古典直交多項式の零点と球面デザイン論への応用

澤　正憲　(神戸大学)*

1. 序

本稿では，Waring 問題の Hilbert [15] による解の別証明を与えた Hausdorff の結果 [14] に端を発する次の不定方程式系の求解問題（問題 1.1）を考える．Hausdorff の仕事について簡潔にまとめている文献として Nesterenko [18] を挙げておく．

問題 1.1. 自然数 m, n に対して

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i^j = \int_a^b t^j w(t)\, dt, \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

を満たす $x_1, \ldots, x_m,\ y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{Q}$ を見つけよ．ただし，w は区間 (a, b) 上の密度関数で，a, b, w は右辺のモーメントがすべて有理数になるものとする．

不定方程式 (1) が有理数解をもつことと，ノードと重みが有理数の quadrature 公式（以下，quadrature と称する）が存在することと，準直交多項式のすべての根が有理数になることは同値である．後半の二つの主張の等価性は解析学における Riesz-Shohat の定理から導かれる (後述の定理 1.5)．前半の二つの主張の等価性は積分と有限和の線形性からわかる．不定方程式 (1) を quadrature に読み換えることで主問題にもたらされる恩恵として，例えば，quadrature のノードの個数に関する Fisher 型不等式を用いて不定方程式 (1) が解をもつならば $n \le 2m-1$ でなければならないことがわかる．等号成立の場合は Gaussian quadrature が対応する．Gaussian quadrature のノードが直交多項式の零点になるという事実は quadrature 公式論の古典の一つである．

不定方程式 (1) に関する先行研究を二つおさえておく．

(1) $\mathbb{R}$ 上の $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$．詳細は割愛するが，Hausdorff の結果から，$n = m-1$ の場合は肯定的に解決されている．一方，Schur [22] は Hermite 多項式が $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示しており（厳密には $\mathbb{Q}$ 上既約になるのは偶数次数の Hermite 多項式 $H_{2k}(x)$ のみで，奇数次数の場合は $H_{2k+1}(x)/x$ が $\mathbb{Q}$ 上既約になる），$n = 2m-1$ の場合には (1) 式が有理数解をもつことはない．つまり $m \le n \le 2m-2$ の場合が考察対象となる．

(2) 区間 $(-1, 1)$ 上の一様測度 $\frac{1}{2} dt$．この場合は Jacobi 多項式の特殊化である Legendre 多項式が対応する．Holt [16] の結果より，Legendre 多項式は $\mathbb{Q}$ 上で一次因子をもたないため，$n = 2m-1$ の場合には (1) 式が有理数解をもつことはない．一方，Hausdorff の議論と同様にして（詳細は割愛する），$n = m-1$ の場合には有理数解の存在が示される．つまり $m \le n \le 2m-2$ の場合が考察対象となる．

本研究は科研費 (課題番号:18K03414, 18H01133, 15H03636) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 05E99, 11D72, 33C45, 65D32
キーワード：球面デザイン，quadrature，Christoffel-Darboux 核，古典直交多項式，Newton 多角形
* 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1　神戸大学 大学院システム情報学研究科
e-mail: `sawa@people.kobe-u.ac.jp`

Hermite 多項式，Legendre 多項式はいずれも古典直交多項式の一種である．古典直交多項式は Liouville-Strum 微分方程式の固有関数であるなど種々の興味深い解析的性質を有している [26].

本稿では，古典直交多項式が付随しモーメントが有理数であるような線形汎関数 $\int_a^b \cdot w(t)dt$ に着目し，また $n = 2m-2$ の場合に的を絞って，主問題 1.1 への幾つかのアプローチとそれらに関連する結果を報告する．本稿に記載されている内容の多くは内田幸寛氏 (首都大学東京) との共著論文 [20, 21] に基づいている.

