数理解析研究所講究録 1409 巻 2005 年 219-223

ε-KKT 条件と具体例

富山大学経済学部 (Faculty of Economics, Toyama University)

横山一憲 (Kazunori Yokoyama) [1]

白石俊輔 (Shunsuke Shiraishi) [2]

Abstract

不等式制約付の凸計画問題に対して ε-近似解を得るための Karush-Kuhn-Tucker (以下単に KKT という) タイプの条件を示す. よく知られているように (正確な) 解を得るための KKT タイプ条件は Slater の制約想定の下で示される. 本報告では, Slater の制約想定を仮定せず, 新たな条件を仮定して, KKT タイプの条件を示す.

1 準備

次の凸計画問題を考える.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{minimize} & f(x) \\
& \text{subject to} & g_i(x) \leqq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \\
& \text{where} & f, \ g_i \ (i = 1, \ldots, m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{convex}.
\end{array}
$$

次の条件が仮定されている.

Assumption. 許容集合 $K = \{x \mid g_i(x) \leqq 0 \ (i = 1, \ldots, m)\} \neq \emptyset$. 目的関数 $f : K$ 上で下に有界.

凸計画問題 (P) に対して ε-近似解を定義する.

Definition 1. $\bar{x} \in K$ が (P) に対して ε-近似解であるとは $f(x) + \varepsilon > f(\bar{x})$ for any $x \in K$ を満たすことである.

recession cone および ε-subdifferential を定義する.

Definition 2. [6] $C \subset \mathbb{R}^n$ を convex set とする. recession cone 0^+C of C であるとは $0^+C = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C, \forall \alpha \geqq 0, \ x + \alpha d \in C\}$ を満たすことである.

---

[1] e-mail: kazu@eco.toyama-u.ac.jp

[2] e-mail: shira@eco.toyama-u.ac.jp, Research supported partially by the Toyama Daiichi Bank Scholarship Foundation.

Definition 3. [3] $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を convex function とする．$\partial_\varepsilon h(x)$ が h の x における ε-subdifferential であるとは $\partial_\varepsilon h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid h(x') \geqq h(x) + \langle y, x'-x\rangle - \varepsilon$ for any $x' \in \mathbb{R}^n\}$ を満たすことである．

Strodoit et al (1983) によって示された ε-近似解を得るための KKT タイプの条件をあらわす．Slater の制約想定はつぎのようである．

Assumption (CQ) (Slater の制約想定). $g_i(y) < 0$ for any $i = 1,\ldots,m$ となるような $y \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

Theorem 0. [7] $\varepsilon \geqq 0$, (CQ) が仮定される．このとき，$\bar{x} \in K$ が (P) に対する ε-近似解であるための必要十分条件は

$(\bar\lambda_1,...,\bar\lambda_m) \neq \theta$, $\bar\lambda_i \geqq 0$ $(i=1,...,m)$, and $\bar\varepsilon_i \geqq 0$ $(i=0,...,m)$ が存在し以下を満たすことである

$$\theta \in \partial_{\bar\varepsilon_0} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \partial_{\bar\varepsilon_i} \bar\lambda_i g_i(\bar{x}), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \bar\varepsilon_i - \varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{m} \bar\lambda_i g_i(\bar{x}) \leqq 0. \tag{2}$$

(ε)-KKT 条件における (CQ)，duality gap と ε の符号による設定は以下のようにまとめられる．

	ε	(CQ)	duality gap
Rockafellar (1970)	$=0$	yes	no
Strodoit et al. (1983)	$\geqq 0$	yes	no
Yokoyama (1992)	$\geqq 0$	no	yes
設定 (a)	>0	no	no

設定 (a) で Strodoit et al (1983) と同一な KKT タイプの条件 (1)(2) を示すことはできない。

Example 0. (P) minimize $f(x_1,x_2) = e^{-x_1} - x_2$
subject to $g_1(x_1,x_2) = -x_1 \leqq 0,$
$g_2(x_1,x_2) = x_2^2 \leqq 0.$

を考える．明らかに，f, g_1, g_2 は凸であり，$K = \{x = (x_1,x_2) \mid x_1 \geqq 0, x_2 = 0\}$ であるから Slater の制約想定は成立しない．また (P) に対する（正確な）解も存在しない．

