On the classification of dihedral axial algebras with flips

東京大学大学院数理科学研究科　矢部　貴大
Takahiro Yabe
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1　はじめに

axial algabra は、Greiss algebra や Majorana algebra を一般化するように [1] において定義された代数の一種であり、fusion rule によって定義される。2 元生成の Greiss algebra については [5]、Majorana algebra については [3] がその分類を行い、この結果は同じ fusion rule を持つ axial algebra についても成立することが [1] において示された。今回の成果は、fusion rule をより一般化した場合の分類を一定の条件下で行ったことである。

2　準備

以下 $\mathbb{F}$ は標数が 2 でない体とする。fusion rule とは、$\mathbb{F}$ の部分集合 S と写像 $\star : S \times S \mapsto 2^S$ の組 $\mathcal{F} = (S, \star)$ である。

$\mathbb{F}$ 上の可換非結合的代数 M の元 a が $\mathcal{F}$-axi s であるとは、以下の 3 条件を満たすことを言う。

(1) $M = \bigoplus_{\alpha \in \{1,0,\xi,\eta\}} M(a, \alpha)$ である。ここで $M(a, \alpha) = \{w \in M \mid aw = \alpha w\}$ for all $a \in M$ and $\alpha \in \mathbb{F}$ とする。
(2) $M(a, 1) = \mathbb{F}a$ である。
(3) $M(a, \alpha)M(a, \beta) \subset \bigoplus_{\gamma \in \alpha\star\beta} M(a, \gamma)$ が任意の $\alpha, \beta \in \quad S$ について成立する。

M とその部分集合 A の組が $\mathcal{F}$-axial algebra であるとは、A が M を生成し、A の元

が全て $\mathcal{F}$-axial algebra であることを言う。

以下 $\mathcal{F}$ は表 1 に従う fusion rule とし、M は二元 a_0、a_1 の生成する $\mathcal{F}$-axial algebra とする。

$\star$	0	1	ξ	η
0	0	0	ξ	η
1	0	0	ξ	η
ξ	ξ	ξ	$\{0,1\}$	η
η	η	η	η	$\{0,1,\xi\}$

表 1　fusion rule $\mathcal{F}(\xi,\eta)$

$(\xi,\eta)=(\frac{1}{4},\frac{1}{32})$ の時、Frobenius $\mathcal{F}$-axial algebra は Majorana algebra となる。

a_0 と a_1 を入れ替えるような M の代数としての同型が存在すれば、これを flip と呼んで θ と書く。また、$i=0,1$ について a_i の $1,0,\xi$-固有空間上では 1 倍、η-固有空間上では-1 倍として働く同型が存在し、これを Miyamoto involution と呼んで τ_i と書く。

このとき、$i\in\mathbb{Z}$ に対し $a_i=(\theta\circ\tau_0)^i(a_0)$ とおくと、これらはすべて axis であり、これらの張る M の部分空間の次元を axial dimension と呼んで以下単に D と書き、M の次元を単に d と書く。

3　主結果

主結果は次のようになる。

定理. *M が flip を持ち、$\mathcal{F}$ の標数が 5 でないか、$D\leq 5$ であるとき、M は表 2 の代数のいずれかと同型になる。*

この表において、$D\leq 3$、$d\leq 3$ である 5 個の代数は [2] において primitive axial algebra of Jordan type として定義、分類されたものであり、1A、2A、3C 等の Norton-Sakuma algebra を含むような 9 個の代数は [4] において最初に定義された。

