数理解析研究所講究録 1410 巻 2005 年 124-138

局所対称リーマン多様体に関する スペクトルゼータ関数の特殊値

橋本康史
Yasufumi Hashimoto
九州大学大学院数理学府
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 Introduction

G を実階数 1 の半単純リー群, K を G の極大コンパクト群, Γ を co-compact torsion free な G の離散部分群とする. このとき, λ_j を $\Gamma\backslash G/K$ 上のラプラシアン Δ の固有値 $(0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots)$, n_j を λ_j の重複度とし, **スペクトルゼータ関数** $\zeta_\Delta(s)$ を次で定義する.

$$\zeta_\Delta(s)=\sum_{j=1}^{\infty}n_j\lambda_j^{-s}\qquad \mathrm{Re}\,s>d/2. \tag{1.1}$$

ここで, d は G/K の次元である. $\Gamma\backslash G/K$ がコンパクトリーマン面である場合には, $\zeta_\Delta(s)$ の 2 以上での整数点の値が, 前回の表現論シンポジウムにおいて, セルバーグゼータ関数のローラン展開の係数として定義される**オイラーセルバーグ定数**を用いて表せることが知られており, その関係式が本質的に n に関する漸化式の形で [HIKW], [St] によって得られている.

本稿では, コンパクトリーマン面の場合も含めたコンパクトな局所対称リーマン多様体 $\Gamma\backslash G/K$ に関するスペクトルゼータ関数の整数点の値 $\zeta_\Delta(n)$ $(n>d/2)$ をオイラーセルバーグ定数と $\zeta(n)$ たちを用いて表す公式を (漸化式ではなく) 一般式の形で明示的に記述することを主目的とする. さらに, コンパクトでない場合にも Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$, 及び $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群の場合に限って, コンパクトの場合と同様の公式が記述できたので紹介する.

また, 応用として, Γ が四元数群, および $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群の場合の ζ_Δ の数値計算について紹介する. Theorem 4.1 から ζ_Δ がオイラーセルバーグ定数を用いて記述されているので, オイラーセルバーグ定数を計算することによって $\zeta_\Delta(n)$ の値が求まることがわかる. ここでは, 前回の講演の際に証明したオイラーセルバーグ定数の双曲元の和としての表示式 ([H]) を [AKN] によって得られたセルバーグゼータ関数の数論的表示を用いて書き直す, という方法をとった. 本講演ではさらに, $\{\zeta_\Delta(n)\}_{n\geq 2}$ の n に関する増大度が主に λ_1 に依っていることを利用して, ラプラシアンの第一固有値の数値評価を行った.

2 記号の準備と主結果

Gを実階数1の半単純リー群，KをGの極大コンパクト群とし，dをG/Kの次元とする．$\mathfrak{g},\mathfrak{k}$をそれぞれ$G,K$のリー環とし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$をCartan対合$\theta$に関するCartan分解とする．$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$を$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間とする．このとき，$G/K$の階数が1なので，$\dim\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=1$である．$\mathfrak{a}$を，$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}+\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ ($\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k}$) となるように$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$を$\theta$-stableに拡張した$\mathfrak{g}$の極大可換部分環とする．このとき，$A=\exp\mathfrak{a}$, $A_{\mathfrak{p}}=\exp\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, $A_{\mathfrak{k}}=\exp\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$とおく．また，$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}},\mathfrak{a}^{\mathbf{C}}$をそれぞれ$\mathfrak{g},\mathfrak{a}$の複素化とする．このとき，$\Phi$を$(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}},\mathfrak{a}^{\mathbf{C}})$のルートの集合，$\Phi^+$を$\Phi$の元で正であるものたちのなす集合，$P_+$, P_-をそれぞれ$P_+=\{\alpha\in\Phi^+|\alpha\not\equiv 0$ on $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\}$, $P_-=\Phi^+-P_+$とし，$\rho=1/2\sum_{\alpha\in P_+}\alpha$とおく．$h\in A$と$\mathfrak{a}$上の線形形式$\lambda$に対して，$\xi_\lambda$を$\xi_\lambda(h)=\exp\lambda(\log h)$で定義する．$\Sigma$を$P_+$の元の$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$への制限としたとき，$\Sigma$は高々2つの元からなる集合であり，ある$\beta\in\Sigma$に対して$\Sigma=\{\beta\},\{\beta,2\beta\}$と書ける．この$\beta$に対して，$H_0\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$を$\beta(H_0)=1$で定め，$\rho_0=\rho(H_0)$と書く．

さて，Γをco-compact tosion freeなGの離散部分群と仮定する．$C(\Gamma)$をΓの位数が有限でない半単純元のΓ共役類のなす集合，$\mathrm{Prim}(\Gamma)$をΓの素元のなす集合，$Z(\Gamma)$をΓの中心とする．$\gamma\in C(\Gamma)$に対して，δ_γを$\gamma=\delta_\gamma^j(j\geq 1)$なる素元，$h(\gamma)$を$\gamma$と共役な$A$の元とし，$h_{\mathfrak{p}}(\gamma)\in A_{\mathfrak{p}}$, $h_{\mathfrak{k}}(\gamma)\in A_{\mathfrak{k}}$を$h(\gamma)=h_{\mathfrak{p}}(\gamma)h_{\mathfrak{k}}(\gamma)$で定める．また，$N(\gamma)$を$N(\gamma)=\exp(\beta(\log(h_{\mathfrak{p}}(\gamma))))$, $D(\gamma)$を$D(\gamma)=N(\gamma)^{2\rho_0}\prod_{\alpha\in P_+}|1-\xi_\alpha(h(\gamma))^{-1}|$で定義する．

G/KのPlancherel測度を$\mu(s)$とし，また，便宜上次を定義する．

$$\hat{\rho}_0=\begin{cases}\rho_0,\\ \rho_0/2,\end{cases}\qquad \bar{\mu}(r)=\begin{cases}\mu(r) & \text{if}\quad G=SO(n,1),\\ 2\mu(2r) & \text{if}\quad G\neq SO(n,1).\end{cases}\tag{2.1}$$

