数理解析研究所講究録 1410 巻 2005 年 30-44

Hall-Littlewood functionで定義される Young図形全体の上の測度について

九州大学大学院数理学府　松本 詔 (SHO MATSUMOTO)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1 はじめに

Hall-Littlewood 関数を用いて Young 図形の上に確率測度を定め，その測度の特殊化における Young 図形の行や列の長さの極限分布を見ていくことがこの講演の目的である.

1.1 Hall-Littlewood 測度の定義

分割全体を $\mathcal{P}$ とする. $X=(X_1,X_2,\dots)$ と $Y=(Y_1,Y_2,\dots)$ を変数の列とし, t をパラメータとする. $P_\lambda(X;t)$, $Q_\lambda(X;t)$ をそれぞれ分割 λ に対する Hall-Littlewood P-関数と Q-関数する. この関数の具体的な定義については [Mac, III-2] 参照. これらは次の Cauchy 型恒等式を満たす ([Mac, III-4]).

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} Q_\lambda(X;t)P_\lambda(Y;t)=\prod_{i,j=1}^{\infty}\frac{1-tX_iY_j}{1-X_iY_j}.$$

この等式により形式的に $\mathcal{P}$ 上の確率測度が定義できる. すなわち,

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HL},t}(\lambda)=\left(\prod_{i,j=1}^{\infty}\frac{1-X_iY_j}{1-tX_iY_j}\right)Q_\lambda(X;t)P_\lambda(Y;t),\qquad \lambda\in\mathcal{P} \tag{1.1}$$

とおく. これを **Hall-Littlewood 測度**と呼ぶことにする. 特に, $t=0$ のとき, $Q_\lambda(X;0)=P_\lambda(X;0)=s_\lambda(X)$ だから, (1.1) は

$$\mathrm{P}_{\mathrm{Schur}}(\lambda)=\prod_{i,j=1}^{\infty}(1-X_iY_j)s_\lambda(X)s_\lambda(Y),\qquad \lambda\in\mathcal{P} \tag{1.2}$$

となる. ここで, s_λ は Schur 関数である. この測度は **Schur 測度**といい, [O2] で定義された. また(1.1) で $t=-1$ とすると, 各 $r\geq 1$ に対して分割 λ における r の重複度 $m_r(\lambda)$ が高々1のときに限り $Q_\lambda(X;-1)=Q_\lambda(X)$, $P_\lambda(X;-1)=2^{-\ell(\lambda)}Q_\lambda(X)$ となり, そうでなければ $Q_\lambda(X;-1)=P_\lambda(Y;-1)=0$ であるから,

$$\mathrm{P}_{\mathrm{SS}}(\lambda)=\left(\prod_{i,j=1}^{\infty}\frac{1-X_iY_j}{1+X_iY_j}\right)2^{-\ell(\lambda)}Q_\lambda(X)Q_\lambda(Y),\qquad \lambda\in\mathcal{D} \tag{1.3}$$

となる．ここで，Q_λ は Schur の Q-関数である ([Mac, III-8]) であり，$\ell(\lambda)$ は分割 λ の長さである；$\ell(\lambda) = \#\{j \geq 1; \lambda_j \neq 0\}$．また $\mathcal{D}$ は strict な分割全体である; $\mathcal{D} = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_l) \in \mathcal{P};\ l \geq 0,\ \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_l > 0\}$．この確率測度は **shifted Schur 測度**と呼ばれ，[TW2] で定義された．

1.2 対称群の Plancherel 測度

対称群 $\mathfrak{S}_N$ の **Plancherel 測度**とは，N の分割全体 $\mathcal{P}_N$ 上の確率測度であり，

$$\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}(\lambda) = \frac{(f^\lambda)^2}{N!}, \qquad \lambda \vdash N \tag{1.4}$$

と定義される．ここで，f^λ は λ で決まる $\mathfrak{S}_N$ の既約表現の次元である．同じことであるが，f^λ は型が λ の標準 Young 盤の個数でもある．よく知られた等式

$$\sum_{\lambda \vdash N} (f^\lambda)^2 = N!$$

から，$\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}$ は確かに確率測度である．[BOO, J2, O1] では，この測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}$ における確率変数 λ_j たちの $N \to \infty$ としたときでの極限分布が得られている．それは次の Airy ensemble により記述される．

1.3 Airy ensemble

Airy ensemble の定義について述べよう (例えば [BOO] 参照)．$\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}$ を Airy 核

$$\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x, y) = \int_0^\infty \mathrm{Ai}(x+z)\mathrm{Ai}(y+z)dz$$

とする．ただし，$\mathrm{Ai}(x)$ は Airy 関数

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\infty e^{-\pi\sqrt{-1}/3}}^{\infty e^{\pi\sqrt{-1}/3}} \exp\left(\frac{z^3}{3} - xz\right) dz.$$

$\mathbb{R}$ の各有限部分集合 $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ に対して，その相関関数 $\rho_{\mathrm{Airy}}(X) = \mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}(\{Y \subset \mathbb{R};\ \#Y < \infty,\ Y \supset X\})$ が $\rho_{\mathrm{Airy}}(X) = \det(\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq k}$ となるような $\mathbb{R}$ 上の配置 (configuration) を考える．その配置，すなわち確率測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}$ における確率変数 $\zeta^{\mathrm{Ai}} = (\zeta_1^{\mathrm{Ai}} > \zeta_2^{\mathrm{Ai}} > \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ を **Airy ensemble** という．Airy ensemble は Gaussian Unitary Ensemble (GUE) における固有値の極限分布を記述していることが知られている ([TW1])．

