置換表現の個数に関する p 進的性質について

竹ヶ原　裕元

室蘭工業大学

A を群とする. 任意の自然数 d について, A における指数 d の部分群の個数は有限であるとし, A において指数が有限である部分群全体の集合を $\mathcal{F}_A$ で表す. A から S_n への準同型の個数を $h_n(A)$ で表し, $n=0$ のとき $h_0(A)=1$ とする. 数列 $\{h_n(A)\}_{n=0}^{\infty}$ の指数型母関数に関して, 次の式が知られている (cf. [11]).

$$E_A(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(A)}{n!} X^n = \exp\left(\sum_{B\in\mathcal{F}_A} \frac{1}{|A:B|} X^{|A:B|}\right) \tag{1}$$

p を素数, u を正の整数とする. 位数 p^u の巡回群を C_{p^u} で表す. (1) より数列 $\{h_n(C_{p^u})\}_{n=0}^{\infty}$ の指数型母関数に関して, 次の式が得られる.

$$E_{C_{p^u}}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(C_{p^u})}{n!} X^n = \exp\left(\sum_{k=0}^{u} \frac{1}{p^k} X^{p^k}\right) \tag{2}$$

0 でない整数 a に対して $\mathrm{ord}_p(a)$ で a を割り切る最大の p のべき数を表し, 実数 x に対して $[x]$ で x を超えない最大の整数を表す. (2) を利用して, 不等式

$$\mathrm{ord}_p(h_n(C_{p^u})) \geq \sum_{j=1}^{u} \left[\frac{n}{p^j}\right] - u\left[\frac{n}{p^{u+1}}\right] \tag{3}$$

および, p^{u+1} が n を割り切るときにこの式の等号が成り立つことが示される (cf. [4]). 特に $p=2$, $u=1$ の場合には $\mathrm{ord}_2(h_n(C_2))$ は次で与えられる (cf. [7]).

$$\mathrm{ord}_2(h_n(C_2)) = \begin{cases} \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + 1 & n \equiv 3 \pmod 4 \text{ のとき}, \\ \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] & n \not\equiv 3 \pmod 4 \text{ のとき}. \end{cases}$$

$\mathbb{Q}_p$ で p 進数のなす体, $\mathbb{Z}_p$ で p 進整数のなす環を表す. $a = \sum_{i=-n_0}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$, $0 \leq a_i \leq p-1$, ただし n_0 は非負整数, に対して $a_i \neq 0$ である最小の i を $\mathrm{ord}_p(a)$ で表す. $\mathbb{Q}_p$ における非アルキメデス的絶対値 $|\ |_p$ を, $x \in \mathbb{Q}_p$ に対して,

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\mathrm{ord}_p(x)} & x \neq 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定め,

$$\mathbb{Z}_p\langle X\rangle := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{Z}_p[[X]] \;\middle|\; |a_n|_p \to 0 \quad (n \to \infty) \right\}$$

とおく. (3) に関連して, $u = 1$ の場合には, $p^2 - 1$ 次整数係数多項式 $\eta(X)$ および $f_r(X) \in \mathbb{Z}_p\langle X\rangle$, $r = 0, 1, \ldots, p^2 - 1$, が存在して, $y = 0, 1, \ldots$ に対して

$$h_{p^2y+r}(C_p) = p^{(p-1)y} f_r(y) \prod_{j=1}^{y} \eta(j) \tag{4}$$

および $\mathrm{ord}_p(h_{p^2y+r}(C_p)) = (p-1)y + \mathrm{ord}_p(f_r(y))$ が成り立つ (cf. [3, 7]).

本報告では (3) および (4) を一般化する [9] および [10] で得られた, 有限アーベル p 群 P に対する $h_n(P)$ の p 進的性質を紹介する.

1 巡回 p 群の場合

$A = \mathbb{Z}_p$ (加法群) のとき, $E_{\mathbb{Z}_p}(X)$ は Artin-Hasse exponential と呼ばれ,

$$E_{\mathbb{Z}_p}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(\mathbb{Z}_p)}{n!} X^n = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} X^{p^k} \right) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]] \tag{5}$$

が成り立つ. このことは, 次の Dieudonné [2] による結果から得られる.