この定理は、D の値と axis の線型関係式により場合分けして fusion rule から積を定めることで証明できる。

D	d	Universal types M	Quotients $\bar{M}$ of M	$\bar{D}$	$\bar{d}$
1	1	$\mathbb{F}$ i.e. 1A			
2	2	$\mathbb{F}\oplus\mathbb{F}$ i.e. 2B			
3	3	$3\mathrm{C}(\eta)$ cf. isomorphic to 2A when $\eta=\frac{1}{4}$ isomorphic to 3C when $\eta=\frac{1}{32}$	$3\mathrm{C}(-1)^{\times}$	2	2
		$\mathrm{Cl}^{00}(\mathbb{F}^2,b_2)$	$\mathrm{Cl}^{0}(\mathbb{F}^2,b_2)$		
		$\mathrm{Cl}^{J}(\mathbb{F}^2,b_\delta)$ with $\delta\neq 2$			
3	4	$\mathrm{III}(\xi,\eta,0)$ with $\xi\notin\{0,1,\frac{1}{2}\}$ and $\eta\notin\{0,1,\xi\}$ cf. isomorphic to 3A when $(\xi,\eta)=(\frac{1}{4},\frac{1}{32})$	$\mathrm{III}(\xi,\frac{1-3\xi^2}{3\xi-1},0)^{\times}$ with $\xi\notin\{\pm\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$	3	3
		$\mathrm{III}(\xi,\frac{1}{2},\alpha)$ with $\xi\notin\{0,1,\frac{1}{2}\}$	$\mathrm{III}(\xi,\frac{1}{2},-3)^{\times}$ $\mathrm{III}(-1,\frac{1}{2},\alpha)^{\times}$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}\neq 3$		
4	5	$\mathrm{IV}_1(\frac{1}{4},\eta)$ with $\eta\notin\{0,1,\frac{1}{4}\}$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}\neq 3$ cf. isomorphic to 4A when $\eta=\frac{1}{32}$	$\mathrm{IV}_1(\frac{1}{4},\frac{1}{2})^{\times}$	4	4
		$\mathrm{IV}_1(\xi,\frac{\xi}{2})$ with $\xi\notin\{0,1,2\}$	$\mathrm{IV}_1(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})^{\times}$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}\neq 3,5$		
		$\mathrm{IV}_2(\frac{1}{2},\eta,\frac{1-4\eta}{2\eta})$ with $\eta\notin\{0,1,\frac{1}{2}\}$			
		$\mathrm{IV}_2(\xi,\frac{\xi^2}{2},\frac{1}{\xi})$ with $\xi\notin\{0,1,2,\pm\sqrt{2}\}$ cf. isomorphic to 4B when $\xi=\frac{1}{4}$	$\mathrm{IV}_2(-1,\frac{1}{2},-1)^{\times}$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}\neq 3$	4	4
		$\mathrm{IV}_2(\xi,\frac{1-\xi^2}{2},\frac{-1}{\xi+1})$ with $\xi\notin\{0,\pm1,\pm\sqrt{-1},-1\pm\sqrt{2}\}$			
		$\mathrm{IV}_3(\frac{1}{2},2)$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}\neq 3$	$\mathrm{IV}_3(\frac{1}{2},2)^{\times}$	4	4
5	6	$\mathrm{V}_1(\xi,\frac{5\xi-1}{8})$ with $\xi\notin\{0,1,\frac{-1}{3},\frac{1}{5},\frac{9}{5}\}$ cf. isomorphic to 5A when $\xi=\frac{1}{4}$			
		$\mathrm{V}_2(\xi,\frac{1}{2})$ with $\xi\notin\{0,1,\frac{1}{2}\}$	$\mathrm{V}_2(\xi,\frac{1}{2})^{\times}$	4	5
6	8	$\mathrm{VI}_1(\xi,\frac{\xi}{2})$ with $\xi\notin\{0,1,2\}$	$\mathrm{VI}_1(\frac{-2}{7},\frac{-1}{7})^{\times}$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}\neq 7$	6	7
		$\mathrm{VI}_2(\xi,\frac{-\xi^2}{4(2\xi-1)})$ with $\xi\notin\{0,1,\frac{4}{9},\frac{2}{5},-4\pm2\sqrt{5}\}$ cf. isomorphic to 6A when $\xi=\frac{1}{4}$	$\mathrm{VI}_2(\frac{2}{3},\frac{-1}{3})^{\times}$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}\neq 3$ $\mathrm{VI}_2(\frac{1\pm\sqrt{97}}{24},\frac{53\pm5\sqrt{97}}{192})^{\times}$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}\neq 3,11$ and $\mathbb{F}\ni\sqrt{97}$ $\mathrm{VI}_2(2,-4)^{\times}$ when $\mathrm{ch}\mathbb{F}=11$		
∞	∞	$\mathrm{Z}(2,\frac{1}{2})$	many quotients		

表 2　flip を持つ dihedral (ξ,η)-axial algebras。ただし、$\bar{D}$ 及び $\bar{d}$ はそれぞれ $\bar{M}$ の axial dimension と次元である。

参考文献

[1] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Universal Axial Algebras and a Theorem of Sakuma, J. Algebra 421, (2015), 394-424.

[2] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Primitive axial algebras of Jordan type, J. Algebra 437 (2015), 79–115, arXiv:1403.1898.

[3] A. A. Ivanov, D. V. Pasechnik, Á. Seress, S. Shpectrov, Majorana representations of the symmetric group of degree 4, J. Algebra 324 (2010), 2432-2463

[4] F. Rehren, Generalized dihedral subalgebras from the Monster, Trans. Amer. Math. Soc. 369, (2017), no. 10, 6953-6986.

[5] S. Sakuma, 6-Transposition Property of τ-involutions of Vertex Operator Algebras, Int. Math. Res. Not. 2007, no. 9, Art. ID mm 030, 19pp.