1.4 Plancherel 測度の極限分布

いま，[BOO, J2, O1] の結果は以下のように述べられる．

定理 1.1 ([BOO, J2, O1]). 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}$ における確率変数

$$\frac{\lambda_j - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

は $N \to \infty$ とするとき，Airy ensemble に分布収束する． □

例えば，λ_1 の極限分布は

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}\left(\left\{\lambda \in \mathcal{P}_N; \frac{\lambda_1 - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}} < s\right\}\right) = \mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}(\zeta_1^{\mathrm{Ai}} < s) = \det(I - \mathcal{K}_{\mathrm{Airy}})_{[s,\infty)}$$

という形で述べられる．ここで，$F_2(s) := \det(I - \mathcal{K}_{\mathrm{Airy}})_{[s,\infty)}$ は Airy 核 $\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}$ の $[s, \infty)$ 上での Fredholm 行列式であり，Tracy-Widom 分布と呼ばれている ([TW1, J2])．

正の実数 $\xi > 0$ に対して，

$$\mathrm{P}_{\mathrm{PP}}^{\xi}(\lambda) = e^{-\xi}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\xi^N}{N!}\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}(\lambda) = e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}\left(\frac{f^\lambda}{|\lambda|!}\right)^2, \qquad \lambda \in \mathcal{P} \tag{1.5}$$

と定める．これを **poissonized Plancherel 測度**という．ただし，$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$．

定理 1.2 ([BOO, J2]). 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{PP}}^{\xi}$ における確率変数

$$\frac{\lambda_j - 2\sqrt{\xi}}{\xi^{1/6}}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

は $\xi \to \infty$ とするとき，Airy ensemble に分布収束する． □

定理 1.1 は定理 1.2 から，Johansson による depoissonized technique を使うことで得られる．

Plancherel 測度における λ_j たちの分布は，置換の最長増加部分列の長さの問題と密接に関連している．このような組み合わせ的な話題についてはサーベイ [AD] がよい．

1.5 Schur 測度と Plancherel 測度

poissonized Plancherel 測度は Schur 測度を特殊化することで得ることができる．実際，Schur 関数をべき和関数 $p_k(X) = X_1^k + X_2^k + \cdots$ の多項式で書くと，

$$s_\lambda = \sum_{\rho\vdash|\lambda|}\chi_\rho^\lambda \prod_{r\geq 1}\frac{p_r^{m_r(\rho)}}{r^{m_r(\rho)}m_r(\rho)!}$$

と書けるから ([Mac, I-7])，特殊化 $p_k = \delta_{k,1}\sqrt{\xi}$ (p_k たちは代数的に独立) によって，$s_\lambda = \xi^{|\lambda|/2}f^\lambda/|\lambda|!$ となる．ここで，χ^λ は分割 λ に対する $\mathfrak{S}_{|\lambda|}$ の既約指標であり，χ_ρ^λ はサイクルタイプ ρ での値である．よって特殊化 $p_k(X) = p_k(Y) = \delta_{k,1}\sqrt{\xi}$ により Schur 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Schur}}$ は poissonized Plancherel 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{PP}}^{\xi}$ になる．

定理 1.2 は Schur 測度の特殊化 $p_k(X) = p_k(Y) = \delta_{k,1}\sqrt{\xi}$ における極限分布を述べているということができる．**Schur 測度の他の特殊化における極限分布はどうなるか？**という問題について今回は考えていく．

2 Schur 測度の極限定理

Schur 測度の次の仮定を満たす特殊化の族を考える．

(0) θ を正の実数とする．$p_k(X) = p_k(Y) = p_k^\theta$ と特殊化する．ただし，p_k^θ は実数であり，$\lim_{\theta\to+\infty} p_k^\theta/\theta = d_k \geq 0$ が存在する．ここで，$p^\theta = (p_1^\theta, p_2^\theta, \dots)$ とおく．

(1) 各 θ に対して，ある $\epsilon = \epsilon(\theta) > 0$ が存在して，べき級数 $f^\theta(z) := \sum_{k=1}^\infty \frac{p_k^\theta}{k} z^k$ が $|z| < 1+\epsilon$ で正則である．

(2) $f(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{d_k}{k} z^k$ とおく．このとき，級数 $f(1) = \sum_{k=1}^\infty \frac{d_k}{k}$ が収束する．さらに，$f(z)$ は $z = 1$ の周りに正則関数として解析接続される．[1]

このとき，次の定理を得る．

定理 2.1. $\mathrm{P}_{\mathrm{Schur},p^\theta}$ を上の条件 (0), (1), (2) を満たすようなSchur 測度の特殊化とする．$c_1 = 2f'(1)$，$c_2 = f'''(1) + 3f''(1) + f'(1)$ とおく．このとき，$\theta \to +\infty$ で，確率変数

$$\frac{\lambda_j - c_1\theta}{(c_2\theta)^{1/3}}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