命題 1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n = \exp(\sum_{i=0}^{\infty} \ell_i X^{p^i})$, $\ell_i \in \mathbb{Q}_p$, とするとき, $c_n \in \mathbb{Z}_p$, $n = 1, 2, \ldots$, であるための必要十分条件は

$$\ell_i - \frac{\ell_{i-1}}{p} \in \mathbb{Z}_p, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (\ell_{-1} = 0)$$

が成り立つことである.

(5) は $\mathrm{ord}_p(h_n(\mathbb{Z}_p)) \geq \mathrm{ord}_p(n!)$ を意味する. この結果と (2), (3), および (5) を関係づける, 次のことが知られている (cf. [8, Lemma 25.5]).

補題 1.2 $n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \cdots \in \mathbb{N}$, $0 \leq n_i \leq p - 1$, とすると,

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] = \frac{n - n_0 - n_1 - n_2 - \cdots}{p - 1}$$

である. 特に $\mathrm{ord}_p(n!) \leq (n-1)/(p-1)$ である.

例 1.3 $p = 2$ とすれば, Mathematica を用いて, 次を得る.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h_n(\mathbb{Z}_2)/n!$	1	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{67}{315}$	$\frac{88}{315}$	$\frac{617}{2835}$	$\frac{2626}{14175}$	$\frac{18176}{155925}$

n	12	13	14	15	16	17
$h_n(\mathbb{Z}_2)/n!$	$\frac{6949}{66825}$	$\frac{423271}{6081075}$	$\frac{2172172}{42567525}$	$\frac{19151162}{638512875}$	$\frac{58438907}{638512875}$	$\frac{899510224}{10854718875}$

(2) と (5) から次の式が成り立つ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(C_{p^u})}{n!} X^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(\mathbb{Z}_p)}{n!} X^n \right) \exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^{u+i+1}} X^{p^{u+i+1}} \right)$$

さらに r を $0 \leq r < p^{u+1}$ を満たす整数として,

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})}{(p^{u+1}y+r)!} X^{p^{u+1}y} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}j+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}j+r)!} X^{p^{u+1}j} \right) \exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^{u+i+1}} X^{p^{u+i+1}} \right)$$

となる. ここで $X^{p^{u+1}}$ を $-p^{u+1}X$ で置き換えて,

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})}{(p^{u+1}y+r)!} (-p^{u+1}X)^y &= \exp(X) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}j+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}j+r)!} (-p^{u+1}X)^j \right) \\ &\quad \times \exp\left((-1)^{p+1} \frac{p^{(u+1)p}}{p^{u+2}} X^p \right) \exp\left(-\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{p^{u+i+1}} (-p^{u+1}X)^{p^i} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

を得る (cf. [1]). 以下, この式に関する考察を進める. (5) から

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}j+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}j+r)!} (-p^{u+1}X)^j \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_p)}{r!} - \frac{h_{p^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}+r)!} p^{u+1}X + p^{2(u+1)} X \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

が成り立つ. $i \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とすれば, $p^i = (1+p-1)^i \geq i(p-1)+p \geq i+2 \geq 4$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_p\left(\frac{p^{(u+1)p^i}}{p^{u+i+1}} \right) &\geq (u+1)p^i - (u+i+1) \\ &\geq p^i u + p^i - (u+i+1) \\ &\geq 4u + i + 2 - (u+i+1) \\ &\geq 3u+1 \end{aligned}$$

である. ここで, 次の補題を用いる.

補題 1.4 k を正の整数とし, a を $\mathrm{ord}_p(a) = k$ を満たす p 進整数とする. $p=2$ かつ $k=1$ の場合を除けば, 次のことが成り立つ.

$$\exp(aX) \in 1 + aX + \frac{a^2}{2} X^2 + \frac{a^3}{6} X^3 + p^{2k+1} X^4 \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

この補題から

$$\exp\left(-\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{p^{u+i+1}}(-p^{u+1}X)^{p^i}\right)\in 1+p^{2u+1}X\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$$

がわかる. また $p>2$ のとき

$$\exp\left(\frac{p^{p(u+1)}}{p^{u+2}}X^p\right)\in 1+p^{2u+1}X\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$$

であり, $p=2$ かつ $u>1$ のとき

$$\exp(-2^uX^2)\in 1-2^uX^2+2^{2u-1}X^4+2^{2u+1}X^6\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

