数理解析研究所講究録 1414 巻 2005 年 135-141

Subordination and Extreme Point Theory

東京電機大工　鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)
日本大薬　関根忠行 (Tadayuki Sekine)

単位円内で正則な函数の従属操作 (subordination) による函数族の端点の性質は種々与えられている。本講では，これらの性質のいくつかを $\mathbb{C}^n$ の単位球 $\mathbb{B}$ から $\mathbb{C}^m$ への正則写像の空間 $\mathbb{H}_{n,m}$ へ拡張する.

§1 序

1.1. $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathfrak{T})$ を Hausdorff 位相空間 $\mathfrak{T}$ を持つ $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ 上の線形位相空間とする.X を $\mathfrak{X}$ の部分集合とする. X を含む最小の凸集合 ($i.e$, X を含む凸集合の共通部分) を X の凸包といい，co$X$ と表し，co$X$ の閉包をと $\overline{\mathrm{co}}X$ と表す.

点 x が X の端点 (extreme point) であるとは，$y, z \in X$, $x \in (y, z) := \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid 0 < \alpha < 1\}$ ならば，$y = z = x$ となるときである. X の端点全体を ext$X$ と表す.

実線形位相空間 $\mathfrak{X}$ の部分集合 H が, $H = x_0 + S$(S は余次元 1 の線形位相空間) と表されるとき，H を x_0 通る超平面という. 部分集合 $X \subset \mathfrak{X}$ に対して，超平面 H がとれて，$X \cap H \neq \emptyset$ で X が H の片側に入るとき，H を X の支持平面 (supporting plane) といい，X の入る半空間を X の支持半空間という. このとき，点 $x \in X \cap H$ を X 支持点という. また，$X \cap H = \{x\}$ となるとき，x を X のむき出し点 (exposed point) という. 一般に，むき出し点は端点であるが，逆は成りたたない. X が compact 集合のときは ext$X \neq \emptyset$ である.

次の定理は最も基本的である.

定理 1 (Krein-Milman の定理).　X を $\mathfrak{X}$ の compact 凸集合とすると，次のことが成り立つ：

$$X = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}X).$$

これより，$\mathcal{X}$ の compact 集合 Y に対して

$$\overline{\mathrm{co}}(Y) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}Y).$$

1.2. 任意の点 $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ 対して，

$\|z\| := \sqrt{(z^*z)} = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$, $\mathbb{B} := \mathbb{B}_n := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ とおく．$\mathbb{B}$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像 $f(z) := \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$ の全体を $\mathbb{H}_{n,m}$ と表す． $\mathbb{H}_{n,m}$ に通常の和とスカラー積を導入し，広義一様収束の位相 $\mathfrak{T}$ を入れると，$\mathbb{H}_{n,m}$ は局所凸線形位相空間になる．

実数列 $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k < \cdots \longrightarrow 1$ をとる．$f \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して，

$$\|f\|_{r_k} := \sup\{\|f(z)\| \mid \|z\| \leqq r_k\}$$

とおき，f, $g \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して，

$$\rho(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\|f-g\|_{r_k}}{1 + \|f-g\|_{r_k}}$$

とおくと，Weierstrass および Montel の定理により，$\mathbb{H}_{n,m}$ は距離 ρ に関して完備な距離空間になり，位相 $\mathfrak{T}$ と ρ によって定義された位相とは同値である．

§2 $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数

multiindex $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ 対して，$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots \alpha_n$,
$z^\alpha := z_1^\alpha \cdots z_n^\alpha$ とおく．このとき，$\mathbb{B}$ で正則な函数 $f(z) \in \mathbb{H}_{n,1}$ は同次多項式展開

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(z), \quad P_l(z) = \sum_{\|\alpha\|=l} a_\alpha z^\alpha \quad (l \text{ 次同次多項式})$$

ができ，Biermann-Lemaire の公式により，$\forall r = (r_1, \cdots, r_n)$, $\|r\| = \sqrt{r_1^2 + \cdots r_n^2} = 1$ に対して，

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} [|a_\alpha| r^\alpha]^{\frac{1}{|\alpha|}} = 1. \tag{1}$$

$\mathbf{e}_k(k=1,2,3,\cdots,m)$ を $\mathbb{C}^m$ の標準的基底とする．これを用いて，$f(z)\in\mathbb{H}_{n,m}$ は次の様な同次展開ができる．

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\infty}P_{kl}(z)\cdot\mathbf{e}_k \quad (P_{kl}\text{は}\,l\,\text{次同次多項式}). \tag{2}$$

F を $\mathbb{H}_{n,m}$ から $\mathbb{C}$ への線形汎函数とし

$$b(\alpha,k):=F(z^\alpha\cdot\mathbf{e}_k) \tag{3}$$

とおく．このとき，(2) の形の $f(z)\in\mathbb{H}_{n,m}$ に対して

$$F(f)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_{k\alpha}b(\alpha,k) \tag{4}$$

とおき，$b(\alpha,k)$ に条件

$$\overline{\lim}_{|\alpha|\to\infty}\left(|a_{k\alpha}|b(\alpha,k)\right)^{\frac{1}{|\alpha|}}<1 \tag{5}$$

