

# 有限有向グラフに対する一般荷重ゼータ函数の伊原表示

横浜国立大学大学院理工学府数物・電子情報系理工学専攻

石川 彩香

Ishikawa Ayaka

Department of Mathematics, Physics, Electrical Engineering and Computer Science,  
Yokohama National University

## 1 概要

“伊原表示”とは、グラフゼータ函数でのみ定義されている行列式表示であり、“今野-佐藤の定理”以来、量子ウォークの性質の解析においても用いられている重要な表示である。これまでのグラフゼータ函数の大半は有限無向グラフに対して定義され、その伊原表示の導出が行われてきた。主題にある“一般荷重ゼータ函数”は、Morita [1] によって導入された有限有向グラフに対するグラフゼータ函数である。これはグラフゼータ函数の“指数表示”、“オイラー表示”、“橋本表示”の鼎立を議論するために、既存のグラフゼータ函数を特別な場合にもつよう定義されている。本稿では、一般荷重ゼータ函数が伊原表示をもつかを問題とする。

有向グラフ上でグラフゼータ函数を定義するためには、“逆アーク”の定義を見直す必要がある。無向グラフの場合は、各辺  $e = \{u, v\}$  を2つの互いに他の逆向きのアーク  $a_e = (u, v)$ ,  $a_e^{-1} = (v, u)$  に対応させた対称有向グラフに対して定義する。したがって、対称有向グラフの任意のアーク  $a$  には、対称有向化でペアとなった逆向きのアーク  $a^{-1}$  が唯一つ対応する。その逆向きのアークを  $a$  の逆アークと定義して扱っているのが従来のグラフゼータ函数である。しかし一般の有向グラフの場合、必ずしも逆向きのアークが存在するとも限らない。さらには、逆アークが一意に定まるとも限らない。本稿では、任意のアーク  $a$  に対して逆向きのアークを全て  $a$  の逆アークと定義することで、その問題点を解消した。したがって、逆向きのアークが存在しないアークには逆アークが存在しない。さらに、ループ  $a = (u, u)$  に対する逆アークは  $a$  を含む頂点  $u$  に接続するループ全てとなる。以上の設定に従って、一般荷重ゼータ函数の伊原表示を導出した。

グラフゼータ函数の研究の発端は、Ihara [2] により定義された  $2 \times 2$   $p$ -進特殊線形群のある離散群の共役類の数え上げに関するゼータ函数（伊原ゼータ函数）の研究である。Serre が伊原ゼータ函数は正則グラフに対するゼータ函数であることを指摘し、その後 Sunada は伊原ゼータ函数をグラフ理論的解釈により定義した。それを機に、Hashimoto [3], Bass [4], Bartholdi [5], Mizuno [6], Sato [7] をはじめとする多くの研究者により、様々なグラフに付随するグラフゼータ函数が定義・研究されてきた。近年では、量子ウォークとの関係についても研究されている。その切掛の一つが今野-佐藤の定理 [8] である。これは“佐藤ゼータ函数” [7] が“グローヴァーウォーク”の遷移行列の特性多項式を与えることを述べている。また、伊原表示は他の行列式表示よりも量子ウォークの性質を調べるのに適した表示であることも示した。グローヴァーウォークとはランダムウォークの量子化・非可換化である量子ウォークの代表的なモデルの一つである。量子探索に用いられることもあり、情報数学の分野をはじめとする多くの分野で広く研究されている。さらに、グローヴァーウォークはグラフの同型問題に関する予想 [9] にも関与している。今野-佐藤の定理はその予想の解決や、さらなるグラフ同

型問題の結果や予想にも寄与した。また、グローヴァーワークが佐藤ゼータに対応することに基づいて、一般荷重ゼータ函数に対応しうる量子ワークモデルの族を決定することに成功した [10]。その族にはグローヴァーワークや新たな量子ワークモデルも含まれている。今後の研究では、量子ワークとグラフゼータ函数は互いに発展の一助となり合うだろう。