1.1. Riesz-Shohat 定理

区間 (a,b) 上の，モーメントが有限であるような正の Borel 測度 μ をとる（$\int_a^b d\mu = 1$ のように正規化しておく）．μ に関する直交多項式列を $\{\Phi_m\}_m$ とおく．つまり，多項式列 $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ は次の直交関係を満たしている.

$$\int_a^b \Phi_m(t)\Phi_{m'}(t)d\mu = 0, \quad m, m' = 0, 1, \ldots, \quad m \neq m'.$$

直交多項式系の中でも特に重宝されているクラスとして古典直交多項式がある．これらは，Strum-Liouville 微分方程式の固有関数のうち正定値線形汎関数が付随する多項式のクラスであり，Jacobi 多項式，Laguerre 多項式，Hermite 多項式の 3 種に分類されることが知られている ([5, 17] 参照).

Jacobi 多項式． 次で定められる次数 m の多項式 $P_m^{(\alpha,\beta)}$ を Jacobi 多項式と呼ぶ.

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(-1)^m}{2^m m!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^m}{dx^m}\left((1-t)^{m+\alpha}(1+t)^{m+\beta}\right), \quad \alpha, \beta > -1. \quad (2)$$

$P_m^{(\alpha,\beta)}$ は区間 $(-1,1)$ 上の重み $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ に関して直交し，次のような明示的表現をもつ.

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m+\alpha}{m-k}\binom{m+\beta}{k}\left(\frac{t-1}{2}\right)^k\left(\frac{t+1}{2}\right)^{m-k}. \quad (3)$$

Laguerre 陪多項式． 次で定められる次数 m の多項式 $L_m^{(\alpha)}$ を Laguerre 陪多項式と呼ぶ.

$$L_m^{(\alpha)}(t) = \frac{e^t t^{-\alpha}}{m!}\frac{d^m}{dt^m}(e^{-t}t^{m+\alpha}), \quad \alpha > -1. \quad (4)$$

特に $\alpha = 0$ の多項式を Laguerre 多項式と呼ぶ．多項式 $L_m^{(\alpha)}$ は区間 $(0,\infty)$ 上の重み $e^{-t}t^\alpha$ に関して直交し，次のような明示的表現をもつ.

$$L_m^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m+\alpha}{m-k}\frac{(-t)^k}{k!}. \quad (5)$$

Hermite 多項式． 次で定められる次数 m の多項式 H_m を Hermite 多項式と呼ぶ.

$$H_m(t) = (-1)^m e^{t^2}\frac{d^m}{dt^m}e^{-t^2}. \quad (6)$$

多項式 H_m は $\mathbb{R}$ 上の重み e^{-t^2} に関して直交し，次のような明示的表現をもつ．

$$H_m(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \frac{m!}{k!(m-2k)!} (2t)^{m-2k}. \tag{7}$$

Jacobi 多項式の特殊例として Gegenbauer 多項式や Chebyshev 多項式がある．これらは球面デザインの研究における主要な道具であり ([8] 参照)，本稿で扱う不定方程式 (1) の解の非存在結果にも関与してくる．古典直交多項式の基本的性質がまとめられている有名な書として Szegő [26] がある．本稿で扱われる古典直交多項式の性質の多くは Szegő の書の第 4 章, § 5.1, § 5.5 [26] に見られる．

直交多項式列 $\{\Phi_m\}_m$ が与えられたとき，

$$\Phi_{m,r}(t) = \Phi_m(t) + b_1\Phi_{m-1}(t) + \cdots + b_r\Phi_{m-r}(t), \qquad b_1, \ldots, b_{r-1} \in \mathbb{R},\ b_r \in \mathbb{R}_{>0}$$

の形の多項式を階数 r の準直交多項式と呼ぶ [27][1]．便宜的に $\Phi_{m,0}(t) = \Phi_m(t)$ とおく．定義から容易にわかるように，多項式 $\Phi_{m,r}$ は次数 $m-r-1$ 以下のすべての多項式と直交する．準直交多項式の性質の多くは直交多項式のそれを薄めたものになるが，中には次の命題のように，階数 1 の場合に直交多項式からそのまま受け継がれる性質もある．

命題 1.2 ([26], Theorem 3.3.4). 任意の実数 b_1 に対して $\Phi_{m,1}(t) = \Phi_m(t) + b_1\Phi_{m-1}(t)$ は m 個の異なる実根をもつ．