を課すと，(1) により F は $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数となる．逆に，F が $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数で，$b(\alpha,k)$ を (3) によって定義すると，級数 (4) は収束し，$b(\alpha,k)$ は条件 (5) を満たす．したがって，次の定理が成り立つ：

定理 2. F を $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数とすると，条件 (5) をみたす集合 $\left\{b(\alpha,k)\mid k=1,2,3,\cdots,m;\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\right\}$ がとれ，F は (4) の形になる．逆に，条件 (5) をみたす集合 $\left\{b(\alpha,k)\mid k=1,2,3,\cdots,m;\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\right\}$ に対して，(4) によって定義される F は $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数である．

[注] 定理 2 は [1] の定理 4.3 の $\mathbb{C}_n$ への拡張である．

定理 3([1], p.44). A を $\mathbb{H}_{n,m}$ の compact 集合とし，F を $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数とする．このとき，次のような $f\in A$ が存在する．

$$\mathrm{Re}F(g)\leqq\mathrm{Re}F(f)\quad(g\in A)$$

また，次のような $h\in A$ がとれる：

$$|F(g)|\leqq|F(h)|\quad(g\in A).$$

Kline-Milman の定理により，次の定理が成り立つ

定理 4([1], p.45). A,F は定理 3 におけるものとする。このとき，次のものが成り立つ：

$$\begin{aligned}&\max\left\{\mathrm{Re}F(f)\mid f\in\overline{\mathrm{co}}A\right\}\\=&\max\left\{\mathrm{Re}F(f)\mid f\in A\right\}\\=&\max\left\{\mathrm{Re}F(f)\mid f\in\mathrm{ext}(\overline{\mathrm{co}}A)\right\}.\end{aligned}$$

§3.

$$\mathcal{P}_l := \left\{ \mathbb{P}_l(z) = \sum_{k=1}^{m} P_{kl}(z) \cdot \mathbf{e}_k \right\}$$

(ただし，各成分は l 次の同次多項式, または0ではあるが全部は0でない)

$$\|\mathbb{P}_l(z)\| := \left\{ \sum_{k=1}^{m} |P_{kl}(z)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$M(\mathbb{P}_l) := \left\{ z \in \overline{\mathbb{B}} \mid \|P_l(z)\| = \max_{y \in \overline{\mathbb{B}}} \|P_l(y)\| \right\}$$

とおく．このとき，最大値の原理により，$M(\mathbb{P}_l) \subset \partial\mathbb{B}$.

$f(z) \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}_l(z), \quad \mathbb{P}_l \subset \mathcal{P}_l \tag{6}$$

とし，l_0 を $\mathbb{P}_l(z) = 0 (l = 1, 2, \cdots, l_0 - 1)$, $\mathbb{P}_l(z) \neq 0$ とする．いま，$z_0 \in M(\mathbb{P}_{l_0})$ をとり，$U_{\mathbb{P}_0}$ を次の様な m 次の unitary 行列とする：

$$U_{\mathbb{P}_{l_0}} \cdot \mathbb{P}_{l_0}(z_0) = \begin{pmatrix} M_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ M_0 := \max_{y \in \overline{\mathbb{B}}} \|P_{l_0}(y)\|.$$

このとき，$\forall g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{Q}_l(z) \in \mathbb{H}_{n,m} (\mathbb{Q}_l \in \mathcal{P}_l)$ に対して L_f をベクトル $U_{\mathbb{P}_0} \cdot \mathbb{Q}_{l_0}(z_0)$ の第1成分をとるものとすると，L_f は $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数となる．
次に，$f(z)$, $g(z) \in \mathbb{H}_{n,m}$ とする．$g(z)$ が $f(z)$ に従属 (subordinate) であるとは，正則写像

$$\Psi(z) : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}, \qquad \|\Psi(z)\| \leqq \|z\| \quad (z \in \mathbb{B}) \tag{7}$$

がとれて，$g(z) = f(\Psi(z))$ となるときである．$f(z)$ に従属なる写像全体を $s(f)$ と表す．
次の定理が成り立つ：

定理 5. $f(z) \in \mathbb{H}_{n,m}$ とする.

$$\mathcal{A} := \{ g(z) \mid g(z) = f(\Psi(z)),\ \Psi(z) \text{ は (7) をみたし}, \Psi(z_0) \in M(\mathbb{P}_{l_0}) \},$$
$$\mathcal{B} := \{ g(z) = f(Uz), U : \text{unitary行列} \}$$

とおくと,

$$\mathrm{ext}(\overline{\mathrm{co}}(s(f)) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset, \quad \mathrm{ext}(\overline{\mathrm{co}}(s(f))) \supset \mathcal{B}.$$