このとき，$\bar{\mu}(r)$は(2.3)によって定まる$C_G,P(r),\sigma(r)$を用いて次のように書ける（[Mi], [Wi]）．

$$\bar{\mu}(s):=\pi C_G^{-1}P(r)\sigma(r).\tag{2.2}$$

G	d	ρ_0	$\hat{\rho}_0$	C_G	$\sigma(r)$
$SO(2m-1,1)$	$2m-1$	$m-1$	$m-1$	$2^{4m-6}\Gamma(m-1/2)^2$	1
$SO(2m,1)$	$2m$	$m-1/2$	$m-1/2$	$2^{4m-4}\Gamma(m)^2$	$\tanh\pi r$
$SU(2m-1,1)$	$4m-2$	$2m-1$	$m-1/2$	$2^{4m-5}\Gamma(2m-1)^2$	$\tanh\pi r$
$SU(2m,1)$	$4m$	$2m$	m	$2^{4m-5}\Gamma(2m)^2$	$\coth\pi r$
$SP(m,1)$	$4m$	$2m+1$	$m+1/2$	$2^{4m-1}\Gamma(2m)^2$	$\tanh\pi r$
F_4	16	11	$11/2$	$2^{19}\Gamma(8)^2$	$\tanh\pi r$

G	$P(r)$
$SO(2m-1,1)$	$r^2\prod_{j=0}^{m-2}(r^2+j^2)$
$SO(2m,1)$	$r\prod_{j=1}^{m-1}\{r^2+(j-1/2)^2\}$
$SU(2m-1,1)$	$r\prod_{j=1}^{m-1}\{r^2+(j-1/2)^2\}^2$
$SU(2m,1)$	$r^3\prod_{j=1}^{m-1}(r^2+j^2)^2$
$SP(m,1)$	$r\{r^2+(m-1/2)^2\}\prod_{j=1}^{m-1}\{r^2+(j-1/2)^2\}^2$
F_4	$r(r^2+1/4)^2(r^2+9/4)^2(r^2+25/4)(r^2+49/4)(r^2+81/4)$

(2.3)

λ_j を $\Gamma\backslash G/K$ 上のラプラシアン Δ の固有値 $(0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots)$，$r_j$ を $\lambda_j=\rho_0^2+r_j^2$ で定まる値，n_j を λ_j の重複度とする．このとき，スペクトルゼータ関数 $\zeta_\Delta(s)$ を次で定義する．

$$\zeta_\Delta(s)=\sum_{j=1}^{\infty}n_j\lambda_j^{-s}\quad s>d/2. \tag{2.4}$$

関数 f をそのフーリエ変換 $\hat{f}(r)=1/2\pi\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ixr}dx$ が条件 (1) $\hat{f}(r)=\hat{f}(-r)$, (2) $\hat{f}$ が $\{|\operatorname{Im}r|\leq\rho_0+\delta\}$ で正則であるような $\delta>0$ が存在する, (3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\hat{f}(r)=O(|r|^{-d-\varepsilon})$ as $|r|\to\infty$ である, を満たすものとする．このとき，次の**セルバーグ跡公式**が成り立つ（[Ga]）．

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0}n_j\hat{f}(r_j)=&\sum_{\gamma\in C(\Gamma)-Z(\Gamma)}\log N(\delta_\gamma)D(\gamma)^{-1}N(\gamma)^{\rho_0}f(\log N(\gamma))\\&+\frac{1}{4\pi}\operatorname{vol}(\Gamma\backslash G)[Z(\Gamma)]\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)\mu(r)dr.\end{aligned}\tag{2.5}$$

セルバーグゼータ関数を次で定義する．

$$Z_\Gamma(s)=\prod_{\delta\in\operatorname{Prim}(\Gamma)}\prod_{\lambda\in L}\left(1-\xi_\lambda(h(\delta))^{-1}N(\delta)^{-s}\right)^{m_\lambda}\quad\operatorname{Re}s>2\rho_0. \tag{2.6}$$

ここで，L を $L:=\left\{\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i|\alpha_i\in P_+,m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$，$m_\lambda$ を $\lambda=\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i\in L$ となる相異なる $(m_1,\ldots,m_l)$ の個数である．このとき，$Z_\Gamma(s)$ の対数微分は次で書ける．

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)}=\sum_{\gamma\in C(\Gamma)-Z(\Gamma)}\log N(\delta_\gamma)D(\gamma)^{-1}N(\gamma)^{2\rho_0-s}\quad\operatorname{Re}s>2\rho_0. \tag{2.7}$$

$Z'_\Gamma(s)/Z_\Gamma(s)$ は $s=2\rho_0$ で1位の極を持つことが知られており，$s=2\rho_0$ でのローラン展開は

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)}=\frac{1}{s-2\rho_0}+\tilde{\gamma}_\Gamma^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}(s-2\rho_0)^k. \tag{2.8}$$

と書ける．ここで，$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$ は k 次のオイラーセルバーグ定数と呼ばれる定数で，次のような表示を持つ（[H]）．

$$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}=\frac{(-1)^k}{k!}\lim_{x\to\infty}\left\{\sum_{\substack{\gamma\in C(\Gamma)-Z(\Gamma)\\N(\gamma)<x}}\log N(\delta_\gamma)D(\gamma)^{-1}(\log N(\gamma))^k-\frac{(\log x)^{k+1}}{k+1}\right\}. \tag{2.9}$$

本稿では，スペクトルゼータ関数の $s=n>d/2$ での値と上述のオイラーセルバーグ定数の間の関係式が次のように表されることを主定理とする．

Theorem 2.1. $n > d/2$ に対して，次が成り立つ．

$$(2\rho_0)^{2n}\zeta_\Delta(n) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n-k-2}{n-1}(2\rho_0)^{k+1}\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} - \binom{2n-1}{n-1} + [Z(\Gamma)]\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)I_G^{(n)},$$

ここで

$$I_G^{(n)} := C_G^{-1} \times \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=2}^{n} A_l^{(n)}\left(\zeta(l) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2\rho_0} k^{-l}\right) - \frac{1}{2}A_0^{(n)}, & \text{if } G \neq SO(2m-1,1), \\ \displaystyle\pi\sum_{m=1}^{(d-1)/2}(-1)^{m-1}p_{2m}\sum_{q=0}^{\min(2m,n-1)}\frac{(-2)^q}{(2m-q)!}\binom{2n-q-2}{n-1} & \text{if } G = SO(2m-1,1), \end{cases}$$

$$A_l^{(n)} := (2\hat{\rho}_0)^l\sum_{m=1}^{d/2}(-1)^{m-1}\hat{\rho}_0^{2m-1}p_{2m-1}\sum_{q=0}^{\min(n-l,2m-1)}\binom{2m-1}{q}\binom{2n-l-q-1}{n-1}(-2)^q.$$

