (1999), 2257-2274.
- [7] C. Godsil, K. Guo, Quantum walks on regular graphs and eigenvalues, *Electr. J. Combin.* **18** (2011), # P165.
- [8] K. Hashimoto, On the zeta- and L -functions of finite graphs, *Internat. J. Math.*, **1** (1990), 381-396.

³⁶ 脚注 29 参照。

- [9] Y. Hattori and H. Morita, Ruelle zeta functions for finite dynamical systems and Koyama-Nakajima's L -functions, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **92** (2016), 107-111.
- [10] Y. Ide, A. Ishikawa, H. Morita, I. Sato and E. Segawa, The Ihara expression for the generalized Sato zeta function of a finite simple graph, submitted.
- [11] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two projective linear group over p -adic fields, *J. Math. Soc. Japan*, **18** (1966), 219-235.
- [12] A. Ishikawa, A family of quantum walks associated with the generalized wighted zeta functions for finite graphs, preprint.
- [13] 今野紀雄, 量子ウォーク, 森北出版, 2014.
- [14] 今野紀雄・井手勇介編, 量子ウォークの新展開 - 数理構造の深化と応用, 培風館, 2019.
- [15] N. Konno and I. Sato, On the relation between quantum walks and zeta functions, *Quantum Inf. Process.* **11** (2012), no. 2, 341-349.
- [16] M. Kotani and T. Sunada, Zeta functions of finite graphs, *J. Math. Sci. U. Tokyo* **7** (2000), 7-25.
- [17] S. Koyama and S. Nakajima, Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization formulas, *Proc. Japan Acad.* **88** (2012), 115-120.
- [18] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Application **17**, Addison-Wesley, 1983.
- [19] H. Morita, Ruelle zeta functions for finite digraphs, submitted.
- [20] D. Ruelle, *Dynamical zeta functions for piecewise monotone maps of the interval*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [21] I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a graph, *Int. J. Algebra* **1** (2007), no. 5-8, 269-281.
- [22] 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 室蘭工業大学数理談話会報告集, 2011.
- [23] J. -P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, New York, 1980.

- [24] H. M. Stark and A. A. Terras, Zeta functions of finite graphs and coverings I, *Advances in Math.* **121** (1996), 124-165.
- [25] T. Sunada, *L-functions in geometry and some applications*, in *Lecture Notes in Math.*, vol. 1201, pp. 266-284, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [26] A. Terras, *Zeta functions of graphs - A stroll through the garden*, Cambridge University Press, 2011.
- [27] Y. Watanabe and K. Fukumizu, Graph zeta function in the Bethe free energy and loopy belief propagation, *Advances in Neural Information Processing Systems* 22, 2017-2025, MIT Press (2010).