以降、単に「ゼータ」と言えばグラフゼータ函数を指すこととする。

なお、本研究は森田英章（室蘭工大）、佐藤巖（小山高専）との共同研究 [11] に基づく。

## 2 導入

### 2.1 グラフの定義

集合  $V$  に対して  $E$  を 2 頂点の組  $\{u, v\}$  ( $u, v \in V$ ) を元にもつ集合とする。2 つの集合の組  $G = (V, E)$  を (無向) グラフといい、 $V, E$  の元をそれぞれ頂点、辺とよぶ。頂点  $u, v \in V$  に対し、 $a_{u,v}, \deg(u)$  を  $a_{u,v} := \#\{\{u, v\} \in E\}, \deg(u) := \#\{v \in V | \{u, v\} \in E\}$  とおく。行列  $A_G := (a_{u,v})_{u,v \in V}$ 、対角行列  $D_G := (\deg(u))_{u \in V}$  をそれぞれ  $G$  の隣接行列、次数行列とよぶ。2 頂点の順序対の集合  $\{(u, v) | u, v \in V\}$  の部分集合  $\mathfrak{A}$  を定めたとき、集合の対  $\Delta = (V, \mathfrak{A})$  を有向グラフといい、 $\mathfrak{A}$  の元をアーク (有向辺) とよぶ。アーク  $a = (u, v) \in \mathfrak{A}$  に対し、 $u, v$  をそれぞれ  $a$  の尾 (tail)、頭 (head) といい、 $t(a), h(a)$  で表す。単純グラフ  $G = (V, E)$  に対し、アークの集合を  $\mathfrak{A}_G = \{(u, v), (v, u) | \{u, v\} \in E\}$  とするとき、グラフ  $\Delta(G) = (V, \mathfrak{A}_G)$  を対称有向グラフという。これより無向グラフは有向グラフの特別な場合であるといえる。アークの列  $x = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  が道であるとは、 $h(a_i) = t(a_{i+1})$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) が成り立つものをいう。このとき、 $m$  を  $x$  の長さといい、 $l(x)$  で表す。さらに、道  $x$  を  $r$  個連結させたものを  $x^r$  で表す。 $h(a_m) = t(a_1)$  のとき、 $x$  を閉路といい、 $\Delta$  上の閉路全体の集合を  $X$ 、長さ  $m$  の閉路全体の集合を  $X_m$  で表す。 $x$  がそれより短い閉路の冪で表せない場合、 $x$  は素であるという。また、 $x$  が被約であるとは  $t(a_i) \neq h(a_{i+1})$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) かつ  $t(a_m) \neq h(a_1)$  となるものを指す。長さ  $m$  の巡回置換  $\sigma = (1, 2, \dots, m)$  に対し、 $x\sigma$  で  $(a_2, a_3, \dots, a_m, a_1)$  を定める。閉路  $x, x' \in X_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) に対し、 $x' = x\sigma^k$  となる  $k$  が存在するとき、 $x, x'$  は同値であるといい、この関係を  $x \sim x'$  で表す。 $\sim$  による閉路  $x$  の同値類  $\bar{x}$  をサイクルとよび、 $\Delta$  上の素サイクル全体の集合を  $\mathcal{P}_\Delta$  で表す。

### 2.2 一般荷重ゼータ函数

$R$  を可換  $\mathbb{Q}$  代数とする。写像  $\tau, v : \mathfrak{A} \rightarrow R$  に対し、写像  $\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow R$  を以下で定める：

$$\theta(a, a') = \tau(a')\delta_{h(a)t(a')} - v(a')\delta_{a^{-1}a'}.$$

ここで、 $\delta_{a^{-1}a'}$  ( $a, a' \in \mathfrak{A}$ ) は  $a, a'$  が互いに他の逆アークのとき 0、それ以外のとき 1 となる函数とする。

$\Delta$  上の被約閉路  $x = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  ( $a_i \in \mathfrak{A}$ ) に対し、その荷重を  $\text{circ}_\theta(x) = \theta(a_1, a_2)\theta(a_2, a_3)\dots\theta(a_m, a_1)$  で定める。 $N_m(\text{circ}_\theta)$  を  $\Delta$  上長さ  $m$  の被約閉路の荷重の和とし、 $\Delta$  に対する一般荷重ゼータ  $Z_\Delta(t; \theta)$  を以下で定める：

$$Z_\Delta(t; \theta) := \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{N_m(\text{circ}_\theta)}{m} t^m\right).$$