(証明) 条件 (7) より，$\Psi(0) = 0$. したがって，Ψ は次の様に展開ができる：

$$\Psi(z) = Az + B_2(z) + B_3(z) + \cdots$$

ただし，$B_k(z) \in \mathcal{P}_k$, A は n 次正方行列で

$$\|A\| = \sup_{0<\|z\|<1} \frac{\|Az\|}{\|z\|} \leqq 1.$$

また，(6) より

$$\begin{aligned} g(z) = f(\Psi(z)) &= \sum \mathbb{P}_l(\Psi(z)) \\ &= \mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_{l_0}(\Psi(z)) + \mathbb{P}_{l_0+1}(\Psi(z)) + \cdots \\ &= \mathbb{P}_0 + \mathbb{Q}_{l_0}(z) + \mathbb{Q}_{l_0+1}(z) + \cdots . \end{aligned}$$

$\mathbb{P}_{l_0}(z)$, $\mathbb{Q}_{l_0}(z) \in \mathcal{P}_{l_0}(z)$ とすると,

$$\mathbb{Q}_{l_0}(z) = \mathbb{P}_{l_0}(Az)$$

となり,

$$\|\mathbb{Q}_{l_0}(z)\| = \|\mathbb{P}_{l_0}(Az)\| \leqq \|A\|^{l_0}\|P_{l_0}(z)\|.$$

したがって，$\max_{z\in\overline{\mathbb{B}}}\|Q_{l_0}\| = \max_{z\in\overline{\mathbb{B}}}\|P_{l_0}\|$ となるのは, $\|A\| = 1$ となるときである。特に, $A = U(\mathrm{unitary})$ ならば, $\|A\| = \|U\| = 1$. f に対して，L_f をとり，$M := \sup\{\mathrm{Re}L_f(g) \mid g \in s(f)\}$ とおく.

$\overline{s(f)}$ は $\mathbb{H}_{n,m}$ で compact であるから，定理 4 により，次の条件をみたす $h \in s(f)$ がとれる：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}L_f(h) = M, \\ &\quad h(z) = f(\Psi(z)) \ \text{ for some } \Psi(z) \text{ with } \Psi(z_0) \in M(\mathbb{P}_{l_0}). \end{aligned}$$

したがって，この h に対して, $h \in \mathcal{A}$, $h \in \mathrm{ext}(\overline{\mathrm{co}}(s(f)))$.
$g(z) \in \mathcal{B}$ とする. $g(z) = \alpha h_1(z) + (1-\alpha)h_2(z) \quad 0 < \alpha < 1$, h_1, $h_2 \in \overline{\mathrm{co}}(s(f))$ とすると，$g(z) = f(Uz)$(U:unitary 行列), h_1, $h_2 \in s(f)$ としてよいから,

$$f(Uz) = \alpha f(\Psi_1(z)) + (1-\alpha)f(\Psi_2(z))$$

(Ψ_1, Ψ_2 は条件 (7) をみたす写像)
と表されるから，一致の定理により，$\Psi_1(z) = \Psi_2(z) = z$ となり，$h_1 = h_2 = g$. したがって，$\mathrm{ext}(\overline{\mathrm{co}}(s(f))) \supset \mathcal{B}$.

$f \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して，

$$M_p(r, f) := \left\{ \frac{1}{\sigma(\partial\mathbb{B})} \int_{\partial\mathbb{B}} \|f(r\xi)\|^p d\rho(\xi) \right\}^{\frac{1}{p}}$$

($d\sigma : \partial\mathbb{B}$ の面素，　$0 < r < 1,\ 0 < p < \infty$),

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \sup_{0<r<1} M_p(r, f), \\ \mathbb{H}^p &:= \{f \in \mathbb{H}_{n,m} \mid \|f\|_p < \infty\}, \\ \mathcal{B}(\mathbb{H}^p) &:= \{f \in \mathbb{H}^p \mid \|f\|_p < 1\} \end{aligned}$$

とおくと，次のことが成り立つ：

定理 6([2]). $f \in \mathbb{H}^p$ に対して

$$\overline{\mathrm{co}}(s(f)) \subset \mathbb{H}^p.$$

定理 7([2]). $1 \leqq p < \infty$ に対して

$$\mathrm{ext}(\mathcal{B}(\mathbb{H}^p)) = \{f \in \mathcal{B}(\mathbb{H}^p) \mid \|f\|_p = 1\}.$$

参考文献

[1] D. J. Hallenbeck and T. M. MacGregar: Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory, Pitman Advanced Publishing Program(1983).

[2] D. J. Hallenbeck and K. T. hallenbeck: Extreme Points and Support Points of Subordination Families, Jour. of Math. Analysis and Applications, 251(2000) 157-166.

[3] G. Kothe: Topological Vector Spaces I , Grundlehren der Math. Wisseusehaften, 159, Springer Verlag (1959).

[4] W. Rudin: Function Theory in the unit Ball of C^n, G.M.W., 241, Springer Verlag(1980).

Kazuyuki Tsurumi
Mathematics
Tokyo Denki University
2-2, Nisiki-cho, Kanda, Chiyoda-ku
Tokyo, 101-8457, Japan
E-mail:tsurumi@cck.dendai.ac.jp

Tadayuki Sekine
Office of Mathematics
College of Pharmacy
Nihon University
7-1 Narashinodai 7chome, Funabashi-shi
Chiba, 274-8555, Japan
E-mail:tsekine@pha.nihon-u.ac.jp