である. 以上から, $p=2$ かつ $u=1$ の場合を除いて,

$$\sum_{y=0}^{\infty}\frac{h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})}{(p^{u+1}y+r)!}(-p^{u+1}X)^y=\exp(X)\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{(r)}X^n$$

を満たし, $p>2$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{(r)}X^n\in\frac{h_r(\mathbb{Z}_p)}{r!}-\frac{h_{p^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}+r)!}p^{u+1}X+p^{2u+1}X\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$$

であり, $p=2$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{(r)}X^n\in\frac{h_r(\mathbb{Z}_2)}{r!}(1-2^uX^2+2^{2u-1}X^4)-\frac{h_{2^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_2)}{(2^{u+1}+r)!}2^{u+1}X+2^{2u+1}X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

である数列 $\{d_n^{(r)}\}_{n=0}^{\infty}$ が存在する. 次の補題を用いる (cf. [1], [8, Theorem 54.4]).

補題 1.5 $\sum_{n=0}^{\ell}m_nX^n$ を $\mathbb{Z}_p$ 係数の ℓ 次多項式とし, $\sum_{n=1}^{\infty}w_nX^n\in p^kX\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$, k は非負整数とする. 数列 $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $d_0=m_0$, $d_n=m_n+w_n$, $^{\forall}n\in\mathbb{N}$, により定める. ここで $m_{\ell+1}=m_{\ell+2}=\cdots=0$ とする. このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(n)}{n!}X^n=\exp(X)\sum_{n=0}^{\infty}d_nX^n\quad かつ\quad g(X)\in\sum_{i=0}^{\ell}m_iX^{\underline{i}}+p^kX\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$$

を満たす $g(X)$ が存在する. ここで $X^{\underline{i}}$ は次で定義される.

$$X^{\underline{i}}=\begin{cases}X(X-1)\cdots(X-i+1) & \textit{if } i\geq 1,\\ 1 & \textit{if } i=0.\end{cases}$$

この補題から次のことがわかる (cf. [5]).

定理 1.6 $p > 2$ または $u > 1$ とし, r を $0 \leq r < p^{u+1}$ を満たす整数とする. このとき

$$g_r(y) = \frac{h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})}{(p^{u+1}y+r)!}(-p^{u+1})^y y!, \qquad y = 0, 1, \ldots$$

を満たし, $p > 2$ のとき

$$g_r(X) \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_p)}{r!} - \frac{h_{p^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}+r)!}p^{u+1}X + p^{2u+1}X\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$$

であり, $p = 2$ のとき

$$g_r(X) \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_2)}{r!}(1 - 2^u X^{\underline{2}} + 2^{2u-1}X^{\underline{4}}) - \frac{h_{2^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_2)}{(2^{u+1}+r)!}2^{u+1}X + 2^{2u+1}X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

である $g_r(X)$ が存在する.

$p = 2$ かつ $u = 1$ の場合, (6) において, X を $-X$ で置き換えて,

$$\sum_{y=0}^{\infty}\frac{h_{4y+r}(C_2)}{(4y+r)!}(4X)^y = \exp(X)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{h_{4j+r}(\mathbb{Z}_2)}{(4j+r)!}(4X)^j\right) \\ \times \exp\left(-2X - 2X^2\right)\exp\left(-\sum_{i=2}^{\infty}\frac{2^{2^{i+1}}}{2^{i+2}}X^{2^i}\right)$$

の形に変形できる. さらに

$$\exp(-2X - 2X^2) \in (1 - 2X + 4X^2)(1 - 4X^2 - 4X^4) + 8X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

であることが示される. このことと補題 1.5 から次のことがわかる (cf. [5]).

定理 1.7 ($p = 2$ かつ $u = 1$ の場合) r を $0 \leq r < 4$ を満たす整数とする. このとき

$$g_r(y) = \frac{h_{4y+r}(C_2)}{(4y+r)!}4^y y!, \qquad y = 0, 1, \ldots$$

かつ

$$g_r(X) \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_2)}{r!}(1 - 2X - 4X^{\underline{4}}) + \frac{4h_{4+r}(\mathbb{Z}_2)}{(4+r)!}X + 8X\mathbb{Z}_2\langle X\rangle$$

を満たす $g_r(X)$ が存在する.

次の定理 1.6 と定理 1.7 の系は, 補題 1.2 から得られ, (3) を導く (cf. [4, 5]).