これを一般荷重ゼータ函数の指数表示とよぶ。

注意 1. 対称有向グラフ  $\Delta(G)$  に対する一般荷重ゼータ  $Z_{\Delta(G)}(t; \theta)$  について,  $\theta^{MS} = \theta|_{\tau=v}$  としたものが水野-佐藤ゼータ,  $\theta^S = \theta|_{v=1}$  としたものが佐藤ゼータ,  $\theta^I = \theta|_{\tau=v=1}$  としたものが伊原ゼータである. すなわち, 一般荷重ゼータはこれらを特別な場合にもつグラフゼータである.

グラフゼータを代表とする有限力学系の様々なゼータには指数表示の他に“オイラー表示”や“橋本表示”が存在する. Morita [1] はそれらのゼータの一般形となるゼータを与え, それがどのような条件を満たせばオイラー表示, 橋本表示を持つかを示した. さらに, 一般荷重ゼータがそれらの表示を常に持っていることも示している:

定理 1 (Morita [1]). 有限有向グラフ  $\Delta = (V, \mathfrak{A})$  について, 行列  $M = (\theta(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$  を定める. オイラー積  $E_{\Delta}(t; \theta)$  と行列式  $H_{\Delta}(t; \theta)$  を以下のようにおく:

$$E_{\Delta}(t; \theta) := \prod_{\mathfrak{x} \in \mathcal{P}_{\Delta}} \frac{1}{1 - \text{circ}_{\theta}(\mathfrak{x})t^{l(\mathfrak{x})}}, \quad (1)$$

$$H_{\Delta}(t; \theta) := \frac{1}{\det(I - tM)}. \quad (2)$$

このとき, 一般荷重ゼータについて以下の等式が成り立つ:

$$Z_{\Delta}(t; \theta) = E_{\Delta}(t; \theta) = H_{\Delta}(t; \theta).$$

式 (1) を一般荷重ゼータのオイラー表示, 式 (2) を橋本表示という.

## 2.3 今野-佐藤の定理

単純グラフ  $G = (V, E)$  に対して, 対称有向グラフ  $\Delta(G) = (V, \mathfrak{A})$  を考える. 可換環  $K$  上の  $n$  次正方行列全体の集合を  $\text{Mat}(n; K)$ ,  $K$  上の  $m \times n$  行列全体の集合を  $\text{Mat}(m, n; K)$  と書く. 行列  $U(G) \in \text{Mat}(|\mathfrak{A}|; \mathbb{R})$  の  $(a, a')$  成分をアーク  $a$  から  $a'$  へ移る振幅  $\frac{2}{\deg(\mathfrak{h}(a))} \delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a^{-1}a'}$  である遷移行列とする. この行列をグローヴァー遷移行列といい, これから定まる量子ウォークモデルをグローヴァーウォークという.

グラフ  $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$  が同型であるとは, 任意の頂点の隣接関係を保存する全単射  $f: V_G \rightarrow V_H$  が存在することを指し, これを  $G \simeq H$  で表す. Emms らはグラフの同型問題とグローヴァーウォークの関係性についての下記の予想を立てた.

予想 1 (Emms et al. [9]).  $G, H$  を強正則グラフとする.  $G$  のグローヴァー遷移行列を  $U(G)$  とする.

$$G \simeq H \iff \text{Spec}\{(U(G)^3)^+\} = \text{Spec}\{(U(H)^3)^+\}$$

この論文で Emms らは  $U(G), U(G)^+, (U(G)^2)^+$  の固有値を与えた. グローヴァー遷移行列から分かる通り, これは佐藤ゼータの橋本表示における行列  $M = (\theta(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$  であり, その固有多項式は橋本表示の逆関数で与えられる. この点に初めて着目した Konno and Sato は, グローヴァー遷移行列の固有多項式が佐藤ゼータで与えられることを明文化し, 今野-佐藤の定理と呼ばれる次の定理を示した:

定理 2 (Konno and Sato [8]).  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 位数  $m$  の辺集合  $E$  からなる連結グラフを  $G = (V, E)$  とおく. このとき,  $G$  のグローヴァー遷移行列  $U(G)$  の特性多項式は次の形で与えられる:

$$\det(\lambda I - U(G)) = \frac{(\lambda^2 - 1)^{m-n} \det((\lambda^2 + 1)D_G - 2\lambda A_G)}{\prod_{i=1}^n \deg(v_i)}.$$

Konno and Sato は固有多項式を伊原表示で与えることで、固有値  $\pm 1$  を重複度を含めて与える部分と、それ以外の固有値を与える固有多項式を分けて与えることを可能とした。

### 3 一般荷重ゼータの伊原表示

伊原表示は隣接行列や次数行列を用いた行列式表示である。一方、橋本表示はアーク位数次の行列による行列式表示である。対称有向グラフに対する伊原ゼータの伊原表示は以下の通りである：

**定理 3** (Ihara [2]). 有限単純グラフ  $G = (V, E)$  に対する対称有向グラフを  $\Delta(G)$  で表す。このとき、 $\Delta(G)$  に対する伊原ゼータ  $Z_{\Delta(G)}(t; \theta^I)$  は以下の表示をもつ：

$$Z_{\Delta(G)}(t; \theta^I) = \frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|} \det(I - tA_G + t^2(D_G - I))}.$$

これに対し、有限有向グラフに対する一般荷重ゼータの伊原表示は“荷重隣接行列”と“荷重次数行列”を用いて表される。

**定理 4** (I-Morita-Sato [11]).  $\Delta = (V, \mathfrak{A})$  を多重アークや多重ループを含む有限有向グラフとする。集合  $\mathfrak{A}_{uv}$  をアークの部分集合  $\{a \in \mathfrak{A} \mid t(a) = u, h(a) = v\}$  とおく。このとき、行列  $A_{\Delta}^{\theta} \in \text{Mat}(|V|; R)$ , 対角行列  $D_{\Delta}^{\theta} \in \text{Mat}(|V|, R)$  を次のように定義する：

$$\begin{aligned} (A_{\Delta}^{\theta})_{uv} &:= w(u, v) \sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}} \tau(a), \\ (D_{\Delta}^{\theta})_{uu} &:= \sum_{v \in V, u \neq v} w(u, v) \sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}, a' \in \mathfrak{A}_{vu}} \tau(a)v(a'), \\ \text{ただし, } w(u, v) &:= \begin{cases} \{1 - t^2 (\sum_{a' \in \mathfrak{A}_{vu}} v(a')) (\sum_{a'' \in \mathfrak{A}_{uv}} v(a''))\}^{-1} & u \neq v, \\ \{1 + t (\sum_{a' \in \mathfrak{A}_{uu}} v(a'))\}^{-1} & \text{その他.} \end{cases} \end{aligned}$$

また、 $\theta$  から定まる行列  $(v(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a, a' \in \mathfrak{A}}$  を  $J$  とおく。このとき、 $\Delta = (V, \mathfrak{A})$  に対する一般荷重ゼータに関して以下の等式が成り立つ：

$$Z_{\Delta}(t; \theta) = \frac{1}{\det(I + tJ) \det(I - tA_{\Delta}^{\theta} + t^2 D_{\Delta}^{\theta})}.$$

**注意 2.**  $A_{\Delta}^{\theta}, D_{\Delta}^{\theta}$  をそれぞれ荷重隣接行列、荷重次数行列とよぶ。実際、有限グラフ  $G$  に対して、等式

$$A_{\Delta(G)}^{\theta^I} = (1 - t^2)^{-1} A_G, \quad D_{\Delta(G)}^{\theta^I} = (1 - t^2)^{-1} D_G$$

が成り立つ。

*Proof.* 以下では定理 4 の証明を行う。行列  $M = (\theta(a, a'))_{a, a' \in \mathfrak{A}}$  に対し、

$$\begin{aligned} J &:= (v(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a, a' \in \mathfrak{A}} \\ K &:= (\delta_{h(a)v})_{a \in \mathfrak{A}, v \in V} \\ L &:= (\tau(a')\delta_{v t(a')})_{v \in V, a' \in \mathfrak{A}} \end{aligned}$$

とおくと  $M$  は  $KL - J$  で与えられる。行列  $A, B$  に対し  $\det(I - AB) = \det(I - BA)$  が成り立つことに注

意すると,  $Z_{\Delta}(t; \theta)$  は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned} Z_{\Delta}(t; \theta)^{-1} &= \det(I - t(KL - J)) \\ &= \det((I + tJ) - tKL) \\ &= \det(I - tKL(I + tJ)^{-1}) \det(I + tJ) \\ &= \det(I + tJ) \det(I - tL(I + tJ)^{-1}K). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで現れる行列  $I - tL(I + tJ)^{-1}K$  を計算して荷重隣接行列や荷重次数行列を導出する.