はAiry ensemble に分布収束する． □

ここで，級数 $\sum_{k=1}^\infty d_k$ や $\sum_{k=1}^\infty k^2 d_k$ がそれぞれ収束するなら，

$$c_1 = 2\sum_{k=1}^\infty d_k, \qquad c_2 = \sum_{k=1}^\infty k^2 d_k$$

と書くこともできる．実際，c_2 について述べると，

$$c_2 = f'''(1) + 3f''(1) + f'(1) = \sum_{k=1}^\infty \{(k-1)(k-2) + 3(k-1) + 1\} d_k = \sum_{k=1}^\infty k^2 d_k$$

となっている．

定理 2.1 は，解析的に“よい”条件を満たす Schur 測度の特殊化の族においては，λ_j たちの極限分布が Gaussian Unitary Ensemble の固有値たちの極限分布と同じになるということを述べている．さらに，スケーリング定数 c_1, c_2 の存在だけでなく，それらの明示的な表示が得られることがよい．

同様に，λ'_j（Young 図形 λ の第 j 列の長さ）の分布についても述べることができる．

(1') 各 θ に対して，ある $\epsilon = \epsilon(\theta) > 0$ が存在して，べき級数 $\tilde{f}^\theta(z) := \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1} p_k^\theta}{k} z^k$ が $|z| < 1+\epsilon$ で正則である．

[1] 講演で述べた条件では不足でした．講演直後にご指摘してくださった名古屋大の落合啓之先生に感謝します．

(2') $\tilde{f}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}d_k}{k}z^k$ とおく．このとき，級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k}$ が収束する．さらに，$\tilde{f}(z)$ は $z=1$ の周りに正則関数として解析接続される．

定理 2.2. $\mathrm{P}_{\mathrm{Schur},p^\theta}$ を条件(0)，(1')，(2') を満たすようなSchur 測度の特殊化とする．$\tilde{c}_1=2\tilde{f}'(1)(=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}d_k)$，$\tilde{c}_2=\tilde{f}'''(1)+3\tilde{f}''(1)+\tilde{f}'(1)(=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^2d_k)$ とおく．このとき，$\theta\to+\infty$ で，確率変数

$$\frac{\lambda_j'-\tilde{c}_1\theta}{(\tilde{c}_2\theta)^{1/3}},\qquad j=1,2,\ldots$$

はAiry ensemble に分布収束する． □

このように一般的な条件のもとで，Schur 測度の極限定理を述べることができた．

3 定理2.1と定理2.2の証明

定理の仮定の意味を理解するためにも，定理の証明の概略をここで述べておこう．まず重要なのは，次のSchur 測度の相関関数の行列式表示である．分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$，$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq 0$ に対して，$S(\lambda)=\{\lambda_j-j;\ j\geq 1\}\subset\mathbb{Z}$ とおく．Schur 測度の相関関数とは，各有限集合 $A\subset\mathbb{Z}$ に対して，

$$\rho_{\mathrm{Schur}}(A)=\mathrm{P}_{\mathrm{Schur}}(\{\lambda\in\mathcal{P};\ S(\lambda)\supset A\})$$

で定義される関数のことである．

定理 3.1 ([O2]). 有限集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}\subset\mathbb{Z}$ に対して，

$$\rho_{\mathrm{Schur}}(A)=\det(\mathcal{K}_{\mathrm{Schur}}(a_i,a_j))_{1\leq i,j\leq N}.$$

ここで，$\mathcal{K}_{\mathrm{Schur}}$ は

(3.1)
$$\mathcal{K}_{\mathrm{Schur}}(r,s)=[z^rw^{-s}]\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p_k(X)}{k}z^k-\frac{p_k(Y)}{k}z^{-k}-\frac{p_k(X)}{k}w^k+\frac{p_k(Y)}{k}w^{-k}\right)\right)\frac{z}{z-w}$$

で定まる $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上の関数である．ただし，$\frac{z}{z-w}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}w^k$ として，$[z^rw^{-s}]$ は z^rw^{-s} の係数を表している． □

対称関数全体のなす代数を Λ とかく．代数 Λ は Schur 関数全体 $\{s_\lambda;\lambda\in\mathcal{P}\}$ を基底としてもち，$\omega(s_\lambda)=s_{\lambda'}$ で定まる involution ω をもつ ([Mac])．この ω はべき和関数に対して，$\omega(p_k)=(-1)^{k-1}p_k$ を満たすのだった．よって，定理 3.1 から次を得る．

系 3.2. 有限集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}\subset\mathbb{Z}$ に対して,

$$\tilde{\rho}_{\mathrm{Schur}}(A)=\mathrm{P}_{\mathrm{Schur}}(\{\lambda\in\mathcal{P};S(\lambda')\supset A\})=\det(\mathcal{K}'_{\mathrm{Schur}}(a_i,a_j))_{1\le i,j\le N}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}'_{\mathrm{Schur}}(r,s)\\&=[z^rw^{-s}]\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(p_k(X)z^k-p_k(Y)z^{-k}-p_k(X)w^k+p_k(Y)w^{-k})\right)\frac{z}{z-w}.\quad\square\end{aligned}$$

Airy ensemble の定義を思い出すと，定理 2.1 を示すには次の命題が言えればよい.