系 1.8 r を $0 \le r < p^{u+1}$ を満たす整数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_p\left(h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})\right) &\ge \sum_{j=1}^{u}\left[\frac{p^{u+1}y+r}{p^j}\right] - uy \\ &= \left\{\frac{p^{u+1}-1}{p-1} - (u+1)\right\} y + \mathrm{ord}_p(r!), \qquad y = 0,\, 1, \ldots .\end{aligned}$$

$g_r(X)$ は定理 1.6 や定理 1.7 で定義されるものとする. (4) を一般化するために

$$f_r(X) := g_r(X) \prod_{i=1}^{r} (p^{u+1}X + i) \in \mathbb{Z}_p\langle X\rangle,$$

$$\eta_{u+1}(X) := \frac{1}{p^{\frac{p^{u+1}-1}{p-1}-(u+1)}} \prod_{i=1}^{p^{u+1}-1} (p^{u+1}X - i)$$

とおく. 任意の非負整数 y に対して, 次が成り立つ.

$$p^{\frac{p^{u+1}-1}{p-1}y} \prod_{j=1}^{y} \eta_{u+1}(j) = \prod_{j=1}^{y} \frac{p^{u+1}(p^{u+1}j-1)!}{(p^{u+1}(j-1))!} = \frac{1}{y!}\prod_{j=1}^{y}\frac{(p^{u+1}j)!}{(p^{u+1}(j-1))!} = \frac{(p^{u+1}y)!}{y!} \qquad (7)$$

(4) は次の様に一般化される.

定理 1.9 r を $0 \le r < p^{u+1}$ を満たす整数とする. $p > 2$ または $u > 1$ のとき

$$h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u}) = p^{\left\{\frac{p^{u+1}-1}{p-1}-(u+1)\right\}y} f_r(y) \prod_{j=1}^{y} (-\eta_{u+1}(j)), \qquad y = 0,\, 1, \ldots$$

であり, $p = 2$ かつ $u = 1$ のとき

$$h_{4y+r}(C_2) = 2^y f_r(y) \prod_{j=1}^{y} \eta_{u+1}(j), \qquad y = 0,\, 1, \ldots$$

である. さらに $\mathrm{ord}_p(f_r(y)) \ge \mathrm{ord}_p(r!)$, $y = 0, 1, \ldots$ かつ $\eta_{u+1}(j) \not\equiv 0 \pmod p$, $y = 0,\, 1, \ldots,\ j = 1,\, 2, \ldots, y$ となっている.

2　一般の p 群の場合

P を位数 p^s の有限アーベル p 群とし, その型が $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, ただし $\sum \lambda_i = s$, $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots$, であるとする. すなわち

$$P \simeq C_{p^{\lambda_1}} \times C_{p^{\lambda_2}} \times \cdots$$

である. $i=0,1,\ldots,s$ に対して P における位数 p^i の部分群の個数を $\alpha_\lambda(i;p)$ で表す. $a_{i,j}, i,j\in\mathbb{Z}$ を p によらずに λ および i のみにより定まる $\alpha_\lambda(i;p)=\sum_j a_{i,j}p^j$ を満たす非負整数とする. i あるいは j が負の数であれば, $a_{i,j}=0$ とする. $\alpha_\lambda(i;p)=\alpha_\lambda(s-i;p)$ が成り立つので $a_{i,j}=a_{s-i,j}$ である. $\alpha_\lambda(0;p)=\alpha_\lambda(s;p)=1$ であり, $\lambda_r\geq 1$ かつ $\lambda_{r+1}=0$ ならば $\alpha_\lambda(1;p)=\alpha_\lambda(s-1;p)=1+p+\cdots+p^{r-1}$ である.

命題 2.1 $\lambda=(u,v,0,\ldots)$ ならば $\alpha_\lambda(i;p)$ は次で与えられる.

$$\alpha_\lambda(i;p)=\begin{cases}1+p+\cdots+p^i & 0\leq i<v \quad \text{のとき},\\ 1+p+\cdots+p^v & v\leq i\leq u \quad \text{のとき},\\ 1+p+\cdots+p^{s-i} & u<i\leq s \quad \text{のとき}.\end{cases}$$

型 $\widehat{\lambda}=(\lambda_2,\lambda_3,\ldots)$ に対して, $\widehat{a}_{i,j}, i,j\in\mathbb{Z}$ を p によらずに $\widehat{\lambda}$ および i のみにより定まる $\alpha_{\widehat{\lambda}}(i;p)=\sum_j \widehat{a}_{i,j}p^j$ を満たす非負整数とする.