$u, v \in V$  に対し,  $\mathfrak{A}$  の部分集合  $\mathfrak{A}(u, v) := \mathfrak{A}(u, v) = \mathfrak{A}_{uv} \cup \mathfrak{A}_{vu}$  を定める. 各 2 頂点  $u, v \in V$  に対し,

$$\begin{aligned} J(u, v) &:= (v(a')\delta_{a^{-1}a'})_{a, a' \in \mathfrak{A}(u, v)} \\ K(u, v) &:= (\delta_{b(a)v})_{a \in \mathfrak{A}(u, v), v \in V} \\ L(u, v) &:= (\tau(a')\delta_{vt(a')})_{v \in V, a' \in \mathfrak{A}(u, v)} \end{aligned}$$

とおく. さらに, 頂点集合  $V$  に全順序を入れる. それに基づいて集合  $\mathfrak{A}$  に対しても順序を与える. 頂点  $u, v, w, x \in V$  について  $u \leq v, w \leq x, u \leq w$  のとき, アーク  $a \in \mathfrak{A}(u, v), a' \in \mathfrak{A}(w, x)$  の順序は  $a \leq a'$  と定める. さらに,  $a \in \mathfrak{A}_{uv}, a' \in \mathfrak{A}_{vu}$  に対する順序を  $a \leq a'$  とする. これらの順序に従って行列  $J, K, L$  を上で定めた小行列で分解できるように変形し, 計算することで, 次の等式が得られる:

$$L(I + tJ)^{-1}K = \sum_{u, v \in V, u \leq v} F(u, v),$$

ただし,  $F(u, v) := L(u, v)(I + tJ(u, v))^{-1}K(u, v).$

ここで,  $F(u, v)$  はその 2 頂点間の有向辺の集合  $\mathfrak{A}(u, v)$  の様相により, 以下の 3 種類の場合のどれかに分類される:

- (i) 相異なる 2 つの頂点  $u, v \in V$  に対し  $\mathfrak{A}(u, v) \neq \emptyset$  であり,  $\mathfrak{A}_{uv} = \emptyset$  または  $\mathfrak{A}_{vu} = \emptyset$ .
- (ii) 頂点  $u \in V$  に対し,  $|\mathfrak{A}(u, u)| = k \neq 0$
- (iii) 相異なる 2 つの頂点  $u, v \in V$  に対し  $|\mathfrak{A}_{uv}| = k \neq 0$  かつ  $|\mathfrak{A}_{vu}| = l \neq 0$

以下, この 3 つの場合に分けて  $F(u, v)$  を計算する.

- (i) の場合,  $J(u, v) = O$  であるから,  $F(u, v) = L(u, v)K(u, v) = \frac{L(u, v)K(u, v)}{\det(I + tJ(u, v))}$  となる.
- (ii) の場合, すなわち, 図 1 のループに対する  $F(u, u)$  を考える.

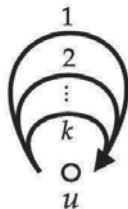


図 1 ループ

このとき、行列  $J(u, u), K(u, u), L(u, u)$  は以下ようになる:

$$J(u, u) = \begin{pmatrix} v(1) & \dots & v(k) \\ \vdots & & \vdots \\ v(1) & \dots & v(k) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(k; R),$$

$$K(u, u) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(k, 1; R),$$

$$L(u, u) = (\tau(1) \quad \dots \quad \tau(k)) \in \text{Mat}(1, k; R).$$

$(I + tJ(u, u))^{-1}$  を計算するために、次の定理を用いる:

**定理 5.** 正方行列  $A = (a_j)_{i,j \in [1,n]}$  に対し、 $\widehat{A} := (\text{tr}(A)I - A)$  とおく. このとき、

$$(I + tA)^{-1} = \frac{1}{\det(I + tA)}(I + t\widehat{A})$$

が成り立つ.