区間 (a, b) 上のノード $y_1, \ldots, y_m$ と正の重み $x_1, \ldots, x_m$ について，等式

$$\sum_{i=1}^{m} x_i f(y_i) = \int_a^b f(t)\, d\mu \tag{8}$$

が次数 n 以下のすべての多項式 $f \in \mathcal{P}_n$ について成り立つとき，等式 (8) を次数 n の quadrature と呼ぶ [10]．Quadrature の次数や重みの正値性は積分近似性能を評価するうえで重要である [25]．組合せ論，離散幾何などの分野では，ノード (点) y_i と重み x_i の対を（数直線上の）デザインと呼ばれることが多く，$d\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$ の Gaussian design や $d\mu = (1-t^2)^{(d-3)/2} dt$ の区間デザインが重宝されている [1, 2]．測度 $d\mu = (1-t^2)^{(d-3)/2} dt$ に関する区間デザインは本稿第 3 章で改めて取り上げられる．

次の quadrature のノードの個数に関する不等式はよく知られている [25]．

命題 1.3 (Fisher 型不等式). 等式 (8) が，ノード数 m，次数 n の quadrature をなすとき，次の不等式が成り立つ．

$$m \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{9}$$

ただし $\mathcal{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}$ は次数 $\lfloor n/2 \rfloor$ 以下の多項式からなるベクトル空間を表す．

(8) 式が次数 n の quadrature をなすとき，被積分関数 f として次数 n 以下の単項式をとると主問題 1.1 の方程式が得られる．逆に (1) 式を満たす実数 x_i, y_i が存在すれば，積分と有限和の線形性から次数 n の quadrature が得られる．特にノード y_i が有理数の quadrature の存在性は不定方程式 (1) の有理数解の存在性と等価になる．次の結果は Fisher 型不等式から直ちに導かれる．

[1] 例えば [27] を参照されたい．$\Phi_{m,r}$ の階数を $m-r$ とする流儀もある．例えば [24] を参照のこと．

系 1.4. 不定方程式 (1) の変数 y_i の個数 m と方程式の個数 n について不等式 $n \leq 2m-1$ が成り立つ．

次の事実は quadrature と準直交多項式を有機的に結び付けるものであり，本研究の重要な道具の一つである．

定理 1.5 (Riesz-Shohat 定理)**.** $y_1, \ldots, y_m$ を相異なる実数とし，$\omega_m(t) = \prod_{i=1}^{m}(t-y_i)$ とおく．

$$x_i = \int_a^b \frac{\omega_m(t)}{(t-y_i)\omega_{m'}(y_i)} d\mu \tag{10}$$

とおく．このとき自然数 $1 \leq k \leq m+1$ に対して次の主張は互いに同値である．

(1) 等式 (8) が次数 $2m-k$ の quadrature をなす．

(2) 次数 $m-k$ 以下の任意の多項式 $g \in \mathcal{P}_{m-k}((a,b))$ について

$$\int_a^b \omega_m(t) g(t) d\mu = 0$$

が成り立つ．

(3) 適当な実数 $b_1, \ldots, b_{k-1}$ が存在して

$$\omega_m(t) = \Phi_m(t) + b_1\Phi_{m-1}(t) + \cdots + b_{k-1}\Phi_{m-k+1}(t)$$

が成り立つ．

命題 1.2 より，$k=1,2$ の場合には m 次準直交多項式が必ず m 個の異なる零点をもち，それらを用いて quadrature を構成することができる．$k=1$ の場合は有名な Gaussian quadrature が対応している．これを拡張したものが定理 1.5 であって，$k=2$ の場合は Riesz [19, p.23] によって示され，その後 Shohat [23, Theorem I] によって一般の $k \geq 3$ に対して定理が完成された．
特に直交多項式 $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ が有理数係数をもつとき，不定方程式 (1) に関する次の命題が成り立つ．

系 1.6. $y_1, \ldots, y_m$ を相異なる有理数とし，$\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ を有理数係数の直交多項式列とする．このとき自然数 $1 \leq k \leq m+1$ に対して次の主張は互いに同値である．