補題 2.2 $a_{i,j}-a_{i-1,j}=\widehat{a}_{i,j-i}-\widehat{a}_{s-i+1,j-s+i-1}$

$u+v=s$ を満たす, 非負整数 u および v を次のように定める.

$$u:=\max\left\{\lambda_1,\left[\frac{s+1}{2}\right]\right\},\qquad v:=\min\left\{s-\lambda_1,\left[\frac{s}{2}\right]\right\}$$

定義 2.3 非負整数の組 $(\ell,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, ただし $m\leq s$, に対して, $b_{\ell,m}=a_{\ell,m}-a_{\ell-1,m-1}$ とおき, さらに $c_{\ell,m}$ を次のように定める.

$$c_{\ell,m}=\begin{cases}b_{\ell,m}-b_{\ell-1,m} & 0\leq\ell\leq s-m \quad \text{かつ} \quad 0\leq m\leq v \quad \text{のとき},\\ a_{\ell,m}-a_{\ell-1,m} & 0\leq\ell\leq s-m \quad \text{かつ} \quad v<m\leq s \quad \text{のとき},\\ a_{m,\ell} & \ell>s-m \quad \text{のとき}.\end{cases}$$

次の定理は [9] で得られた.

定理 2.4 $E_P(X)$ は以下のように分解される.

$$\begin{aligned}E_P(X)&=\Phi_\lambda(X)\prod_{m=0}^{s}\prod_{\ell=s-m+1}^{\infty}\exp(p^{\ell+m-s}X^{p^{s-m}})^{c_{\ell,m}},\\ \Phi_\lambda(X)&=\prod_{m=0}^{v}\prod_{\ell=0}^{m}E_{C_{p^{u-\ell}}\times C_{p^{v-m}}}(X^{p^m})^{c_{\ell,m}}\prod_{m=v+1}^{s}\prod_{\ell=0}^{s-m}E_{C_{p^{s-\ell-m}}}(X^{p^m})^{c_{\ell,m}}\end{aligned}$$

命題 2.5 $c_{\ell,m}$ は任意の非負整数 ℓ と m, ただし $m\leq s$, に対して負でない. 特に $c_{0,0}=1$ であり, $m\geq 1$ ならば $c_{0,m}=0$ である.

例 2.6 $\lambda = (1,1,1,1,1,1,0,\dots)$ とする．このとき $u = v = 3$ であり，0 でない $a_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$ は次で与えられる．

i	$a_{i,0}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$	$a_{i,6}$	$a_{i,7}$	$a_{i,8}$	$a_{i,9}$
0	**1**									
1	1	**1**	1	1	1	1				
2	1	1	**2**	2	3	2	2	1	1	
3	1	1	2	**3**	3	3	3	2	1	1
4	1	1	**2**	2	3	2	2	1	1	
5	1	**1**	1	1	1	1				
6	**1**									

$0 \le m \le 6$ かつ $0 \le \ell \le 6-m$ ならば $c_{\ell,m}$ は次で与えられる．

$$c_{\ell,m} = \begin{cases} 1 & (\ell,m) = (0,0), \quad (1,m) \quad \text{ただし} \quad 2 \le m \le 5 \quad \text{のとき}, \\ 2 & (\ell,m) = (2,4) \quad \text{のとき}, \\ 0 & \text{上記以外のとき}. \end{cases}$$

さらに $\Phi_\lambda(X)$ は次のように分解される．

$$\Phi_\lambda(X) = E_{C_{p^3}\times C_{p^3}}(X)E_{C_{p^2}\times C_p}(X^{p^2})E_{C_{p^2}}(X^{p^3})E_{C_p}(X^{p^4})\exp(X^{p^4})^2\exp(X^{p^5}).$$

例 2.7 $\lambda = (5,1,1,1,0,\dots)$ とする．このとき $u = 5 = \lambda_1$ かつ $v = 3$, であり，0 でない $a_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$ は次で与えられる．

i	$a_{i,0}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$
0	**1**				
1	1	**1**	1	1	
2	1	1	**2**	2	1
3	1	1	2	**3**	1
4	1	1	2	**3**	1
5	1	1	2	**3**	1
6	1	1	**2**	2	1
7	1	**1**	1	1	
8	**1**				