これより、 $(I + tJ(u, u))^{-1}$  は以下で与えられる:

$$\frac{1}{\det(I + tJ(u, u))} \{I + t\widehat{J(u, u)}\}.$$

$\widehat{J(u, u)}K(u, u) = O$  であることから、 $F(u, u)$  は

$$\frac{1}{\det(I + tJ(u, u))} L(u, u)K(u, u)$$

となる.

最後に、(iii) の場合について考える. すなわち、図 2 の逆アークが必ず 1 つ以上存在する二頂点間に対する  $F(u, v)$  を求める.

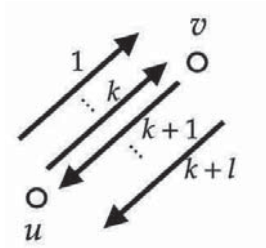


図 2 逆アークが必ず存在するアーク

行列  $J(u, v), K(u, v), L(u, v)$ , は以下ようになる:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} & & & v(k+1) & \dots & v(k+l) \\ & \mathbf{O} & & \vdots & & \vdots \\ v(1) & \dots & v(k) & v(k+1) & \dots & v(k+l) \\ \vdots & & \vdots & & & \mathbf{O} \\ v(1) & \dots & v(k) & & & \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(k+l; R),$$

$$K(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(k+l, 2; R),$$

$$L(u, v) = \begin{pmatrix} \tau(1) & \dots & \tau(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau(k+1) & \dots & \tau(k+l) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, k+l; R).$$

ここで、以下の定理を用いて計算を進める:

**定理 6 (Schur).** ブロック行列  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  ( $A, D$ : 正方行列,  $A$ : 正則) に対し,  $M$  の  $A$  に関する Schur 補行列  $D - CA^{-1}B$  を  $M/A$  で表す. このとき,  $M$  の逆行列と行列式は以下で与えられる:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\det M = \det A \det(M/A).$$

上記の  $M$  がある条件を満たすとき,  $M^{-1}$  の  $(1, 1)$ -ブロックの行列は次の定理を用いて簡単に表すことができる.

**定理 7 (Woodbury).** 定理 1 で用いた行列  $A, B, C, D$  について  $D$  が正則のとき,  $M$  の  $D$  に関する Schur 補行列を  $M/D = A - BD^{-1}C$  で定める. このとき, 以下の等式が成り立つ:

$$(M/D)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1}.$$

さらにこのとき, 定理 1 の  $M$  の行列式は以下で与えられる:

$$\det M = \det D \det(M/D).$$

この定理を用いて,  $(I + tJ(u, v))^{-1}$  は以下のように書ける:

$$(I + tJ(u, v))^{-1} = \begin{pmatrix} (I - t^2BC)^{-1} & -tB(I - t^2CB)^{-1} \\ -t(I - t^2CB)^{-1}C & (I - t^2CB)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$(I - t^2BC)^{-1}, (I - t^2CB)^{-1}$  を計算する. まず,  $BC, CB$  は

$$BC = (v(k+1) + \dots + v(k+l)) \begin{pmatrix} v(1) & \dots & v(k) \\ \vdots & & \vdots \\ v(1) & \dots & v(k) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(k; R),$$

$$CB = (v(1) + \dots + v(k)) \begin{pmatrix} v(k+1) & \dots & v(k+l) \\ \vdots & & \vdots \\ v(k+1) & \dots & v(k+l) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(l; R)$$

となる. 定理5を用いると,  $(I - t^2CB)^{-1}, (I - t^2BC)^{-1}$  は以下のように書ける:

$$(I - t^2CB)^{-1} = \frac{1}{\det(I - t^2CB)} (I + t^2\widehat{CB}) = \frac{1}{\det(I + tJ(u, v))} (I + t^2\widehat{CB}),$$

$$(I - t^2BC)^{-1} = \frac{1}{\det(I - t^2BC)} (I + t^2\widehat{BC}) = \frac{1}{\det(I + tJ(u, v))} (I + t^2\widehat{BC}).$$