であり，また，p_m は $P(r) = \sum_{m=1}^{d-1}p_m r^m$ で定まる値である．

3 Theorem 2.1の証明の概略

テスト関数として

$$\hat{f}(r) = (r^2+a^2)^{-n},$$
$$f(x) = e^{-a|x|}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\binom{2n-k-2}{n-1}(2a)^{-2n+k+1}|x|^k$$

をとり（$n > d/2, a > \rho_0$），跡公式(2.5) にあてはめると次の公式を得る．

$$(a^2-\rho_0^2)^{-n} + \zeta_\Delta(n, a^2-\rho_0^2) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k-2}{n-1}(2a)^{-2n+k+1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{Z_\Gamma'}{Z_\Gamma}\right)^{(k)}(a+\rho_0)$$
$$+\frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)[Z(\Gamma)]}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(r^2+a^2)^{-n}\mu(r)dr. \quad (3.1)$$

ここで，$\zeta_\Delta(n,x) = \sum_{j\geq 1}n_j(\lambda_j+x)^{-n}$ である．λ_0 の寄与からあらわれる $(a^2-\rho_0^2)^{-n}$ は

$$(a^2-\rho_0^2)^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k-2}{n-1}(2a)^{-2n+k+1}\left\{(a-\rho_0)^{-(k+1)} + (a+\rho_0)^{-(k+1)}\right\}, \quad (3.2)$$

と書き換えられるので，(3.1) の左辺の第１項と右辺の第１項の差が

$$-(a^2-\rho_0^2)^{-n} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k-2}{n-1}(2a)^{-2n+k+1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{Z_\Gamma'}{Z_\Gamma}\right)^{(k)}(a+\rho_0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k-2}{n-1}(2a)^{-2n+k+1}\left\{\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{Z_\Gamma'}{Z_\Gamma}\right)^{(k)}(a+\rho_0) - (a-\rho_0)^{-k-1} - (a+\rho_0)^{-k-1}\right\} \quad (3.3)$$

となるので，あとは $a \to \rho_0$ とすればよい． □

4 $G = SL_2(\mathbb{R})$ の数論的部分群の場合

$G = SL_2(\mathbb{R})$, $K = SO(2)$, Γ が co-compact tosion free な $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群であるとき，Theorem 2.1 は次のように書ける．

$$\zeta_\Delta(n) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n-k-2}{n-1}\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} - \binom{2n-1}{n-1}$$
$$+\frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash H)}{2\pi}\left[\sum_{l=2}^{n-1}\left\{\binom{2n-l-1}{n-1} - 2\binom{2n-l-2}{n-1}\right\}\zeta(l)+\zeta(n)\right]. \tag{4.1}$$

ここで，H は上半平面である．Γ が co-compact だが tosion free でない（Γ が楕円元をもつ）場合にも(4.1) と同様の公式を作ることができる．Section 4.1 では，その一例として四元数群に関してみていきたい．また，Γ が co-compact でない場合は，跡公式中の散乱行列式を含む項が明示的に書けていないので，(4.1) と同様の公式を作ることは難しい．しかしながら，Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$，および，その合同部分群である場合には [He1] などによって散乱行列式が明示的に計算されているため，公式の具体的な記述が可能である．Section 4.2 では $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群に関する公式を紹介する．

4.1 四元数群

$a,b>0$ を互いに素な平方因子をもたない整数とし，B を $B=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\alpha+\mathbb{Q}\beta+\mathbb{Q}\alpha\beta(\alpha^2=a,\ \beta^2=b,\ \alpha\beta=-\beta\alpha)$ で定義される $\mathbb{Q}$ 上の不定値四元数環とする．B の元 $q=q_0+q_1\alpha+q_2\beta+q_3\alpha\beta$ ($q_i \in \mathbb{Q}$) に対して，$\bar{q}$, $n(q)$, $\mathrm{tr}\, q$ をそれぞれ $\bar{q}=q_0-q_1\alpha-q_2\beta-q_3\alpha\beta$, $n(q)=q\bar{q}=q_0^2-q_1^2a-q_2^2b+q_3^2ab$, $\mathrm{tr}\, q=q+\bar{q}=2q_0$ で定義する．B の極大整環をひとつ選びそれを $\mathcal{O}$ と書く．B の判別式 d_B を $\mathcal{O}$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底 $\{u_i\}_{1\le j\le 4}$ を用いて $d_B := |\det(\mathrm{tr}(u_i,u_j))|^{1/2}$ と定義する．このとき，d_B は $\mathcal{O}$ や $\{u_i\}$ のとりかたに依らない値であり，$B/\mathbb{Q}$ で分岐する素数（このような素数は偶数個ある）の積と等しいことが知られている．B^1, $\mathcal{O}^1$ をそれぞれ B, $\mathcal{O}$ の元であって $n(q)=1$ である q からなる群とする．このとき，群 $\mathcal{O}^1$ は次の写像によって $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群 Γ_B と同一視される．

$$q \mapsto \begin{pmatrix} q_0+q_1\sqrt{a} & q_2\sqrt{b}+q_3\sqrt{ab} \\ q_2\sqrt{b}-q_3\sqrt{ab} & q_0-q_1\sqrt{a}\end{pmatrix}.$$

$SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群 Γ_B は co-compact であり，位数 2 または 3 の楕円元をもち得る．ν_2, ν_3 をそれぞれ位数 2，3 の楕円的共役類の個数とすると，ν_2, ν_3，$\mathrm{vol}(\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash H)$ はそれぞれ次のように定まる（[He2], [Sh]）．

$$\mathrm{vol}(\Gamma_B\backslash H) = \frac{\pi}{3}\prod_{p|d_B}(p-1),\quad \nu_2=\prod_{p|d_B}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right),\quad \nu_3=\prod_{p|d_B}\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right). \tag{4.2}$$