$\varepsilon = 1$ とすると $\bar{x} = (0,0) \in K$ は (P) に対する ε-近似解となる．

$0 \leqq \eta \leqq 1$ とすると

$$\partial_\eta f(0,0) = \{(\xi_1,-1) \mid \xi_1 \leqq 0\ (0 \leqq \eta \leqq 1)\ \xi_1 < 0\ (0 \leqq \eta < 1)\} \tag{3}$$

が成立する．また $\eta \geqq 0, \lambda > 0$ とすると

$$\partial_\eta g_1(0,0) = \{(-1,0)\}$$
$$\partial_\eta(\lambda g_1)(0,0) = \{(-\lambda,0)\}$$
$$\partial_\eta g_2(0,0) = \{(0,\xi) \mid -2\sqrt{\eta} \leqq \xi \leqq 2\sqrt{\eta}\}$$
$$\partial_\eta(\lambda g_2)(0,0) = \{(0,\xi) \mid -2\sqrt{\eta\lambda} \leqq \xi \leqq 2\sqrt{\eta\lambda}\}$$
$$\partial_0 g_2(0,0) = (0,0)$$

が成立する．ここで (1)(2) が成立したとすると，(1) より次式が成り立つ

$$(0,0) = (\xi_1,-1) + (-\lambda,0) + (0,\xi_2) \tag{4}$$

1. $\varepsilon_2 > 0$ の場合
   (2) より $\varepsilon_0 \leqq \varepsilon - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) < \varepsilon = 1$ となるので，(3) より $\xi_1 < 0$ となり，(4) の第 x_1 成分は $0 = \xi_1 - \lambda < 0$ となって矛盾．

2. $\varepsilon_2 = 0$ の場合
   (4) の第 x_2 成分は $0 = -1$ となって矛盾．

新たに以下の条件を仮定する．

Assumption 1. もし十分小さな $\eta > 0$ に対して $x \in K(\eta) \cap K_i^c$ のとき次のような $x' \in K$ が存在する

$$| f(x) - f(x') | < \varepsilon$$

但し $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leqq 0\}$, $K_i^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) > 0\}$ $(i = 1,\ldots,m)$, $K(\eta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leqq \eta,\ i = 1,\ldots,m\}$.

Assumption 2. 2-1 A_ε : closed,
2-2 $0^+A_\varepsilon \cap 0^+B = \{\theta\}$

但し $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^{m+1} \mid z_0 \geqq f(x) + \varepsilon,\ z_i \geqq g_i(x)\ (i = 1,...,m);\ x \in \mathbb{R}^n\}$,
$B = \{z \in \mathbb{R}^{m+1} \mid z_0 \leqq f(\bar{x}),\ z_i \leqq 0\ (i = 1,...,m)\}$.

2 ε-KKT 条件と例

Theorem 1. $\varepsilon > 0$, Assumption 1 を仮定する．このとき $\bar{x} \in K$ が (P) に対する ε-近似解であるための十分条件は (1)(2) が成立することである，また

必要条件は $(\bar{\lambda}_1, ..., \bar{\lambda}_m) \neq \theta$, $\bar{\lambda}_i \geqq 0$ $(i = 1, ..., m)$, and $\bar{\varepsilon}_i \geqq 0$ $(i = 0, ..., m)$ が存在して以下を満たすことである

$$(1) \text{ and } \sum_{i=0}^{m} \bar{\varepsilon}_i - 2\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leqq 0.$$

Theorem 2. $\varepsilon > 0$, Assumption 2 を仮定する. このとき $\bar{x} \in K$ が (P) に対する ε-近似解 であるための必要十分条件は (1)(2) が成立することである.

Example 1. (P) minimize $f(x_1, x_2) = 2^{-x_1 - x_2}$
subject to $g_1(x_1, x_2) = \mid x_1 \mid - x_2 \leqq 0,$
$g_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \leqq 0.$

を考える. 明らかに, f, g_1, g_2 は凸であり, $K = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 = x_1,\ x \geqq 0\}$ であるから Slater の制約想定は成立しない. また (P) に対する (正確な) 解も存在しない. $\varepsilon = 1/2$ とすると $\bar{x} = (1, 1) \in K$ は (P) に対する ε-近似解となる. Assumption 1 が成立するのが確かめられる.