(1) 等式 (8) が有理数ノード $y_1, \ldots, y_m$ をもつ次数 $2m-k$ の quadrature をなす．

(2) 有理数係数で $y_1, \ldots, y_m$ を零点とする準直交多項式が存在する．

(3) 不定方程式系 (1) が有理数解 $y_1, \ldots, y_m$ をもつ．

例えば，Hermite 多項式列や Legendre 多項式列は有理数係数の直交多項式列の例であることに注意しよう．

2. 主結果 ($n=2m-2$の場合)

2.1. Christoffel-Darboux核

本節では，まず直交多項式論の古典の一つであるChristoffel-Darboux公式 [26, Theorem 3.2.2] を確かめたのち，これに付随するある代数曲線を考える．この代数曲線上の有理点を調べ，一般の古典準直交多項式に対して不定方程式(1)が高々有限個の解をもつことを見る．この章では代数幾何学の基本的な用語や事実が説明なしに用いられる場面がある．詳細については例えば [12, Chapter 3, § 1] を参照されたい．

区間(a,b)上の正の重みwに対して，直交多項式列$\{\Phi_l\}_l$を考える．$h_i=\int_a^b \Phi_i(x)^2\, w(x)dx$とおく．

$$K_l(x,y):=\sum_{i=0}^{l} h_l h_i^{-1}\Phi_i(x)\Phi_i(y) \tag{11}$$

で定められる二変数関数をChristoffel-Darboux核と呼ぶ [26]．Christoffel-Darboux核は多項式空間$\mathcal{P}_l((a,b))$に付随する再生核で，直交多項式の理論における重要な研究対象の一つである．

次の事実はChristoffel-Darboux公式と呼ばれている [10, 26]．

定理 2.1 (Christoffel-Darboux公式).

$$K_l(x,y)=\frac{k_l}{k_{l+1}}\cdot\frac{\Phi_{l+1}(x)\Phi_l(y)-\Phi_l(x)\Phi_{l+1}(y)}{x-y}. \tag{12}$$

ただしk_iはΦ_iの主係数とする．

次の補題は，不定方程式(1)の解からある曲線の有理点が生成されることを主張している．

補題 2.2 ([21]). $n=2m-2$のとき，$x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m$を方程式(1)の解とし，$y_1,\dots,y_m$を相異なる実数とする．このとき，(正規化された) 再生核について

$$f_m(y_i,y_j):=\frac{\Phi_m(x)\Phi_{m-1}(y)-\Phi_{m-1}(x)\Phi_m(y)}{x-y}=0,\quad i\neq j \tag{13}$$

が成り立つ．

二変数多項式$f_m(x,y)$を射影化したものを$F_m(X,Y,Z)$とおく．すなわち

$$F_m(X,Y,Z)=Z^{2m-2}f_m\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right). \tag{14}$$

$F_m(X,Y,Z)=0$で定義される射影曲線を$C^{(m)}$とおく．

次の結果は，主問題1.1に恩恵があるのみならず，Christoffel-Darboux核の代数幾何学的性質に明らかにしている．

定理 2.3 ([21]). $m\geq 3$を自然数とする．有理数係数の古典直交多項式列に対して$F_m(X,Y,Z)$を(14)式で定める．$Z^{2m-2}f_m(X/Z,Y/Z)=0$で定められる曲線$C^{(m)}$について次が成り立つ．

(1) 曲線$C^{(m)}$上の特異点は$(0:1:0),(1:0:0)$の通常特異点に限られ，それらの重複度は$m-1$である．

(2) 曲線$C^{(m)}$は絶対既約である．

(3) 曲線$C^{(m)}$の種数は$(m-2)^2$である．

定理 2.3 の証明の流れを述べる．まずLiouville-Strum微分方程式をはじめ古典直交多項式の解析的性質を用いて主張(1)を示す．その後，Bezoutの定理 ([12, Chapter 5, § 3]参照) を用いて$C^{(m)}$の既約性 (主張(2)) を示す．曲線$C^{(m)}$上の特異点Pの重複度を$m_P(C^{(m)})$とおくと，その種数gは

$$g = (2m-3)(m-2) - \sum_{P \in C^{(m)}} \frac{m_P(C^{(m)})(m_P(C^{(m)})-1)}{2}$$