$0 \le m \le 8$ かつ $0 \le l \le 8-m$ ならば $c_{\ell,m}$ は次で与えられる．

$$c_{l,m} = \begin{cases} 1 & (l,m) = (0,0), \quad (1,2), \quad (1,3), \quad (2,4) \quad \text{のとき}, \\ 0 & \text{上記以外のとき}. \end{cases}$$

さらに $\Phi_\lambda(X)$ は次のように分解される．

$$\Phi_\lambda(X) = E_{C_{p^5}\times C_{p^3}}(X)E_{C_{p^4}\times C_p}(X^{p^2})E_{C_{p^4}}(X^{p^3})E_{C_{p^2}}(X^{p^4}).$$

P に対して (4) が, 以下のように拡張される.

$$\kappa_p(u,v) = \begin{cases} u+3 & (p=2,\ u=v\geq 1 \text{ のとき}) \\ u+2 & (p=2,\ u=v+1\geq 2 \text{ または } p=3,\ u=v\geq 1 \text{ のとき}) \\ u+1 & (p=2,\ u=v=0 \text{ または } p=3,\ u+\delta_{v0}=v+1 \text{ のとき}) \\ u+1 & (p>3 \text{ または } u+\delta_{v0}>v+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく. また, 非負整数 n に対して

$$\tau_p^{(u,v)}(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{u}\left[\frac{n}{2^j}\right] + \left[\frac{n}{2^{u+2}}\right] - \left[\frac{n}{2^{u+3}}\right] & (p=2,\ u=v\geq 1 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{u}\left[\frac{n}{p^j}\right] - (u-v)\left[\frac{n}{p^{u+1}}\right] & (p>2 \text{ または } u+\delta_{v0}\geq v+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく. このとき, 次の定理が成り立つ (cf. [10]). (最後の主張は [6, 9] で示された.)

定理 2.8 $p=2$, $u+\delta_{v0}=v+1$ または $p=2$, $\lambda_3\geq 1$, $u=v$ の場合を除き, $p^{\kappa_p(u,v)}-1$ 次整数係数多項式 $\eta(X)$ および $f_r(X)\in\mathbb{Z}_p\langle X\rangle$, $r=0,1,\ldots,p^{\kappa_p(u,v)}-1$ が存在して,

$$h_{p^{\kappa_p(u,v)}y+r}(P) = p^{\tau_p^{(u,v)}(p^{\kappa_p(u,v)}y)} f_r(y)\prod_{j=1}^{y}\eta(j), \quad y=0,1,\ldots$$

および

$$\mathrm{ord}_p(h_{p^{\kappa_p(u,v)}y+r}(P)) = \tau_p^{(u,v)}(p^{\kappa_p(u,v)}y) + \mathrm{ord}_p(f_r(y)), \quad y=0,1,\ldots$$

が成り立つ. また, すべての場合で $\mathrm{ord}_p(h_n(P))\geq\tau_p^{(u,v)}(n)$, $n=0,1,\ldots,$ となる.

次の定理は [6, 9] で得られた.

定理 2.9 (1) $p=2$ かつ $u=v\geq 1$ の場合を除いて, $n\equiv 0 \pmod{p^{u+1}}$ を満たす任意の非負整数 n に対して $\mathrm{ord}_p(h_n(P))=\tau_p^{(u,v)}(n)$ となる.

(2) $p=2$ かつ $u=v\geq 1$ とする.

(a) $\lambda_3=0$ ならば, $n\equiv 0,\ 2^{u+1}$, あるいは $2^{u+2} \pmod{2^{u+3}}$ を満たす任意の非負整数 n に対して $\mathrm{ord}_2(h_n(P))=\tau_2^{(u,v)}(n)$ となる.

(b) $\lambda_3\geq 1$ ならば, $n\equiv 0,\ 2^{u+1}$, あるいは $2^{u+1}+2^{u+2} \pmod{2^{u+3}}$ を満たす任意の非負整数 n に対して $\mathrm{ord}_2(h_n(P))=\tau_2^{(u,v)}(n)$ となる.