$\partial_\eta g_1(1,1) = \{([1-\eta, 1], -1)\}, \partial_\eta g_2(1,1) = \{(-1, 1)\}$ for each $\eta \geqq 0$, $\partial_\varepsilon f(1,1) = \{([-0.62, 0], [-0.62, 0])\}$ なので $\bar{\lambda}_0 = 1$, $\bar{\lambda}_1 = 1$, $\bar{\lambda}_2 = 1$, $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon$, $\bar{\varepsilon}_1 = 0$, $\bar{\varepsilon}_2 = 0$ が存在して次が成立する

$$\theta \in \partial_\varepsilon f(1,1) + \partial_0(1g_1)(1,1) + \partial_0(1g_2)(1,1),$$
$$\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - 2\varepsilon = -\varepsilon \leqq 0 = 1g_1(1,1) + 1g_2(1,1).$$

Example 2. (P) minimize $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)/8$
subject to $g_1(x_1, x_2) = \max(0, \mid x_1 \mid - x_2) \leqq 0,$
$g_2(x_1, x_2) = \max(0, -x_1 + x_2) \leqq 0.$

を考える. 明らかに, f, g_1, g_2 は凸であり, $K = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 = x_1,\ x \geqq 0\}$ であるから Slater の制約想定は成立しない. $\varepsilon = 1/2$ とすると $\bar{x} = (1,1) \in K$ は (P) に対する ε-近似解となる. Assumption 2 が成立することが確かめられる. $\eta \geqq 0$ なので

$$\partial_\eta g_1(1,1) = \{([\alpha_1 - \eta, \alpha_1], -\alpha_1) \mid 0 \leqq \alpha_1 \leqq 1, \eta_1 = \eta\},$$
$$\partial_\eta g_2(1,1) = \{(-\alpha_2, \alpha_2) \mid \alpha_2 \leqq 1, \eta_2 = \eta\},$$
$$\partial_0 f(1,1) = \{(2/8, 2/8)\},$$

となり，$\bar{\lambda}_1 = 1$，$\bar{\lambda}_2 = 1$，$\bar{\varepsilon}_0 = 0$，$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon$，$\bar{\varepsilon}_2 = 0$，$\alpha_1 = 2/8$，$\alpha_2 = 0$ が存在して次が成立する

$$\begin{aligned}\theta &\in \partial_0 f(1,1) + \partial_\varepsilon(1g_1)(1,1) + \partial_0(1g_2)(1,1) \\ &= \{(2/8, 2/8) + (\xi, -2/8) + (0,0) \mid 2/8 - 1/2 \leqq \xi \leqq 2/8\}, \\ \bar{\varepsilon}_0 &+ \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon = 0 \leqq 0 = 1g_1(1,1) + 1g_2(1,1).\end{aligned}$$

References

[1] AUSLENDER, A and CROUZEIX, J. -P., *Global Regularity Theorems*, Mathematics of Operations Research, Vol. 13, No. 2, 243–253, 1988

[2] EKELAND, I., *Nonconvex Minimization Problems*, Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.), Vol. 1, No. 3, pp. 443-474, 1979.

[3] HIRIART-URRUTY, J. -B., and LEMARÉCHAL, C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer, 1993.

[4] JEYAKUMAR, V., LEE, G. M. , and DINH, N., *New Sequential Lagrange Multiplier Conditions Characterizing Optimality without Constraint Qualification for Convex Programs*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 14, no. 2, pp. 534–547, 2003.

[5] LORIDAN, P., *Necessary Conditions for ε-Optimality*, Mathematical Programming Study, Vol. 19, pp. 140-152, 1982.

[6] ROCKAFELLAR, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[7] STRODIOT, J. J., NGUYEN, V. H., and HEUKEMES, N., *ε-Optimal Solutions in Nondifferentiable Convex Programming and Some Related Questions*, Mathematical Programming, Vol. 25, pp. 307-328, 1983.

[8] YOKOYAMA, K., *ε-Optimality Criteria for Convex Programming Problems via Exact Penalty Functions*, Mathematical Programming, Vol. 56, pp. 233–243, 1992.