ここで,

$$(-1/p)=\begin{cases}0 & (p=2),\\ 1 & (p\equiv 1 \bmod 4),\\ -1 & (p\equiv 3 \bmod 4),\end{cases}\qquad (-3/p)=\begin{cases}0 & (p=3),\\ 1 & (p\equiv 1 \bmod 3),\\ -1 & (p\equiv 2 \bmod 3)\end{cases}$$

である．このとき，楕円元を含むΓに関する跡公式を用いると，次の公式を得る．

Theorem 4.1. Γを四元数環とする．このとき，$n\geq 2$に対して

$$\begin{aligned}\zeta_\Delta(n)=&((4.1)\text{ の右辺})\\ &+\frac{\nu_2}{2}\sum_{l=1}^{n}\binom{2n-l-1}{n-1}\xi(l)+\frac{\nu_3}{3\sqrt{3}}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{[m/2]}}{m!}\binom{2n-m-1}{n-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)^m\alpha_m\right.\\ &\left.+2\sum_{l=1}^{[n/2]}\sum_{m=0}^{n-2l}\frac{(-1)^{[m/2]}}{m!}\alpha_m\binom{2n-2l-m-1}{n-1}\xi(2l)+2\sum_{l=1}^{n}\binom{2n-l-1}{n-1}\alpha_{l+1}\eta(l)\right].\end{aligned}\tag{4.3}$$

が成り立つ．ここで

$$\alpha_m=\begin{cases}1 & (m\text{ が奇数}),\\ \sqrt{3} & (m\text{ が偶数}),\end{cases}$$

$$\xi(l)=\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k^{-l}=\begin{cases}\log 2 & (l=1),\\ (1-2^{1-l})\zeta(l) & (l\geq 2),\end{cases}$$

$$\eta(l)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\cos\frac{\pi k}{3}k^{-l} & (l\text{ が奇数}),\\ \displaystyle\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\sin\frac{\pi k}{3}k^{-l} & (l\text{ が偶数}).\end{cases}$$

である．

4.2 $SL_2(\mathbb{Z})$の合同部分群

$SL_2(\mathbb{Z})$，および，次で定義される合同部分群について考える．

$$\begin{aligned}\Gamma_0(N):=&\{\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})|\gamma_{21}\equiv 0 \bmod N\},\\ \Gamma_1(N):=&\{\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})|\gamma_{11},\gamma_{22}\equiv\pm 1,\gamma_{21}\equiv 0 \bmod N\},\\ \Gamma(N):=&\{\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})|\gamma_{11},\gamma_{22}\equiv\pm 1,\gamma_{12},\gamma_{21}\equiv 0 \bmod N\}.\end{aligned}$$

簡単のため，N を平方因子をもたない自然数とする．このとき，$\mathrm{vol}(\Gamma\backslash H)$, ν_2, ν_3, および，カスプの個数 ν_∞ は次で与えられる．

Γ	$\mathrm{vol}(\Gamma\backslash H)/(\pi/3)$	ν_2	ν_3	ν_∞
$SL_2(\mathbb{Z})$	1	1	1	1
$\Gamma_0(N)$	$\prod_{p\mid N}(p+1)$	$\prod_{p\mid N}(1+(-1/p))$	$\prod_{p\mid N}(1+(-3/p)$	$2^{\omega(N)}$
$\Gamma_1(N)$	$1/2\prod_{p\mid N}(p^2-1)$	0	$\begin{cases}1 & (N=3)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$	$2^{\omega(N)-1}\prod_{p\mid N}(p-1)$
$\Gamma(N)$	$1/2\prod_{p\mid N}p(p^2-1)$	0	0	$1/2\prod_{p\mid N}(p^2-1)$

ここで，$\omega(N)$ は N の相異なる素因子の個数である．このとき，[He1] で得られた跡公式を用いると，次の公式が得られる．

Theorem 4.2. Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$，およびその合同部分群であるとき，$n\geq 2$ に対して次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\zeta_\Delta(n) =& ((4.3)\text{ の右辺})\\
&+\nu_\infty\left[\sum_{l=2}^{n}\binom{2n-l-1}{n-1}2^l\zeta(l)+\binom{2n-2}{n-1}(\log 2\pi+\gamma)-2^{2n-1}\right]+J_\Gamma^{(n)},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

ここで，$J_\Gamma^{(n)}$ は次で定まる．

$$
\begin{aligned}
J_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(n)} =& \sum_{l=0}^{n-1}\frac{2(-2)^l}{l!}\binom{2n-l-2}{n-1}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(l)}(2),\\
J_{\Gamma_0(N)}^{(n)} =& \nu_\infty\left[\sum_{l=0}^{n-1}\frac{2^l}{l!}\binom{2n-l-2}{n-1}\left\{2(-1)^l\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(l)}(2)-\sum_{p\mid N}\sum_{m\geq 1}\frac{(m\log p)^{l+1}}{mp^{2m}}\right\}-\binom{2n-2}{n-1}\log N\right],\\
J_{\Gamma_1(N)}^{(n)} =& -2^{\omega(N)+2n-2}\\
&+\nu_\infty\left[2^{2n-2}-\frac{3}{2}\binom{2n-2}{n-1}\log N+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{2^{l+1}}{l!}\binom{2n-l-2}{n-1}\sum_{k\equiv\pm1 \bmod N}\frac{\Lambda(k)}{k^2}(\log k)^l\right.\\
&\left.+\sum_{p\mid N}\frac{c(N/p)}{p-1}\left\{\binom{2n-3}{n-1}\log p+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{2^l}{l!}\binom{2n-l-2}{n-1}\sum_{\substack{k\equiv\pm1 \bmod N/p\\ k=p^m}}\frac{\Lambda(k)}{k^2}(\log k)^l\right\}\right],\\
J_{\Gamma(N)}^{(n)} =& -2^{2n-2}\prod_{p\mid N}(p+1)\\
&+2\nu_\infty\left[2^{2n-3}-\binom{2n-2}{n-1}\log N+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{2^l}{l!}\binom{2n-l-2}{n-1}\sum_{k\equiv\pm1 \bmod N}\frac{\Lambda(k)}{k^2}(\log k)^l\right.\\
&\left.+\sum_{p\mid N}\frac{c(N/p)}{p^2-1}\left\{\binom{2n-3}{n-1}\log p+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{2^l}{l!}\binom{2n-l-2}{n-1}\sum_{\substack{k\equiv\pm1 \bmod N/p\\ k=p^m}}\frac{\Lambda(k)}{k^2}(\log k)^l\right\}\right].
\end{aligned}
$$