命題 3.3. $\mathcal{K}_{\mathrm{Schur},p^\theta}$ を $\mathcal{K}_{\mathrm{Schur}}$ から(0) の特殊化で得られる核とする．そのとき，任意の実数 x,y に対して,

$$\lim_{\theta\to+\infty}(c_2\theta)^{1/3}\mathcal{K}_{\mathrm{Schur},p^\theta}(c_1\theta+(c_2\theta)^{1/3}x,c_1\theta+(c_2\theta)^{1/3}y)=\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x,y).\quad\square$$

この命題を証明しよう．定理 3.1 と仮定 (1) より,

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}_{\mathrm{Schur},p^\theta}(r,s)\\&=\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2\iint_{\substack{|z|=1+\epsilon/2,\\|w|=1}}\exp\left(f^\theta(z)-f^\theta(z^{-1})-f^\theta(w)+f^\theta(w^{-1})\right)\frac{z}{z-w}\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}w}{z^{r+1}w^{-s+1}}.\end{aligned}$$

ここで，$f^\theta(z)$ は仮定 (1) より $|z|<1+\epsilon$ で正則であり，積分路は二つの円 $\{z;\ |z|=1+\frac{\epsilon}{2}\}$ と $\{w;\ |w|=1\}$ である．さらに仮定 (0) と (2) を用いて,

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}_{\mathrm{Schur},p^\theta}(r,s)\\&=\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2\iint_{\substack{|z|=1+\epsilon/2,\\|w|=1}}\exp\left(f^\theta(z)-f^\theta(z^{-1})-f^\theta(w)+f^\theta(w^{-1})\right)\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}w^k\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}w}{z^{r+1}w^{-s+1}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathbb{T}}\exp\left(f^\theta(z)-f^\theta(z^{-1})\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{r+k+1}}\right)\\&\qquad\times\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathbb{T}}\exp\left(f^\theta(w)-f^\theta(w^{-1})\right)\frac{\mathrm{d}w}{w^{s+k+1}}\right)\\&\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathbb{T}}\exp\left(\theta(f(z)-f(z^{-1}))\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{r+k+1}}\right)\\&\qquad\times\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathbb{T}}\exp\left(\theta(f(w)-f(w^{-1}))\right)\frac{\mathrm{d}w}{w^{s+k+1}}\right)\qquad\text{as }\theta\to+\infty.\end{aligned}$$

次の補題を使う.

補題 3.4. $f(z)$, c_1, c_2 を定理 2.1 のとおりとする.

$$I_\theta(x) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{T}} \exp(\theta(f(z)-f(z^{-1})))z^{-c_1\theta}\frac{\mathrm{d}z}{z^{(c_2\theta)^{1/3}x+1}}$$

とおくと, $\lim_{\theta\to+\infty}(c_2\theta)^{1/3}I_\theta(x) = \mathrm{Ai}(x)$. □

すると, $\theta\to+\infty$ で,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_{\mathrm{Schur},p^\theta}(c_1\theta+(c_2\theta)^{1/3}x, c_1\theta+(c_2\theta)^{1/3}y)\\
\sim&\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{T}}\exp\left(\theta(f(z)-f(z^{-1}))\right)z^{-c_1\theta}\frac{\mathrm{d}z}{z^{(c_2\theta)^{1/3}x+k+1}}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{T}}\exp\left(\theta(f(w)-f(w^{-1}))\right)w^{-c_1\theta}\frac{\mathrm{d}w}{w^{(c_2\theta)^{1/3}y+k+1}}\right)\\
\sim&(c_2\theta)^{1/3}\int_0^\infty\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{T}}\exp\left(\theta(f(z)-f(z^{-1}))\right)z^{-c_1\theta}\frac{\mathrm{d}z}{z^{(c_2\theta)^{1/3}(x+\zeta)+1}}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{T}}\exp\left(\theta(f(w)-f(w^{-1}))\right)w^{-c_1\theta}\frac{\mathrm{d}w}{w^{(c_2\theta)^{1/3}(y+\zeta)+1}}\right)\mathrm{d}\zeta\\
\sim&(c_2\theta)^{1/3}\int_0^\infty(c_2\theta)^{-1/3}\mathrm{Ai}(x+\zeta)(c_2\theta)^{-1/3}\mathrm{Ai}(y+\zeta)\mathrm{d}\zeta\\
=&(c_2\theta)^{-1/3}\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x,y).
\end{aligned}$$

よって, 命題を得る.

補題 3.4 は鞍点法 (saddle point method) ([E] 参照) を使って示せる. 証明の概略だけ述べておこう.

$S(z) = f(z) - f(z^{-1}) - c_1\log z$ とおくと, $z=1$ のまわりで,

$$S(z) = \frac{c_2}{3}(z-1)^3 + O((z-1)^4)$$

となる. すなわち, $z=1$ は $S(z)$ の 2 位の鞍点となる. このとき積分

$$I_\theta(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{T}}\exp\left(\theta(\frac{c_2}{3}(z-1)^3+O((z-1)^4))\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{(c_2\theta)^{1/3}x+1}}$$

は, 積分路を被積分関数の exp の中身の実部が $z=1$ で最大になるように変形することで, 積分値が点 $z=1$ の近くでの値に集中する. 仮定 (2) を用いることで, 積分が Airy 関数に収束することがわかる.

定理 2.2 は系 3.2 から同様に得られる.