で求められる [12, § 8.3, Proposition 5]．このことと主張(1)の特異点の分類結果をあわせて，$g=(m-2)^2$となることがわかる．

特に$m \geq 4$の場合には曲線$C^{(m)}$の種数は2以上になる．したがってFaltingsの定理 [11] から次の結果が得られる．

定理 2.4 ([21])**.** mを4以上の整数とし，$n=2m-2$とおく．このとき有理数係数の古典直交多項式に対して方程式(1)は高々有限個の解をもつ．

次節では，Hermite多項式，Legendre多項式，Laguerre多項式の3種に的を絞り，不定方程式(1)の解の完全な非存在命題を与える．

2.2. Newton多角形

定理 2.5 ([21])**.** $n=2m-2,\ m \geq 3$のとき，次の重み関数wに対して不定方程式(1)は有理数解をもたない．

(1) $(-\infty, \infty)$上のGaussian測度$w(t)=e^{-t^2}/\sqrt{\pi}$.

(2) $(-1,1)$上の定数関数重み$w(t) \equiv 1/2$.

(3) $(0,\infty)$上の指数関数重み$w(t)=e^{-t}$.

定理 2.5 の証明の概略を述べるためにいくつか準備する．

素数pと整数係数多項式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{l} a_k x^{l-k}, \qquad a_0 a_l \neq 0$$

を考える．xy平面の有限部分集合

$$S = \{(k, v_p(a_k)) \mid a_k \neq 0\}$$

の凸包の底辺からなる集合を，fの (pに関する) Newton多角形と呼ぶ．ただし$v_p\colon \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Z}$は$p$進付値を表す．Newton多角形は，$(0, v_p(a_0))$を始点，$(l, v_p(a_l))$を終点とする折れ線グラフになる．

次の補題は定理 2.5 の証明で重要な役割を果たす．補題の証明には，多項式f,gの積fgのNewton多角形の構成法に関するDumas [9] の結果を用いる．

補題 2.6 ([4])**.** 整数係数多項式 f の任意の零点が有理数ならば，Newton 多角形の各辺の傾きは整数になる．

定理 2.5 (1) の証明 (概略)．方程式 (1) の有理数解を $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ とおくと，不等式 (9) より，$y_1, \ldots, y_m$ は相異なるとしてよい．系 1.6 より，$y_1, \ldots, y_m$ が準 Hermite 多項式 $H_{m,c}$ の零点になるような $c \in \mathbb{R}$ が存在する．$c = s/t$ (ただし s, t は互いに素) とおくと，$f(x) := tH_{m,c}(x) = tH_m(x) + sH_{m-1}(x)$ は零点が有理数の整数係数多項式になる．

f の各項 x^{m-k} の係数を a_k とし，$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^{m-k}$ とおく．多項式 f の素数 2 に関する Newton 多角形を考える．平面上の点 $(k, v_2(a_k))$ を P_k とおく．Hermite 多項式の明示表現 ((7) 式) から，

$$f(x) = t\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor}(-1)^k \frac{m!}{k!(m-2k)!}(2x)^{m-2k} + s\sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}(-1)^k \frac{(m-1)!}{k!(m-1-2k)!}(2x)^{m-1-2k}$$

である．

$$\frac{m!}{k!(m-2k)!} = \binom{m}{2k} 2^k (2k-1)!!$$

に注意すると

$$\begin{aligned} v_2(a_{2k}) &= v_2\left(\binom{m}{2k}\right) + m - k + v_2(t), \\ v_2(a_{2k+1}) &= v_2\left(\binom{m-1}{2k}\right) + m - k - 1 + v_2(s). \end{aligned} \tag{15}$$

m が奇数の場合を考える．(15) 式より

$$v_2(a_0) = m + v_2(t), \quad v_2(a_{m-1}) = \frac{m+1}{2} + v_2(t),$$
$$v_2(a_{2k}) \geq m - k + v_2(t),\ 1 \leq k \leq \frac{m-3}{2},$$

$$v_2(a_1) = m - 1 + v_2(s), \quad v_2(a_m) = \frac{m-1}{2} + v_2(s),$$
$$v_2(a_{2k+1}) \geq m - k - 1 + v_2(s),\ 1 \leq k \leq \frac{m-3}{2}.$$