上記の 2 つの定理には, 定理 2.4 における $\Phi_\lambda(X)$ の因子中に現れる $E_{C_{p^u}\times C_{p^v}}(X)$ の性質が大きく影響している. $P=C_{p^u}\times C_{p^v}$ の場合には, 以下のような方法を用いて, 結果を導く. 整数 k に対して, 記号 $[k]_p$ を

$$[k]_p=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}p^j & k\geq 1 \quad \text{のとき},\\ 0 & \text{上記以外のとき}\end{cases}$$

と定める. Eq.(1) より 次の式を得る.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(P)}{n!}X^n = \exp\left(\sum_{k=0}^{v-1}\frac{[k+1]_p}{p^k}X^{p^k}+\sum_{k=v}^{u}\frac{[v+1]_p}{p^k}X^{p^k}+\sum_{k=u+1}^{u+v}\frac{[u+v-k+1]_p}{p^k}X^{p^k}\right)$$

形式的べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(v)}X^n$ を次で定義する.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(v)}X^n=\exp\left(\sum_{k=0}^{v-1}\frac{[k+1]_p}{p^k}X^{p^k}+\sum_{k=v}^{\infty}\frac{[v+1]_p}{p^k}X^{p^k}\right)$$

命題 1.1 より $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(v)}X^n\in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ が成り立つ. また

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(P)}{n!}X^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(v)}X^n\right)\exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[v+1]_p-[v-i]_p}{p^{u+i+1}}X^{p^{u+i+1}}\right).$$

であることがわかる. さらに r を $0\leq r<p^{u+1}$ を満たす整数とすれば,

$$\sum_{y=0}^{\infty}\frac{h_{p^{u+1}y+r}(P)}{(p^{u+1}y+r)!}X^{p^{u+1}y}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}c_{p^{u+1}j+r}^{(v)}X^{p^{u+1}j}\right)\times\exp\left(-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[v+1]_p-[v-i]_p}{p^{u+i+1}}X^{p^{u+i+1}}\right)$$

を得る. $P=C_{p^u}\times C_{p^v}$ の場合, 定理 2.8, 2.9 はこの式を利用して証明される.

最後に, $E_p(X)$ の p 進的性質を, 定理 2.8 および定理 2.9 の系として記す (cf. [9]).

系 2.10 p 進べき級数 $E_P(X)$ の収束域は $|x|_p<p^a$, ただし

$$a=\begin{cases}-\dfrac{7}{2^{u+3}} & p=2 \text{ かつ } u=v\geq 1 \text{ のとき},\\ -\dfrac{1}{p^u(p-1)}-\dfrac{u-v}{p^{u+1}} & \text{上記以外のとき}\end{cases}$$

である.

参考文献

[1] K. Conrad, p-adic properties of truncated Artin-Hasse coefficients, 1998, preprint.

[2] J. Dieudonné, On the Artin-Hasse exponential series, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 210–214.

[3] H. Ishihara, H. Ochiai, Y. Takegahara, and T. Yoshida, p-divisibility of the number of solutions of $x^p = 1$ in a symmetric group, Ann. Comb. **5** (2001), 197–210.

[4] H. Katsurada, Y. Takegahara, and T. Yoshida, The number of homomorphisms from a finite abelian group to a symmetric group, Comm. Algebra **28** (2000), 2271–2290.

[5] T. Koda, M. Sato, and Y. Takegahara, 2-adic properties for the numbers of involutions in the alternating groups, J. Algebra Appl., **14** (2015), 1550052, 21pp.

[6] C. Krattenthaler and T. W. Müller, Truncated versions of Dwork's lemma for exponentials of power series and p-divisibility of arithmetic functions, Adv. Math. **283** (2015), 489–529.

[7] H. Ochiai, A p-adic property of the Taylor series of $\exp(x + x^p/p)$, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 71–85.

[8] W. H. Schikhof, Ultrametric Calculus, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[9] Y. Takegahara, The number of homomorphisms from a finite abelian group to a symmetric group (II), Comm. Algebra, **44** (2016), 2402–2442.

[10] Y. Takegahara, p-adic estimates of the number of permutation representations, Adv. Math. **349** (2019), 267–425.

[11] K. Wohlfahrt, Über einen Satz von Dey und die Modulgruppe, Arch. Math. (Basel) **29** (1977), 455–457.