4 定理 2.1 と定理 2.2 の例

定理 2.1 と定理 2.2 は一般的な形で述べているが, ここで例を挙げよう. 今までの結果もあるが, 新しい例も生まれる.

4.1 Plancherel 測度

1.5 章でも述べたように，poissonized Plancherel 測度は Schur 測度から特殊化 $p_k(X) = p_k(Y) = \delta_{1,k}\sqrt{\xi}$ $(k \geq 1, \xi > 0)$ で得られる．定理 2.1 と定理 2.2 の記号に合わせると，

$$p_k^\theta = \delta_{k,1}\theta, \qquad \theta = \sqrt{\xi}$$

という特殊化である．よって，

$$f^\theta(z) = \tilde{f}^\theta(z) = \theta z, \qquad f(z) = \tilde{f}(z) = z$$

となる．条件 (0), (1), (2), (1'), (2') はすべて明らかに満たされる．また，$c_1 = \tilde{c}_1 = 2$ かつ $c_2 = \tilde{c}_2 = 1$. よって，定理 2.1 を適用することで定理 1.2 を得る．定理 2.2 を適用すると同じことが λ'_j についていえる．しかし，$f^\lambda = f^{\lambda'}$ だから，定理 2.2 を適用するまでも無く，λ_j と λ'_j の分布は同じである．

4.2 α-specialization

α を $0 < \alpha < 1$ なる実数とする．$X = Y = (\overbrace{\alpha, \dots, \alpha}^{n}, 0, 0, \dots)$ と特殊化する．この特殊化を α-specialization という．このとき Schur 測度は以下のようになる．

$$\mathrm{P}_{\mathrm{Schur},\alpha,n}(\lambda) = (1-\alpha^2)^{n^2}\alpha^{2|\lambda|}\left(\frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_i - i - \lambda_j + j)}{\prod_{k=1}^{n-1} k!}\right)^2.$$

このとき，$p_k(X) = p_k(Y) = n\alpha^k$ だから，定理 2.1 と定理 2.2 の記号に合わせると，

$$p_k^\theta = \theta\alpha^k, \qquad \theta = n$$

となる．すると，

$$\begin{aligned} f^\theta(z) &= -\theta\log(1-\alpha z), & f(z) &= -\log(1-\alpha z), \\ \tilde{f}^\theta(z) &= \theta\log(1+\alpha z), & \tilde{f}(z) &= \log(1+\alpha z) \end{aligned}$$

となる．これらの関数は $|z| < \alpha^{-1}$ で正則だから，条件 (0), (1), (2), (1'), (2') はすべて満たされる．よって，定理 2.1 と定理 2.2 が適用できる．定数 $c_1, c_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ はそれぞれ

$$c_1 = \frac{2\alpha}{1-\alpha},\ c_2 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}, \qquad \tilde{c}_1 = \frac{2\alpha}{1+\alpha},\ \tilde{c}_2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3}$$

と与えられる．この結果は λ_1 に対してのみ，[J1] で得られている．

4.3 principal specialization

$0 < q < 1$とする．$X = Y = (q, q^2, q^3, \ldots)$と特殊化する．いわゆるprincipal specializationである．このときSchur測度は

$$
\mathrm{P}_{\mathrm{Schur},q}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{n-1}\left(\frac{q^{|\lambda|+n(\lambda)}}{\prod_{x\in\lambda}(1-q^{h(x)})}\right)^2, \tag{4.1}
$$

となる．ここで，$n(\lambda) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$，そして$h(x) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ $(x = (i,j) \in \lambda)$はhook-lengthである．この測度において$q \uparrow 1$としたときのλ_j, λ'_jの極限分布を得たい．

上の特殊化により$p_k(X) = p_k(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{ik} = \frac{q^k}{1-q^k}$である．よって，定理2.1と定理2.2の記号で

$$
p_k^\theta = \frac{q^k}{1-q^k}, \qquad q = 1 - \frac{1}{\theta}
$$

とすれば，“$q \uparrow 1$” $\Leftrightarrow$ “$\theta \to +\infty$” となる．まず，

$$
f^\theta(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\sum_{i=1}^{\infty}q^{ik} = -\sum_{i=1}^{\infty}\log(1-q^i z) = \log\frac{1}{(qz;q)_\infty}
$$

となり，これは$|z| < q^{-1}$で正則である．ここで，$(a;q)_\infty := \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$．また，

$$
d_k = \lim_{\theta\to+\infty}\frac{p_k^\theta}{\theta} = \lim_{q\uparrow 1}\frac{1-q}{1-q^k}q^k = \frac{1}{k}.
$$

より，

$$
f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2} =: \mathrm{Li}_2(z)
$$

であるが，これはよく知られているように$z = 1$で正則になるように解析接続することはできない．したがって，仮定(2)は満たされず，定理2.1は適用できない！

しかしながら，定理2.2は適用できる．実際，

$$
\tilde{f}^\theta(z) = \log(-qz;q)_\infty, \qquad \tilde{f}(z) = -\mathrm{Li}_2(-z)
$$

となるが，$\tilde{f}^\theta(z)$は$|z| < q^{-1}$で正則であり，また$\tilde{f}(z)$は$z = 1$のまわりに正則になるように解析接続できる．したがって，仮定(0), (1'), (2')は満たされ，定理2.2が適用できる．

$$
\tilde{c}_1 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 2\log 2 \quad \text{and} \quad \tilde{c}_2 = \tilde{f}'''(1) + 3\tilde{f}''(1) + \tilde{f}'(1) = \frac{1}{4}. \tag{4.2}
$$

となるから，次を得た．

系 4.1. (4.1) で定まる測度 $P_{\mathrm{Schur},q}$ において，確率変数

$$\frac{\lambda'_j - (2\log 2)\theta}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^{1/3}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \qquad \theta = \frac{1}{1-q}$$

は $q \uparrow 1$ でAiry ensemble に分布収束する. □

この結果は新しい. 以上のように測度 $P_{\mathrm{Schur},q}$ においては，λ_j の極限分布は（この方法では）見えないが，λ'_j の極限分布は得られるのである.

