（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏 名	伊藤　和広
論文題目	Algebraic cycles and cohomology with torsion coefficients of algebraic varieties （代数的サイクルと代数多様体の捩れ係数コホモロジーについて）		

（論文内容の要旨）

代数多様体に対し，その部分多様体の形式的な線形結合のことを代数的サイクルという．代数的サイクルおよびそのコホモロジー類の研究は代数幾何や数論幾何における中心的なテーマであり，深く研究されている．

代数的サイクルに関する重要な未解決問題として Tate 予想が挙げられる．これは，素体上有限生成な体 k 上の射影的で滑らかな代数多様体 X に対し，余次元 i の代数的サイクルのなす群を $Z^i(X)$ とおくと，k の標数と異なる素数 ℓ に対して定まる l 進サイクル写像

$$\mathrm{cl}^i_\ell\colon Z^i(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell\to H^{2i}(X_{k^{\mathrm{sep}}},\mathbb{Q}_\ell(i))^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$$

が全射になるという予想である．Tate 予想は X がアーベル多様体で $i=1$ の場合や，X が K3 曲面の場合には解決されているが，多くの場合に未解決である．

本論文において，伊藤氏は，X が有限体上の K3 曲面のとき，自己積 $X\times X$ に対して Tate 予想が成り立つことを証明した (伊藤哲史氏，越川皓永氏との共同研究)．証明には久賀・佐武写像と呼ばれる K3 曲面のモジュライ空間から直交型志村多様体への写像を用いる．久賀・佐武写像は複素数体上において Hodge 理論を用いて解析的に定義されるものだが，混標数に延長することができ，K3 曲面の Tate 予想に応用されていた．伊藤氏は，混標数の久賀・佐武写像を応用することで，X を虚数乗法を持つ複素数体上の K3 曲面に持ち上げて，虚数乗法を持つ K3 曲面の自己積に対する Hodge 予想 (向井茂氏，Buskin 氏による) に帰着することで，$X\times X$ に対する Tate 予想を証明した．

また，伊藤氏は，久賀・佐武写像の別の応用として，正標数の有限生成体上の K3 曲面 X について，$\mathbb{F}_\ell$ 係数コホモロジーに対する Tate 予想の類似が有限個の ℓ を除いて成り立つことを示し，Brauer 群の有限性を証明した．この結果は Skorobgatov 氏，Zarhin 氏によって標数 2 の場合を除くと成り立つことが知られていたが，伊藤氏は標数 2 の場合も含めて証明した．

さらに，伊藤氏は，非アルキメデス局所体上の代数多様体のコホモロジーと代数的サイクルに関する研究も行った．K を非アルキメデス局所体でその剰余標数を p とする．X を K 上の射影的かつ滑らかな代数多様体とする．素数 $\ell(\neq p)$ に対し，ℓ 進コホモロジー $H^i(X_{k^{\mathrm{sep}}},\mathbb{Q}_\ell)$ にはモノドロミー・フィルトレーションとウェイト・フィルトレーションと呼ばれる 2 つのフィルトレーションが定まる．これらのフィルトレーションが次数のずれを除いて一致するというのがウェイト・モノドロミー予想である．伊藤氏は，有限個の ℓ を除いて，$\mathbb{F}_\ell$ 係数コホモロジーに対するウェイ

ト・モノドロミー予想を定式化した (捩れ係数版ウェイト・モノドロミー予想)．そして，K が正標数の場合，X が曲面の場合，X がトーリック多様体の中の集合論的に完全交差な多様体の場合に証明した．捩れ係数版ウェイト・モノドロミー予想が成り立つ多様体については，

$$H^i(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \mathbb{Z}_\ell)^{I_K} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{F}_\ell \cong H^i(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \mathbb{F}_\ell)^{I_K}$$

が有限個を除く ℓ で成り立つ (I_K は惰性群)．この結果に Colliot-Thélène 氏と Raskind 氏の結果を組み合わせることで，伊藤氏は，$X \subset \mathbb{P}^4$ が K 上の 3 次元超曲面の場合に，$\mathrm{CH}^2(X_{K^{\mathrm{sep}}})^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)}$ の p と素な部分が有限群になることを証明した．ここで，$\mathrm{CH}^2(X_{K^{\mathrm{sep}}})$ は $X_{K^{\mathrm{sep}}}$ 上の余次元 2 の代数的サイクルのなす Chow 群である．