$1 + v_2(t) \leq v_2(s)$ のとき，Newton 多角形は折れ線 $P_0P_{m-1}P_m$ になる．しかし，この場合には，辺 P_0P_{m-1} の傾きが $-1/2$ となり，補題 2.6 に矛盾する．次に $1 + v_2(t) > v_2(s)$ とすると，Newton 多角形は折れ線 $P_0P_1P_m$ になる．しかし，この場合には，辺 P_1P_m の傾きが $-1/2$ となり，矛盾が生じる．m が偶数の場合も同様にして矛盾が導かれる． □

定理 2.5 の主張 (2) と (3) の証明には，Dumas の結果に加えて，Bertrand 仮説 ([13, Theorem 418] 参照) などの整数論の道具が必要になる．詳細は著者らの論文 [21] を参照されたい．

3. 球面デザイン理論への応用

単位球面$\mathbb{S}^{d-1}$上の一様測度ρに対して，等式

$$\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x) = \int_{u\in\mathbb{S}^{d-1}} f(u)d\rho \tag{16}$$

が次数n以下のすべての多項式$f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^d)$について成り立つとき，有限集合$X \subset \mathbb{S}^{d-1}$を球面$n$デザインと呼ぶ．左辺の算術平均を重み付き和に置き換えたものを，重み付き球面デザイン，あるいは（球面積分に対する）cubature公式と呼ぶ．

Gegenbauer多項式は球面デザインの研究の主要な道具の一つである．自然数$d \geq 3$に対して，

$$C_m^{((d-2)/2)}(t) = \frac{\Gamma((d-1)/2)}{\Gamma(d-2)}\frac{\Gamma(m+d-2)}{\Gamma((2m+d-1)/2)}P_m^{((d-3)/2,(d-3)/2)}(t)$$

で定められるm次多項式をGegenbauer多項式と呼ぶ（Γはガンマ関数）．簡単のため$C_m^{((d-2)/2)}$をC_mと表記する．球面デザインの研究者の間では多項式C_mの正規化

$$Q_m(t) = \frac{d+2m-2}{d-2}C_m(t) \tag{17}$$

がGegenbauer多項式と呼ばれることが少なくない．

次の事実は球面デザイン理論の研究者の間ではよく知られているが，これを明記している文献は意外と見当たらない（この事実を著者らは論文 [21] の改訂時に野崎寛氏(愛知教育大) から教わった）．

命題 3.1.

$$R_{m-1}(t) := \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(t),$$

$$Q_{m,s}(t) := Q_m(t) + sQ_{m-1}(t)$$

とおく．このとき

$$R_{m-1}(t) = \frac{aQ_{m,c}(t)}{t-1} \tag{18}$$

を満たす$a \in \mathbb{R}_{>0}$, $c \in \mathbb{R}$が存在する．

Bannai-Damerell [3, Theorem 2] は，$\mathbb{S}^{d-1}$上のtightな$(2m-2)$デザインが存在するときに，命題 3.1 の多項式R_{m-1}の零点が有理数になることを明らかにした．この結果と，C_m, C_{m-1}の零点のinterlacing性を用いて，Bannaiらは次のDelsarteら [8] による有名な予想が正しいことを証明した．

「任意の$d \geq 3, m \geq 4$に対して$\mathbb{S}^{d-1}$上のtightな$(2m-2)$デザインは存在しない」

等式 (18) に鑑みて，主問題 1.1 を微修正した次の問題が自然と興味の対象になる．

問題 3.2. 自然数$d \geq 3$に対して，

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i^j = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{(d-3)/2}\,dt}\int_{-1}^{1} t^j(1-t^2)^{(d-3)/2}\,dt, \quad j = 0,1,\ldots,2m-2 \tag{19}$$

を満たす$x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m \in \mathbb{Q}$は存在するか？ただし$y_m = 1$とする．