4.4 principal specialization with parameters

系 4.1 はもう少し一般化した形でかける. $p_k = \frac{a^k - b^k}{1-q^k}$ と特殊化する. ただし，a と b は $0 \le b < a < 1$ として固定し，$0 < q < 1$ とする. $a = q$, $b = 0$ とすると，principal specialzation に他ならない. そうすると，Schur 測度は [Mac, I-3, Example 3] によると，

$$P_{\mathrm{Schur},q,a,b}(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1-abq^n)^2}{(1-a^2q^n)(1-b^2q^n)} \right)^n \cdot \left(q^{n(\lambda)} \prod_{x \in \lambda} \frac{a - bq^{c(x)}}{1 - q^{h(x)}} \right)^2. \tag{4.3}$$

となる. ただし，$c(x) = c(i,j) = j - i$ は $x = (i,j)$ の content. 先ほどと同じように，

$$p_k^\theta := \frac{a^k - b^k}{1-q^k} \sim \frac{a^k - b^k}{k}\theta, \qquad \text{as } \theta = \frac{1}{1-q},\ q \uparrow 1.$$

となる. さらに

$$\begin{aligned} f^\theta(z) &= \log \frac{(bz;q)_\infty}{(az;q)_\infty}, & \tilde{f}^\theta(z) &= \log \frac{(-az;q)_\infty}{(-bz;q)_\infty}, \\ f(z) &= \mathrm{Li}_2(az) - \mathrm{Li}_2(bz), & \tilde{f}(z) &= \mathrm{Li}_2(-bz) - \mathrm{Li}_2(-az) \end{aligned}$$

となることがすぐにわかる. これらは，仮定 (1), (1'), (2), (2') を全て満たすから定理 2.1 も定理 2.2 も適用できる.

$$c_1 = 2\log\frac{1-b}{1-a},\ c_2 = \frac{(a-b)(1-ab)}{(1-a)^2(1-b)^2} \quad \text{and} \quad \tilde{c}_1 = 2\log\frac{1+a}{1+b},\ \tilde{c}_2 = \frac{(a-b)(1-ab)}{(1+a)^2(1+b)^2}.$$

となるから，次を得た.

系 4.2. (4.3) で定まる測度 $P_{\mathrm{Schur},q,a,b}$ において，確率変数

$$\frac{\lambda_j - c_1\theta}{(c_2\theta)^{1/3}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \qquad \theta = \frac{1}{1-q}$$

は $q \uparrow 1$ でAiry ensemble に分布収束する. ここで，$c_1 = 2\log\frac{1-b}{1-a}$, $c_2 = \frac{(a-b)(1-ab)}{(1-a)^2(1-b)^2}$ である. □

ここで，$a=q\to 1$，$b=0$とすると，c_1, c_2は発散してしまう．これは4.3章での「λ_jの分布が見えない」という事実とcompatibleである．

系 4.3. (4.3)で定まる測度$\mathrm{P}_{\mathrm{Schur},q,a,b}$において，確率変数

$$\frac{\lambda'_j-\tilde{c}_1\theta}{(\tilde{c}_2\theta)^{1/3}},\qquad j=1,2,\ldots,\qquad \theta=\frac{1}{1-q}$$

は$q\uparrow 1$でAiry ensembleに分布収束する．ここで，$\tilde{c}_1=2\log\frac{1+a}{1+b}$，$\tilde{c}_2=\frac{(a-b)(1-ab)}{(1+a)^2(1+b)^2}$である． □

ここで，$a=q\to 1$，$b=0$とすると，系4.1を再び得る．

4.5 その他の例

やや人工的ではあるがもうひとつ例を与えておこう．$p_k=\left(\frac{q^k}{1-q^k}\right)^\sigma$と特殊化する．ただし，$\sigma>0$かつ$0<q<1$．第4.3章での特殊化は$\sigma=1$のときである．すると，

$$p_k^\theta=\left(\frac{q^k}{1-q^k}\right)^\sigma\sim\frac{\theta}{k^\sigma},\qquad q=e^{-1/\theta^\sigma},\ \theta\to\infty$$

である．さらに，$\tilde{f}^\theta(z)=\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{q^k}{1-q^k}\right)^\sigma\frac{z^k}{k}$，$\tilde{f}(z)=-\mathrm{Li}_{\sigma+1}(-z)$となり，仮定(0), (1'), (2')は満たされる．ただし，4.3章と同様に仮定(1), (2)は満たされない．

さて，

$$\tilde{\zeta}(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^{-s}},\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