伊藤氏は，捩れ係数版ウェイト・モノドロミー予想の研究に過程において，リジッド解析空間の捩れ係数コホモロジーの研究も行った．得られた結果は以下の通りである．K を代数閉な非アルキメデス体，$\mathcal{O}$ を K の整数環とする．$\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$ を $\mathcal{O}$ 上の有限型分離スキームの閉埋め込みとする．$\mathcal{Z}, \mathcal{X}$ の形式完備化を $\widehat{\mathcal{Z}}, \widehat{\mathcal{X}}$ とおき，それらの Raynaud 一般ファイバーを $d(\widehat{\mathcal{Z}}), d(\widehat{\mathcal{X}})$ とおけば，リジッド解析空間の閉埋め込み $d(\widehat{\mathcal{Z}}) \hookrightarrow d(\widehat{\mathcal{X}})$ が得られる．$\ell \neq p$ を剰余標数と異なる素数とする．このとき，Huber 氏の定理によると，リジット解析的な開近傍 $d(\widehat{\mathcal{Z}}) \subset V \subset d(\widehat{\mathcal{X}})$ であって $\mathbb{F}_\ell$ 係数コホモロジーに誘導される制限写像

$$H^i(V, \mathbb{F}_\ell) \to H^i(d(\widehat{\mathcal{Z}}), \mathbb{F}_\ell)$$

が同型になるものが存在する．しかし，Huber 氏による証明からは V が ℓ によらずに取れるかは明らかではなかった．伊藤氏は，Orgogozo 氏による消滅サイクルの基底変換定理が ℓ によらない形で成立することを示すことで，Huber 氏の定理における開近傍 V が ℓ によらずに取れることを証明した．そして，伊藤氏は，この結果に Scholze 氏によるパーフェクトイド空間論を組み合わせて正標数の場合に帰着することで，捩れ係数版ウェイト・モノドロミー予想を集合論的に完全交差な多様体に対して証明した．

伊藤氏は，正標数の代数曲面上の有理曲線の特異点と変形についての研究も行っている．X を標数 $p > 0$ の代数閉体上の射影的で滑らかな代数曲面とし，$C \subset X$ を X の中で変形する有理曲線とする．このとき，もし C の各閉点における δ 不変量が $(p-1)/2$ より小さければ，X の小平次元は負になることを示した (伊藤哲史氏，Christian Liedtke 氏との共同研究)．この定理の主張には K3 曲面は現れないが，この研究は K3 曲面上に十分多くの有理曲線を構成するという代数的サイクルの問題を動機としたものである．

以上が本論文の主要結果である．

（論文審査の結果の要旨）

代数多様体に対し，その部分多様体の形式的な線形結合を代数的サイクルという．代数的サイクルやそのコホモロジー類の研究は代数幾何や数論幾何における中心的なテーマであり，深く研究されている．しかしながら，Tate 予想などの未解決問題も多く，まだ分かっていないことも多い．

本論文において，伊藤氏は，有限体上の K3 曲面の自己積に対する Tate 予想を証明した．証明の方針は次の通りである．まず，混標数の久賀・佐武写像を応用することで，有限体上の K3 曲面を虚数乗法を持つ複素数体上の K3 曲面に持ち上げる．そして，向井氏，Buskin 氏によりすでに知られていた複素数体上の虚数乗法を持つ K3 曲面の自己積に対する Hodge 予想を用いることで，Tate 予想を証明する．また，久賀・佐武写像の別の応用として，正標数の有限生成体上の K3 曲面について，$\mathbb{F}_\ell$ 係数コホモロジーに対する Tate 予想の類似が有限個の ℓ を除いて成り立つことを証明し，Brauer 群の有限性も証明した．これらは，結果の重要性はもちろんのこと，証明の中で用いられた幾何的・数論的な手法も重要である．今後もさらなる進展が期待される．

伊藤氏は，非アルキメデス局所体 K 上の代数多様体 X のコホモロジーの研究も行った．代数多様体の ℓ 進コホモロジーについては，モノドロミー・フィルトレーションとウェイト・フィルトレーションが一致するというウェイト・モノドロミー予想と呼ばれる未解決問題がある．伊藤氏は，(有限個の ℓ を除き) $\mathbb{F}_\ell$ 係数コホモロジーについてウェイト・モノドロミー予想の類似を定式化した．そして，K が正標数の場合，X が曲面の場合，X がトーリック多様体の中の集合論的に完全交差な多様体の場合において，有限個の ℓ を除くと $\mathbb{F}_\ell$ 係数版ウェイト・モノドロミー予想が成り立つことを証明した．この証明の過程において，リジッド解析空間の $\mathbb{F}_\ell$ 係数コホモロジーが開近傍のコホモロジーと同型になるという Huber 氏の定理の精密化を行った．さらに，捩れ係数版ウェイト・モノドロミー予想の応用として，非アルキメデス局所体上の 3 次元超曲面に対し，余次元 2 の代数的サイクルのなる Chow 群の剰余標数と素な部分の有限性を証明した．

伊藤氏は，正標数の代数曲面上の有理曲線の特異点と変形についての研究を行い，小平次元が負になるための判定法も証明している．

このように，本論文において，伊藤氏は，代数的サイクルやコホモロジー類についていくつもの非自明な結果を得ている．これらは今後の代数幾何や数論幾何の研究において重要な役割を果たすことが期待される重要なものである．

よって，本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について令和 2 年 10 月 23 日に試問を行った結果，全調査委員の一致で合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　　年　　　月