また，$c(1)=2$，$c(k)=1$ $(k\geq 2)$ である．

5 ラプラシアンの最小固有値λ_1の数値評価

ラプラシアンの最小固有値に関しては，セルバーグ予想（[Se]）とよばれる以下の予想が有名である．

予想: 数論的なΓに対して，$\lambda_1 \geq 1/4$である．

セルバーグ自身は，[Se]においてΓが$SL_2(\mathbb{Z})$の合同部分群である場合に$\lambda_1 \geq 3/16$を証明している．それ以後も[LRS]，[KS]などで評価の精密化がなされ，現在のところ最良の評価は[Ki]による$\lambda_1 \geq 975/4096 = 0.238\ldots$である．また，[He1]において，$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$に関するラプラシアンの固有値の数値計算がなされており，とくに，$\lambda_1 = 91.5229\cdots$，$\lambda_2 = 148.4319\cdots$, $\lambda_3 = 190.1315\cdots, \ldots$という近似値が得られている．本稿ではスペクトルゼータ関数に関する$\zeta_\Delta(n) \sim \lambda_1^{-n} (n \to \infty)$という定義から明らかに得られる漸近評価を利用して，(4.1), (4.3), (4.4)を用いた計算機によるλ_1の数値的な評価の方法，および計算結果の一部を紹介する．

Theorem 4.1, 4.2の公式の右辺の中で，$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$以外は容易に計算できる値なので，$\zeta_\Delta(n)$の計算をするためには，$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$を計算すればよいことがわかる．$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$たちは次のように計算することができる．

$G = SL_2(\mathbb{R})$のとき，$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$は次のように表される（[HIKW], [H]）.

$$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{x\to\infty} \left\{ \sum_{\substack{\gamma \in \mathrm{Hyp}(\Gamma) \\ N(\gamma) < x}} \frac{\log N(\delta_\gamma)}{N(\gamma) - 1} (\log N(\gamma))^k - \frac{(\log x)^{k+1}}{k+1} \right\}, \tag{5.1}$$

ここで，$\mathrm{Hyp}(\Gamma)$はΓの双曲的共役類のなす集合である．Γが四元数群，または$SL_2(\mathbb{Z})$の合同部分群であるとき，[AKN], [H3]（Appendix参照）の結果を適用すると，(5.1)を次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} = &\frac{(-1)^k}{k!} \lim_{T\to\infty} \left\{ \sum_{t=3}^{T} \sum_{u; d(t,u) \in \mathfrak{D}} h\big(d(t,u)\big) \hat{M}_\Gamma(t,u) j(t,u)^{-1} \right. \\ &\left. \times \frac{(2\log\varepsilon(t))^{k+1}}{\varepsilon(t)^2 - 1} - \frac{(2\log T)^{k+1}}{k+1} \right\}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで$\mathfrak{D} := \{D > 0 | D \equiv 0, 1 \bmod 4, \text{非平方数}\}$, $d(t,u) = (t^2-4)/u^2$,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\Big(t + \sqrt{t^2-4}\Big) = \frac{1}{2}\Big(t + u\sqrt{d(t,u)}\Big),$$

$$j(t,u) = \max\left\{ j \geq 1 \middle| \varepsilon(t) = \left(\frac{1}{2}\big(t_0 + u_0\sqrt{d(t,u)}\big)\right)^j, \quad \exists t_0, u_0 \geq 1 \right\},$$

であり，$h(d)$は判別式$d > 0$の二元二次形式の狭義類数である．また，$\hat{M}_\Gamma(t,u)$は各Γに対して以下で定まる値である．

$$\hat{M}_{\Gamma_B}(t,u) := \prod_{p|d_B} \begin{cases} 0 & (d(t,u)/p^2 \equiv 0, 1 \bmod 4), \\ \left(1 - \left(\dfrac{\mathbb{Q}(\sqrt{d(t,u)})}{p}\right)\right) & (\text{otherwise}) \quad ((*/p)\text{はアルティン記号}), \end{cases}$$

$$\hat{M}_{\Gamma_0(N)}(t,u) = \prod_{p|N} \begin{cases} 1+p & (p \mid u), \\ 1+\left(\dfrac{t^2-4}{p}\right) & (p \nmid u). \end{cases},$$

$$\hat{M}_{\Gamma_1(N)}(t,u) = \frac{1}{2}\prod_{p|N} \begin{cases} p^2-1 & (p \mid u), \\ p-1 & (p \nmid u, t \equiv \pm 2 \bmod N), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$\hat{M}_{\Gamma(N)}(t,u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\prod_{p|N} p(p^2-1) & (t \equiv \pm 2 \bmod N, N \mid u), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$h(d)$ に関しては[Sc]，[Wa] など幾通りもの計算方法が確立されており，また，(5.2) の右辺の $h(d)$ 以外の値は容易に計算できる値なので，T を十分大きくとることで，$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$ の近似値を得ることができ，したがって $\zeta_\Delta(n)$ の近似値も得られる．さらに，スペクトルゼータ関数の定義から，容易に

$$\zeta_\Delta(n)^{-1/n} < \lambda_1 < \frac{\zeta_\Delta(m)}{\zeta_\Delta(m+1)} \quad (\forall n, m \geq 2), \tag{5.3}$$

$$\zeta_\Delta(n)^{-1/n}, \frac{\zeta_\Delta(m)}{\zeta_\Delta(m+1)} \to \lambda_1 \quad \text{as} \quad n, m \to \infty. \tag{5.4}$$