とおく．リーマンゼータ関数を$\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$とすると，これは$\tilde{\zeta}(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)$だから，$\tilde{\zeta}(s)$は$\mathbb{C}$全体に正則関数として解析接続できる．このとき，

$$\tilde{c}_1=2\tilde{\zeta}(\sigma),\ \tilde{c}_2=\tilde{\zeta}(\sigma-2).$$

となる．以上より，Schur測度から特殊化$p_k=\left(\frac{q^k}{1-q^k}\right)^\sigma$ $(\sigma>0)$で定まる測度において，確率変数

$$\frac{\lambda'_j-2\tilde{\zeta}(\sigma)\theta}{(\tilde{\zeta}(\sigma-2)\theta)^{1/3}},\qquad j=1,2,\ldots,\qquad \theta=\left(\frac{1}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\sim\left(\frac{1}{1-q}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

は$q\uparrow 1$でAiry ensembleに分布収束する．

5 重さ $|\lambda|$ のモーメント

ここではHall-Littlewood測度(1.1)において，分割の重さ $|\lambda|=\sum_j \lambda_j$ を確率変数と思い，そのモーメント

$$\mathbb{E}(|\lambda|^n)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}|\lambda|^n \mathrm{P}_{\mathrm{HL},t}(\lambda)=\left(\prod_{i,j=1}^{\infty}\frac{1-X_iY_j}{1-tX_iY_j}\right)\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}|\lambda|^n Q_\lambda(X;t)P_\lambda(Y;t),\quad n=0,1,2,\dots$$

を計算しよう．λ_j たちの分布を見るよりも易しい．

定理 5.1. Hall-Littlewood測度において，確率変数 $|\lambda|$ のcumulantは，

$$\phi_r=\phi_r(X,Y;t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{r-1}(1-t^k)p_k(X)p_k(Y),\qquad r=1,2,\dots$$

で与えられる．すなわち，$|\lambda|$ のモーメント母関数は

$$\mathbb{E}(e^{|\lambda|z})=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(|\lambda|^n)\frac{z^n}{n!}=\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}\phi_r\frac{z^r}{r!}\right)$$

である．

より明示的に，

$$\mathbb{E}(|\lambda|^n)=n!\sum_{\rho\vdash n}\prod_{r\geq 1}\frac{1}{m_r(\rho)}\left(\frac{\phi_r}{r!}\right)^{m_r(\rho)}$$

とかける．たとえば，

$$\mathbb{E}(|\lambda|)=\phi_1,\quad \mathbb{E}(|\lambda|^2)=\phi_1^2+\phi_2,\quad \mathrm{Var}(|\lambda|)=\phi_2.$$

例 5.1. 前章での特殊化における $\mathbb{E}(|\lambda|)$ の例をいくつか見てみよう．

1. 第4.1章の特殊化 $p_k=\delta_{k,1}\sqrt{\xi}$ において，$\mathbb{E}(|\lambda|)=\xi$.
2. 第4.2章の特殊化 $X=Y=(\overbrace{\alpha,\dots,\alpha}^{n},0,0\dots)$ において，$\mathbb{E}(|\lambda|)=\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}n^2$.
3. 第4.3章の特殊化 $X=Y=(q,q^2,q^3,\dots)$ において，$\mathbb{E}(|\lambda|)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q^k}{1-q^k}\right)^2$. さらに，$\lim_{q\uparrow 1}(1-q)^2\mathbb{E}(|\lambda|)=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ となる． □

定理5.1の証明は以下のようである．$Z=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}Q_\lambda(X;t)P_\lambda(Y;t)$ とおく．対称関数全体の代数の上の微分作用素 Δ_X を $\Delta_X=\sum_{k=1}^{\infty}X_k\frac{\partial}{\partial X_k}$ と定義する．$\Delta_X(p_k(X))=kp_k(X)$ であり

$\Delta_X Q_\lambda(X;t) = |\lambda| Q_\lambda(X;t)$ だから,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\lambda|^n) =& \frac{1}{Z}\Delta_X^n(Z) = \frac{1}{Z}\Delta_X\left(Z\frac{1}{Z}\Delta_X^{n-1}(Z)\right)\\ =& \frac{1}{Z}\left\{\Delta_X(Z)\frac{1}{Z}\Delta_X^{n-1}(Z) + Z\Delta_X\left(\frac{1}{Z}\Delta_X^{n-1}(Z)\right)\right\}\\ =& \mathbb{E}(|\lambda|)\mathbb{E}(|\lambda|^{n-1}) + \Delta_X(\mathbb{E}(|\lambda|^{n-1}))\end{aligned}$$

となる．それゆえ，$\mathbb{E}(|\lambda|) = \phi_1$ から漸化式 $\mathbb{E}(|\lambda|^n) = (\phi_1 + \Delta_X)(\mathbb{E}(|\lambda|^{n-1})$ $(n \geq 1)$ を得る．すなわち,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(|\lambda|^n)\frac{z^n}{n!} = \exp(z(\phi_1 + \Delta_X))(1).$$

Campbell-Hausdorff の公式と関係式

$$\Delta_X(\phi_r) = \phi_{r+1}, \quad [\Delta_X, \phi_r] = \phi_{r+1} \qquad (r \geq 1)$$

から

$$\exp(z(\phi_1 + \Delta_X))\exp(-z\Delta_X)(1) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}\phi_r\frac{z^r}{r!}\right)$$