Delsarteらの結果 [8, Theorem 5.11] によれば，$X \subset \mathbb{S}^{d-1}$ がtightな$(2m-2)$デザインになることと，集合

$$A(X) := \{\langle x, x' \rangle \mid x, x' \in X,\ x \neq x'\}$$

の各要素が多項式R_{m-1}の零点になることは同値である．ただし，$\langle x, x' \rangle$は2点x, x'のユークリッド内積を表すものとする．$m \geq 4, d \geq 3$の場合には$\mathbb{S}^{d-1}$上のtightな$(2m-2)$デザインはないので，問題 3.2 の不定方程式系は有理数解をもたない．これに対して，$m=3$の場合には，$\mathbb{S}^5$上の27点からなるtightな4デザインや$\mathbb{S}^{21}$上の275点からなるtightな4デザインが実在し ([8, Example 8.3])，それぞれ不定方程式(19)の有理数解

$$(1) \quad d=6,\ x_1=\frac{10}{27},\ x_2=\frac{16}{27},\ x_3=\frac{1}{27},\ y_1=-\frac{1}{2},\ y_2=\frac{1}{4},\ y_3=1,$$

$$(2) \quad d=22,\ x_1=\frac{112}{275},\ x_2=\frac{162}{275},\ x_3=\frac{1}{275},\ y_1=-\frac{1}{4},\ y_2=\frac{1}{6},\ y_3=1$$

が対応している．

制約$y_m=1$を無視して主問題 1.1 に立ち返ろう．

例えば$m=3$の場合，$C_{3,c}$を具体的に計算することで，$(d+2)/3$が$\mathbb{Q}$上平方数ならば不定方程式(19)に解が存在することや，方程式(19)が有理数解をもつならば

$$d(d+2)^2 y_i^4 - 3(d^2+4d+1)y_i^2 + 3(d+2)$$

が$\mathbb{Q}$上平方数になるような添え字$1 \leq i \leq 3$が存在することなどがわかる．これに対して，$m=4$の場合は状況がまったく異なり，多項式

$$R_3(t) = \frac{1}{6}d((d+2)(d+4)t^3 + 3(d+2)t^2 - 3(d+2)t - 3)$$

の零点集合には必ず無理数が含まれる．

定理 3.3 ([21])**.** 有理数$d \neq -2$に対して

$$\tilde{R}(t) = (d+2)(d+4)t^3 + 3(d+2)t^2 - 3(d+2)t - 3\ (= 6R_3(t)/t)$$

とおく．$\tilde{R}(t)$の任意の零点が有理数になるのは，$d=-5$か$d=-1$のいずれかに限られる（$d=-2$の場合は$\tilde{R}(t)=-3$となるため除外する）．

証明. $d = Y/Z, t = Z/X$とおく．このとき

$$X^3\tilde{R}(t) = -3X^3 - 3X^2Y - 6X^2Z + 3XYZ + 6XZ^2 + Y^2Z + 6YZ^2 + 8Z^3$$

を得る．右辺を$F(X,Y,Z)$とおき，$F(X,Y,Z)=0$で定められる射影曲線Cを考える．$F(X,Y,Z)=0$に座標変換

$$X = \frac{x-3}{3}, \quad Y = \frac{2x+y+5}{3}, \quad Z = \frac{-2x-y+1}{6}$$

を施すことでWeierstrass方程式

$$y^2 + xy + y = x^3 - x^2 - 14x + 29$$

が得られる．ここから定められる楕円曲線 E は Cremona の楕円曲線データベースの 54b3 番に一致し [6]，Mordell 群 $E(\mathbb{Q})$ は

$$E(\mathbb{Q}) = \{(3,1),(-3,7),(1,-5),(9,-29),(9,19),(1,3),(-3,-5),(3,-5),\mathcal{O}\}$$

で与えられる．$d = 2(2x+y+5)/(-2x-y+1)$ なので，$\tilde{R}$ の零点が有理数ならば $d \in \{-5,-4,-7/3,-1,1\}$．多項式 $\tilde{R}$ を実際に因数分解すると，$d = -5,-1$ の場合のみが残る． □

系 3.4 ([8], Theorem 7.7)**.** 任意の自然数 $d \geq 3$ に対して $\mathbb{S}^{d-1}$ 上の tight な 6 デザインは存在しない．