がわかるので，十分大きな n に関して $\zeta_\Delta(n)$ を計算することで，λ_1 のよい評価が得られることがわかる．

いま，

$$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}(T) := \frac{(-1)^k}{k!}\left\{\sum_{t=3}^{T} \sum_{u; d(t,u)\in\mathfrak{D}} h\big(d(t,u)\big)\hat{M}_\Gamma(t,u)j(t,u)^{-1} \right.$$
$$\left. \times \frac{(2\log\varepsilon(t))^{k+1}}{\varepsilon(t)^2-1} - \frac{(2\log T)^{k+1}}{k+1}\right\}, \tag{5.5}$$

$$\zeta_\Delta(n,T) := \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n-k-2}{n-1}\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}(T) - \cdots \quad (\text{see (4.3) and (4.4)}), \tag{5.6}$$

を定義する．そして，これらの値を ‘C++’ を用いて $T \leq 3.0 \times 10^6$ で計算する．しかしながら，n の増加に伴い T に関する誤差が大きくなるため，大きい n に関しては $\zeta_\Delta(n)$ の近似値を求めることは非常に困難であるため，ここでは，$T = 3.0 \times 10^6$ に対して，

$$n := \max\left\{n \geq 2 \,\middle|\, T/2 \leq \forall T' \leq T, \quad \left|\frac{\zeta_\Delta(n,T) - \zeta_\Delta(n,T')}{\zeta_\Delta(n,T)}\right| < 0.01\right\}$$

とし，$L := \zeta_\Delta(n,T)^{-1/n}$, $R := \zeta_\Delta(n-1,T)/\zeta_\Delta(n,T)$ によって，λ_1 を評価することにする．各 Γ に対する L, R たちは表 1 〜 4 のとおりである（表中では $v := \mathrm{vol}(\Gamma\backslash H)/(\pi/3)$ である）．

d_B	v	ν_2	ν_3	N	L	R	d_B	v	ν_2	ν_3	N	L	R
6	2	2	2	2	4.922	−−	57	36	4	0	4	0.480	0.548
10	4	0	4	3	2.278	3.031	58	28	0	4	4	0.550	0.646
14	6	2	0	2	2.251	−−	62	30	2	0	3	0.692	1.255
15	8	0	2	2	1.605	−−	65	48	0	0	3	0.596	1.332
21	12	4	0	3	1.022	1.494	69	44	4	2	4	0.514	0.716
22	10	2	4	3	1.204	1.898	74	36	0	0	4	0.728	0.975
26	12	0	0	3	1.797	3.506	77	60	4	0	4	0.572	0.869
33	20	4	2	4	0.696	0.770	82	40	0	4	3	0.573	1.171
34	16	0	4	4	0.691	0.796	85	64	0	4	5	0.459	0.600
35	24	0	0	3	0.925	1.810	86	42	2	0	4	0.627	0.935
38	18	2	0	3	1.218	2.428	87	56	0	2	5	0.417	0.467
39	24	0	0	4	0.738	0.827	91	72	0	0	5	0.455	0.547
46	22	2	4	5	0.422	0.439	93	60	4	0	5	0.452	0.502
51	32	0	2	3	0.652	1.295	94	46	2	4	7	0.323	0.324
55	40	0	4	4	0.633	0.872	95	72	0	0	6	0.393	0.419

表 1: Γ =quaternion group

N	v	ν_2	ν_3	ν_∞	n	L	R	N	v	ν_2	ν_3	ν_∞	n	L	R
3	4	0	1	2	−−	−−	−−	43	44	0	2	2	4	0.665	0.802
5	6	2	0	2	2	5.750	−−	47	48	0	0	2	4	0.585	0.677
7	8	0	2	2	2	3.046	−−	51	72	0	0	4	3	0.637	1.490
11	12	0	0	2	2	2.463	−−	53	54	2	0	2	3	0.692	1.596
13	14	2	2	2	3	1.179	1.493	55	72	0	0	4	4	0.635	0.888
15	24	0	0	4	2	1.468	−−	57	80	0	2	4	4	0.478	0.587
17	18	2	0	2	2	1.354	−−	59	60	0	0	2	4	0.505	0.664
19	20	0	2	2	3	1.263	2.141	61	62	2	2	2	5	0.417	0.462
21	32	0	2	4	3	1.014	1.699	65	84	4	0	4	3	0.552	1.374
23	24	0	0	2	2	1.066	−−	67	68	0	2	2	4	0.587	0.887
29	30	2	0	2	3	1.034	2.077	69	96	0	0	4	4	0.514	0.750
31	32	0	2	2	3	0.777	1.341	71	72	0	0	2	5	0.370	0.405
33	48	0	0	4	4	0.701	0.799	73	74	2	2	2	4	0.436	0.612
35	48	0	0	4	3	0.917	1.980	77	96	0	0	4	4	0.573	0.886
37	38	2	2	2	4	0.636	0.779	79	80	0	2	2	4	0.478	0.710
39	56	0	2	4	3	0.630	1.229	83	84	0	0	2	4	0.561	0.887
41	42	2	0	2	4	0.655	0.825	85	108	4	0	4	4	0.429	0.647

表 2: $\Gamma = \Gamma_0(N)$

N	v	ν_∞	n	L	R	N	v	ν_∞	n	L	R
5	12	4	2	4.444	−−	35	576	48	3	0.458	2.125
7	24	6	2	2.219	−−	37	684	36	4	0.353	0.803
11	60	10	2	0.911	−−	39	672	48	4	0.439	0.911
13	84	12	3	1.012	2.366	41	840	40	5	0.341	0.549
15	96	16	2	0.899	−−	43	924	42	5	0.350	0.626
17	144	16	3	0.667	1.713	47	1104	46	4	0.277	0.682
19	180	18	3	0.609	1.789	51	1152	64	4	0.344	0.874
21	192	24	2	0.471	−−	53	1404	52	5	0.282	0.510
23	264	22	3	0.468	1.499	55	1440	80	4	0.352	0.959
29	420	28	4	0.448	0.903	57	1440	72	4	0.302	0.791
31	480	30	4	0.394	0.762	59	1740	58	5	0.276	0.565
33	480	40	3	0.437	1.761	61	1860	60	5	0.266	0.539