さらに,  $B\widehat{CB} = O, \widehat{CB}C = O$  であることに注意すると,

$$-tB(I - t^2CB)^{-1} = \frac{-tB}{\det(I + tJ(u, v))}, \quad -t(I - t^2CB)^{-1}C = \frac{-tC}{\det(I + tJ(u, v))}.$$

これらの結果から,  $(I + tJ(u, v))^{-1}$  は次のように表せる:

$$(I + tJ(u, v))^{-1} = \frac{1}{\det(I + tJ(u, v))} \left\{ I + t^2 \begin{pmatrix} \widehat{BC} & O \\ O & \widehat{CB} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix} \right\}.$$

さらに,

$$\begin{pmatrix} \widehat{BC} & O \\ O & \widehat{CB} \end{pmatrix} K(u, v) = O$$

が成り立つことがすぐに分かる. よって,  $F(u, v)$  は

$$\frac{L(u, v)K(u, v)}{\det(I + tJ(u, v))} - t \frac{L(u, v)J(u, v)K(u, v)}{\det(I + tJ(u, v))}$$

で与えられる.

(i),(ii),(iii) の結果より,

$$\sum_{u, v \in V, u \leq v} F(u, v) = \sum_{u, v \in V, u \leq v} \frac{L(u, v)K(u, v)}{\det(I + tJ(u, v))} - t \sum_{u, v \in V, u < v} \frac{L(u, v)J(u, v)K(u, v)}{\det(I + tJ(u, v))}$$

となる.  $\det(I + tJ(u, v))^{-1} = w(u, v)$  であることから,

$$\begin{aligned} \left( \frac{L(u, v)K(u, v)}{\det(I + tJ(u, v))} \right)_{u, v} &= w(u, v) \sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}} \tau(a) = (A_{\Delta}^{\theta})_{u, v}, \\ \left( \frac{L(u, v)J(u, v)K(u, v)}{\det(I + tJ(u, v))} \right)_{u, v} &= \begin{cases} \sum_{v \in V, u \neq v} w(u, v) \sum_{a \in \mathfrak{A}_{uv}, a' \in \mathfrak{A}_{vu}} \tau(a)v(a') & u = v \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \\ &= (D_{\Delta}^{\theta})_{u, v}. \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より,

$$L(I + tJ)^{-1}K = A_{\Delta}^{\theta} - tD_{\Delta}^{\theta}$$

が成り立つ. これを式(3)に代入することで, 求めるべき等式が得られる. □



## 参考文献

- [1] H. Morita, “Ruelle zeta functions for finite digraphs,” *preprint*.
- [2] Y. Ihara, “On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields,” *Journal of the Mathematical Society of Japan*, vol. 18, no. 3, pp. 219–235, 1966.
- [3] K.-i. Hashimoto, “On zeta and l-functions of finite graphs,” *International Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 04, pp. 381–396, 1990.
- [4] H. Bass, “The ihara-selberg zeta function of a tree lattice,” *International Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 06, pp. 717–797, 1992.
- [5] L. Bartholdi, “Counting paths in graphs,” *Enseign. Math.*, vol. 45, no. math. CO/0012161, pp. 83–131, 1999.
- [6] H. Mizuno and I. Sato, “Weighted zeta functions of graphs,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 91, no. 2, pp. 169–183, 2004.
- [7] I. Sato, “A new bartholdi zeta function of a graph,” *International Journal of Algebra*, vol. 1, pp. 269–281, 2007.
- [8] N. Konno and I. Sato, “On the relation between quantum walks and zeta functions,” *Quantum Information Processing*, vol. 11, no. 2, pp. 341–349, 2012.
- [9] D. Emms, E. R. Hancock, S. Severini, and R. C. Wilson, “A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant,” *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 13, no. 1, p. 34, 2006.
- [10] A. Ishikawa, “A family of quantum walk on a finite graph corresponding to the generalized weighted zeta function,” *in preparation*.
- [11] A. Ishikawa, H. Morita, and I. Sato, “The ihara expression for a generalized weighted zeta function of bartholdi type for a finite digraph,” *in preparation*.