Delsarte ら [8] の証明は Gegenbauer 多項式の interlacing 性を用いている．これを一般化して，Bannai-Damerell [3] は tight な $(2m-2)$ デザインの非存在定理を証明した．系 3.4 と同じように Bannai-Damerell の定理の代数的な別証明を与えることができればおもしろいと思う．準 Gegenbauer 多項式の判別式の明示公式 [20, Corollary 3.3] を用いるアプローチも有効かもしれない．

謝辞． 野崎寛先生をはじめ本集会で講演の機会をくださいました諸先生方に厚く御礼申し上げます．また，本稿の執筆にあたり，自身の博士論文の執筆時期にもかかわらず本稿に目を通しコメントをくれた佐竹翔平君にも感謝しています．

参考文献

[1] 坂内英一, 坂内悦子. 球面上の代数的組合せ論. シュプリンガー現代数学シリーズ, 9, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.

[2] E. Bannai, E. Bannai. *Tight Gaussian 4-designs*. J. Algebr. Combin. **22** (2005), 22–39.

[3] E. Bannai, R. M. Damerell. *Tight spherical designs, I*. J. Math. Soc. Japan **30** (1979), 199–207.

[4] E. Bannai, R. M. Damerell. *Tight spherical designs, II*. J. London Math. Soc. **21** (1980), 13–30.

[5] S. Bochner. *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*. Math. Z. **29** (1929), 730–736.

[6] J. E. Cremona. *Elliptic Curve Data*. `http://johncremona.github.io/ecdata/`.

[7] J. Cullinan, F. Hajir. *On the Galois groups of Legendre polynomials*. Indag. Math. (N.S.) **25** (2014), 534–552.

[8] P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel. *Spherical codes and designs*. Geom. Dedicata **6** (1977), 363–388.

[9] G. Dumas. *Sur quelques cas dírréductibilité des polynomes á coefficients rationnels*. J. Math. Pures Appl. **2** (1906), 191–258.

[10] C. F. Dunkl, Y. Xu. *Orthogonal Polynomials of Several Variables (2nd ed.)*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol.155, Cambridge Univ. Press, 2014.

[11] G. Faltings. *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*. Invent. Math. **73** (1983), 349–366. Erratum in: Invent. Math. **75** (1984), 381.

[12] W. Fulton. *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry*, Mathematics Lecture Notes Series, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[13] G. H. Hardy, E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th edition, revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, with a foreword by Andrew Wiles, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[14] F. Hausdorff. *Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems*. Math. Ann. **67** (1909), 301–305.

[15] D. Hilbert. *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste nzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem)*. Math. Ann. **67** (1909), 281–300.

[16] J. B. Holt. *The irreducibility of Legendre's polynomials*. Proc. London Math. Soc. **11** (1913), 351–356.

[17] P. Lesky. *Die Charakterisierung der klassischen orthogonalen Polynome durch Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen*. Arch. Rat. Mech. Anal. **10** (1962), 341–351.

[18] Y. V. Nesterenko. *On Waring's problem (elementary methods)*. (Russian) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 322 (2005), Trudy po Teorii Chisel, 149–175, 254; translation in J. Math. Sci. (N. Y.) **137** (2006), 4699–4715.

[19] M. Riesz. *Sur le problème des moments, III*. Ark. Math. Fys. **17** (1923), 1–52.

[20] M. Sawa, Y. Uchida. *Discriminants of classical quasi-orthogonal polynomials with applications to Diophantine equations*. J. Math. Soc. Japan. **71** (2019), 831–860.

[21] M. Sawa, Y. Uchida. *Algebro-geometric aspects of the Cristoffel-Darboux kernels of classical orthogonal polynomials*. Trans. Amer. Math. Soc., doi.org/10.1090/tran/7998.

[22] I. Schur. *Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen, II.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Phys.-Math. Kl., 14 (1929), 370–391.

[23] J. Shohat. *On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients*. Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), 461–496.

[24] J. A. Shohat, J. D. Tamarkin. *The Problem of Moments*, American Mathematical Society Mathematical Surveys, vol.1, American Mathematical Society, Providence, 1970.

[25] A. H. Stroud. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.

[26] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials (4th ed.)*. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, 1975.

[27] Y. Xu. *A characterization of positive quadrature formulae*. Math. Comp. **62** (1994), 703–718.