表 3: $\Gamma = \Gamma_1(N)$

N	v	ν_∞	n	L	R	N	v	ν_∞	n	L	R
3	12	4	2	4.841	−−	21	4032	192	4	0.272	1.041
5	60	12	2	1.299	−−	23	6072	264	3	0.151	1.495
7	168	24	2	0.586	−−	29	12180	420	4	0.181	0.892
11	660	60	3	0.505	2.755	31	14880	480	4	0.165	0.839
13	1092	84	3	0.379	2.350	33	15840	480	4	0.151	0.749
15	1440	96	3	0.302	1.964	35	20160	576	5	0.191	0.641
17	2448	144	3	0.242	1.842	37	25308	684	5	0.183	0.650
19	3420	180	3	0.204	1.717	39	26208	672	5	0.170	0.588

表 4: $\Gamma = \Gamma(N)$

さて，計算結果をみると四元数群に関しては，$d_B \leq 546$ のとき，$\Gamma_0(N)$ に関しては $N \leq 357$ のとき，$\Gamma_1(N)$ に関しては $N \leq 65$ のとき，そして，$\Gamma(N)$ に関しては $N \leq 15$ のときには $L \geq 1/4$ なので $\lambda_1 \geq 1/4$ であることを確かめることができる．これは，[Hu] によって得られた $N \leq 18$ に関する $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ に対して $\lambda_1 \geq 1/4$ であるという結果の一種の改良ということができる（ただ，実験結果であり証明がなされているわけではないので，その意味では改良というのはふさわしくない）．これよりも大きな d_B や N に関しては，$L < 1/4$, $R > 1/4$ という結果が現れるため，$\lambda_1 \geq 1/4$ の成立，不成立を確かめることができない．もちろん，より大きな T, n に関して計算を行えばより精密な結果が得られるが，ここではこの程度でとどめておく．

6 Appendix: 合同部分群に関するセルバーグゼータ関数の数論的表示

前節において，$\gamma_\Gamma^{(k)}$ の二次形式の類数と基本単数を用いた表示式(5.2) を用いたが，この表示式はいわゆるセルバーグゼータ関数の数論的表示とよばれている表示式から得られたものである．この数論的表示は，これまでに $SL_2(\mathbb{Z})$([Sa]) と四元数群の場合 ([AKN]) に得られていたものであるが，合同部分群に関しても得ることができ，講演の際にも紹介させていただいたので，Appendix として本稿でも簡単にふれておく．なお，この節の内容に関しては [H3] に詳しくまとめているので，詳細を知りたい方はそちらを参照していただきたい．

Theorem 6.1. $N>1$ を平方因子をもたない奇数とする．$\Gamma=\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ であるとき，セルバーグゼータ関数の対数微分は次のように表される．

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)}=\sum_{D\in\mathfrak{D}}\sum_{j=1}^{\infty}M_\Gamma(D,j)h(D)\frac{2\log\varepsilon(D)}{1-\varepsilon(D)^{-2j}}\varepsilon(D)^{-2js}, \tag{6.1}$$

ここで，$M_\Gamma(D,j)$ は次で与えられる．

$$M_{\Gamma_0(N)}(D,j)=\prod_{p\mid N}\begin{cases}1+p & (p\mid u_j),\\ 1+\left(\dfrac{D}{p}\right) & (p\nmid u_j),\end{cases},$$

$$M_{\Gamma_1(N)}(D,j)=\frac{1}{2}\prod_{p\mid N}\begin{cases}p^2-1 & (p\mid u_j),\\ p-1 & (p\nmid u_j, t_j\equiv\pm2 \bmod N),\\ 0 & (otherwise).\end{cases}$$

$$M_{\Gamma(N)}(D,j)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\prod_{p\mid N}p(p^2-1) & (t_j\equiv\pm2 \bmod N, N\mid u_j),\\ 0 & (otherwise).\end{cases}$$

また, (t_j,u_j) はペル方程式 $t^2-u^2D=4$ の j 番目の解 $(\varepsilon(D)^j=(t_j+u_j\sqrt{D})/2)$ である．

Proof. 証明には次の Venkov-Zograf's formalization ([VZ]) を使う．

Lemma 6.2. Γ を $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash H)<\infty$ なる $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群，Γ' を Γ の指数有限な部分群，χ を Γ' の有限次元ユニタリ表現とし，$Z_\Gamma(s,\chi)$ を次で定義する．

$$Z_\Gamma(s,\chi):=\prod_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)}\prod_{n=0}^{\infty}\det\left(I-\chi(p)N(p)^{-s-n}\right).$$

このとき，以下の公式が成り立つ．

$$Z_{\Gamma'}(s,\chi)=Z_\Gamma\left(s,\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^{\Gamma}\chi\right). \tag{6.2}$$

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, Γ' を $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ のいずれかとする．また，$\chi = 1$ として，(6.2) の両辺を対数微分すると，

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} = \sum_{\gamma \in \mathrm{Hyp}(SL_2(\mathbb{Z}))} \mathrm{Tr}\Big(\big(\mathrm{Ind}_\Gamma^{SL_2(\mathbb{Z})} 1\big)(\gamma)\Big) \frac{j_\gamma^{-1} \log N(\gamma)}{1 - N(\gamma)^{-1}} N(\gamma)^{-s}, \tag{6.3}$$

となる．ここで，$j_\gamma \geq 1$ はある素元 δ に対して $\gamma = \delta^{j_\gamma}$ なる自然数である．(6.3) の右辺は次のように書き換えることができる．

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} = \sum_{t=3}^{\infty} \sum_{u : \frac{t^2-4}{u^2} \in \mathfrak{D}} j(t,u)^{-1} \frac{2 \log \varepsilon(t)}{1 - \varepsilon(t)^{-2}} \varepsilon(t)^{-2s} \sum_{\substack{\gamma \in \mathrm{Hyp}(\Gamma) \\ t_\gamma = t, u_\gamma = u}} \mathrm{Tr}\Big(\big(\mathrm{Ind}_\Gamma^{SL_2(\mathbb{Z})} 1\big)(\gamma)\Big), \tag{6.4}$$

ここで，$t_\gamma := \mathrm{tr}\,\gamma = \gamma_{11} + \gamma_{22}$, $u_\gamma := \gcd(\gamma_{21}, \gamma_{12}, \gamma_{11} - \gamma_{22}) > 0$ である．なので，あとは $\mathrm{Tr}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^{SL_2(\mathbb{Z})} 1\big)(\gamma)\Big)$ を計算すればよく，実際に，完全代表系を適当に選び，計算すると，$\mathrm{Tr}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^{SL_2(\mathbb{Z})} 1\big)(\gamma)\Big)$ が t_γ と u_γ のみに依存する値であることがわかる．なので，結局(6.4) は次のように書くことができる．