を得る．$\Delta_X(1) = 0$ だから，定理を得る．

6 終わりに

第 2 章の内容は shifted Schur 測度 (1.3) でも同様にできる．それには，[M2] で得られた shifted Schur 測度の相関関数のパフィアン表示が重要である．

$$Q_X(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1 + X_j z}{1 - X_j z}$$

とおく．

定理 6.1 ([M2]). 有限集合 $A = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\mathrm{P}_{\mathrm{SS}}(\{\lambda \in \mathcal{D};\ \lambda \supset A\}) = \mathrm{pf}(\mathcal{K}(a_i, a_j))_{1\leq i,j\leq N}$$

とかける．ここで，各 $\mathcal{K}(r,s)$ は 2×2 行列

$$\mathcal{K}(r,s) = \begin{pmatrix}\mathcal{K}_{00}(r,s) & \mathcal{K}_{01}(r,s)\\ \mathcal{K}_{10}(r,s) & \mathcal{K}_{11}(r,s)\end{pmatrix}$$

でその各成分は以下で定まる.

$$\mathcal{K}_{00}(r,s)=\frac{1}{2}[z^r w^s]\frac{Q_X(z)Q_X(w)}{Q_Y(z^{-1})Q_Y(w^{-1})}\frac{z-w}{z+w},$$

ここで，$[z^r w^s]$ は $z^r w^s$ の係数を表し，$\frac{z-w}{z+w}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{-k}w^k$ と展開する.

$$\mathcal{K}_{01}(r,s)=-\mathcal{K}_{10}(s,r)=\frac{1}{2}[z^r w^s]\frac{Q_X(z)Q_Y(w)}{Q_Y(z^{-1})Q_X(w^{-1})}\frac{zw+1}{zw-1},$$

ここで，$\frac{zw+1}{zw-1}=-\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}z^k w^k\right)$. そして，

$$\mathcal{K}_{11}(r,s)=\frac{1}{2}[z^r w^s]\frac{Q_Y(z)Q_Y(w)}{Q_X(z^{-1})Q_X(w^{-1})}\frac{w-z}{w+z},$$

ここで，$\frac{w-z}{w+z}=-\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{-k}w^k\right)$. □

この定理は，あるハイゼンベルグ代数の外積代数上での表現を通じて得られた．また最近，より直接的な線型代数的証明も得た（[M4, 松本 2, 松本 3]）．shifted Schur 測度の極限分布については [松本 2] でくわしく述べられる．

さて，Hall-Littlewood 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{HL},t}$ を思い出そう．いままで述べてきたように Schur 測度（$t=0$ のとき）および shifted Schur 測度（$t=-1$ のとき）のいずれも，λ_j を適当にスケーリングして極限分布を考えると，Airy ensemble に収束することがわかった．それは相関関数の行列式表示（定理 3.1，系 3.2）またはパフィアン表示（定理 6.1）から得られる．では一般の t における λ_j の極限分布はどのようになるだろうか？　すなわち，

問題. Hall-Littlewood 測度（の特殊化）における λ_j の極限分布はどうなるか？

Hall-Littlewood 関数は特に行列式（またはパフィアン）による表示があるわけでもなく，Hall-Littlewood 測度の相関関数を求めることは困難である．相関関数がどういう形で与えられるのか，それを求めていくことは今後の研究の課題の一つである．

参考文献

[AD] D. Aldous and P. Diaconis, Longest increasing subsequences: from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 413–432.

[BOO] A. Borodin, A. Okounkov, and G. Olshanski, Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 481–515.

[E] A. Endélyi, “Asymptotic expansions”, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[J1] K. Johansson, Shape fluctuations and random matrices, Commun. Math. Phys. **209** (2000), 437–476.

[J2] —, Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, Ann. of Math. (2) **153** (2001), 259–296.

[Mac] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd Edition", Oxford, 1995.

[M1] S. Matsumoto, A scaling limit for t-Schur measures, To appear in Kyushu J. Math., math.PR/0309037.

[M2] —, Correlation functions of the shifted Schur measure, preprint, math.CO/0312373.

[M3] —, Limit theorems for the principal specialization of Schur measures, preprint.

[M4] —, α-Pfaffian, pfaffian point process and shifted Schur measure, preprint.

[松本 1] 松本 詔, A scaling limit for t-Schur measures, 2003 年度表現論シンポジウム 講演集.

[松本 2] —, シューア測度とその類似の極限分布, 研究集会「表現論における組合せ論的手法とその応用」(2004 年 10 月 RIMS) 講演集 (収録予定).

[松本 3] —, パフィアンの一般化と pfaffian point process, 2004 年度表現論シンポジウム講演集.

[O1] A. Okounkov, Random matrices and random permutations, Internat. Math. Res. Notices (2000), 1043–1095.

[O2] —, Infinite wedge and random partitions, Selecta Math. (N.S.) **7** (2001), 57–81.

[O3] —, The uses of random partitions, math-ph/0309015.

[OR] A. Okounkov and N. Reshetikhin, Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 581–603.

[TW1] C. A. Tracy and H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, Commun. Math. Phys. **159** (1994), 151–174.

[TW2] —, A limit theorem for shifted Schur measures, Duke Math. J. **123** (2004), 171–208.