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} = \sum_{t=3}^{\infty} \sum_{u : \frac{t^2-4}{u^2} \in \mathfrak{D}} \hat{M}_\Gamma(t,u) h\Big(\frac{t^2-4}{u^2}\Big) j(t,u)^{-1} \frac{2 \log \varepsilon(t)}{1 - \varepsilon(t)^{-2}} \varepsilon(t)^{-2s}, \tag{6.5}$$

ここで，$\hat{M}_\Gamma(t,u)$ は(5.2) で定義されている値である．なので，あとはパラメータ (t,u) を (D,j) に書き換えてやればよい． □

Theorem 6.1 の応用として，素元定理

$$\pi_\Gamma(x) = \#\{p \in \mathrm{Prim}(\Gamma) | N(p) < x\} \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{as} \quad x \to \infty, \tag{6.6}$$

の一種の精密化といえる次の評価を行った．

Corollary 6.3. $\Gamma = \Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ の場合に，$x^{1/2}(\log x)^2 < y < x$ なる y に対して，次が成り立つ．

$$\pi_\Gamma(x+y) - \pi_\Gamma(x) \ll y. \tag{6.7}$$

この評価は，Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$ の場合と，四元数群の場合にはすでに得られている ([Iw], [AKN])．定理6.1 を使うと，[Iw] と同様の方法で，この系を証明することができる．

さらに，Theorem 6.1 を用いると，$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ に関する数論的表示を用いて得られた

$$\sum_{\substack{D \in \mathfrak{D} \\ \varepsilon(D) < x}} h(D) \sim \frac{x^2}{2 \log x} \quad \text{as} \quad x \to \infty. \tag{6.8}$$

のひとつの精密化である次の評価を得ることもできる．

Corollary 6.4. 奇素数 p に対して，$1/p \leq C(p) \leq p/(p^2-1)$ なる定数 $C(p)$ が存在し，次が成り立つ．

$$\sum_{\substack{D \in \mathfrak{D}, p | D \\ \varepsilon(D) < x}} h(D) \sim C(p) \frac{x^2}{\log x} \quad as \quad x \to \infty. \tag{6.9}$$

参考文献

[AKN] T. Arakawa, S. Koyama and M. Nakasuji, *Arithmetic forms of Selberg zeta functions with applications to prime geodesic theorem*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **78** (2002), 120–125.

[Ga] R. Gangolli, *Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one*, Illinois J. Math. **21** (1977), 1–41.

[GW] R. Gangolli and G. Warner, *Zeta functions of Selberg's type for some noncompact quotients of symmetric spaces of rank one*, Nagoya Math. J. **78**(1980), 1-44.

[H1] Y. Hashimoto, *The Euler-Selberg constants for nonuniform lattices of rank one symmetric spaces*, Kyushu J. Math. **57**(2003), 347-370.

[H2] Y. Hashimoto, *Special values of the spectral zeta functions for locally symmetric Riemannian manifolds*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[H3] Y. Hashimoto, *Arithmetic expressions of Selberg's zeta functions for congruence subgroups*, math.RT/0409101.

[HIKW] Y. Hashimoto, Y. Iijima, N. Kurokawa and M. Wakayama, *Euler's constants for the Selberg and the Dedekind zeta functions*, to appear in Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.

[He1] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of* $PSL(2,\mathbb{R})$ *I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548, 1001** Springer-Verlag, (1976, 1983).

[He2] D. Hejhal, *A classical approach to a well-known spectral correspondence on quaternion groups*, Number theory (New York, 1983–84), 127–196, Lec. Notes in Math. **1135**, Springer, Berlin, 1985.

[Hu] M. N. Huxley, *Exceptional eigenvalues and congruence subgroups*, The Selberg trace formula and related topics (Contemp. Math. **53** (1984)), 341–349.

[Iw] H. Iwaniec, *Prime geodesic theorem*, J. Reine Angew. Math. **349** (1984), 136-159.

[Ki] H. H. Kim, *Functoriality for the exterior square of* GL_4 *and the symmetric fourth of* GL_2 *(with Appendix 1 by D. Ramakrishnan and Appendix 2 by Kim and P. Sarnak)*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 139–183.

[KS] H. H. Kim and F. Shahidi, *Cuspidality of symmetric powers with applications*, Duke Math. J. **112** (2002), 177–197.

[LRS] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, *On Selberg's eigenvalue conjecture*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 387–401.

[Mi] R. Miatello, *On the Plancherel measure for linear Lie groups of rank one*, Manuscripta Math. **29** (1979), 249–276.

[Sa] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms.*, Journal of Number Theory, **15**(1982), 229-247.

[Sc] R. J. Schoof, *Quadratic fields and factorization*, Computational methods in number theory, Part II, Math. Centre Tracts, **155** (1982), 235–286.

[Se] A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math. **8** Amer. Math. Soc., Providence (1965), 1–15.

[Sh] H. Shimizu, *Hokei kansu. I. (Japanese) [Automorphic functions. I]* Second edition. Iwanami Shoten Kiso Sūgaku [Iwanami Lectures on Fundamental Mathematics], **8**, Daisū [Algebra], Iwanami Shoten, Tokyo, 1984.

[St] F. Steiner, *On Selberg's zeta function for compact Riemann surfaces*, Physics Lett. B **188** (1987), 447–454.

[VZ] A. B. Venkov and P. G. Zograf, *Analogues of Artin's factorization formulas in the spectral theory of automorphic functions associated with induced representations of Fuchsian groups.*, Math. USSR Izvestiya, **21**(1983), 435-443.

[Wa] H. Wada, *A table of ideal class numbers of real quadratic fields*, Sophia Kokyuroku in Mathematics, **10**(1981).

[Wi] F. L. Williams, *A factorization of the Selberg zeta function attached to a rank* 1 *space form*, Manuscripta Math. **77** (1992), 17–39.

HASHIMOTO, Yasufumi
Graduate School of Mathematics, Kyushu University.
6-10-1, Hakozaki, Fukuoka, 812-8581 JAPAN.
hasimoto@math.kyushu-u.ac.jp