数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 64-69

On some inequalities related with p-uniform smoothness and q-uniform convexity

北九州高専 山田康隆 (Yasutaka Yamada)
Kitakyushu College of Technology

九州工大工 加藤幹雄 (Mikio Kato)
Department of Mathematics, Kyushu Institute of Technology

岡山県立大情報工 高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)
Department of System Engineering, Okayama Prefectural University

Bamach 空間の p-uniform smoothness および q-uniform convexity を特徴付ける Clarkson 型不等式や Hanner 型不等式を論じる. 特にこれらの特性をもつ空間を特徴付ける Clarkson 型不等式は重み定数をもつ不等式 (Pisier [12]; cf. [2]) として知られ, その後 Takahashi-Hashimoto-Kato ([13]) によって拡張された. これら重み定数の意味づけもあわせて考察する.

1. p-uniform smoothness と q-uniform convexity

定義 1. (i) Banach 空間 X は, 定数 $K \geq 1$ が存在して $\rho_X(\tau) \leq K\tau^p \quad (\forall\tau \geq 0)$ が成立するとき, *p-uniformly smooth* $(1 \leq p \leq 2)$ であるという. ここで $\rho_X(\tau)$ は X の *modulus of smoothness*, すなわち

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1 : \ \|x\| = \|y\| = 1\right\}$$

である.

(ii) Banach 空間 X は, 定数 $C > 0$ が存在して $\delta_X(\epsilon) \geq C\epsilon^q \quad (\forall\epsilon > 0)$ が成立するとき, *q-uniformly convex* $(2 \leq q < \infty)$ であるという. ここで $\delta_X(\epsilon)$ は X の *modulus of convexity*, すなわち

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \ \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = \epsilon\right\} \quad (0 \leq \epsilon \leq 2)$$

である.

p-uniformly smooth また q-uniformly convex である空間はそれぞれ次の不等式によって特徴付けられる.

定理 1 (Takahashi, Hashimoto and Kato [13])

(i) X が p-uniformly smooth $(1 < p \leq 2)$ であるための必要十分条件は $1 \leq \forall r < \infty \ \exists K > 0$ s.t.

$$\left(\frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2}\right)^{1/r} \leq (\|x\|^p + \|Ky\|^p)^{1/p} \qquad \forall x, y \in X \qquad (1)$$

である.

(ii) X が q-uniformly convex $(2 \leq q < \infty)$ であるための必要十分条件は $1 < \forall r \leq \infty \ \exists C > 0$ s.t.

$$\left(\frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2}\right)^{1/r} \geq (\|x\|^q + \|Cy\|^q)^{1/p} \qquad \forall x, y \in X \qquad (2)$$

である.

(1), (2) の定数 K, C は実際 $1 \leq K < \infty$, $0 < C \leq 1$ である. (1) を満たす K の最小値, (2) を満たす C の最大値は最良定数であり, それぞれ $US_{p(r)}(X)$, $UC_{q(r)}(X)$ で表す.

2. Carkson 型不等式

定理 2. X を Banach 空間, $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$ とする. このとき次の (i), (ii) は同値である.

(i) X は p-uniformly smooth である.

(ii) 実数 t $(t \neq 1/2)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ について

$$\left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)^{1/p} \geq (\,\|tx + (1-t)y\|^q + \|(1-t)x + ty\|^q\,)^{1/q} \qquad (3)$$

が成立する.

注意 1. 関数

$$f(t) = (\,\|tx + (1-t)y\|^q + \|(1-t)x + ty\|^q\,)^{1/q}$$

は $t \leq 1/2$ で単調減少, $t \geq 1/2$ で単調増加する $t = 1/2$ に関して対称な関数である. (3) が成立するとき t の取り得る値の範囲は $0 \leq t \leq 1$, $t \neq 1/2$ である. したがって $f(t)$ は x, y を $t : (1-t)$ および $(1-t) : t$ に内分するベクトルを u, v とするとき, (u, v) の $l_q^2(X)$ ノルムとなる. (3) は変数変換 $x + y = u$, $x - y = v/(2t-1)$

によって

$$\left(\frac{\|u+v\|^q+\|u-v\|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\|u\|^p+\left\|\frac{1}{2t-1}v\right\|^p\right)^{1/p}$$

となり

$$US_{p(q)}(X) = \min|1/(2t-1)| \tag{4}$$

を得る.

$t=1/2$ の場合 (3) は任意のバナッハ空間に対して成立する. また $t=0,1$ の場合, (3) はオリジナルな Clarkson 不等式

$$\left(\frac{\|x+y\|^p+\|x-y\|^p}{2}\right)^{1/p} \ge \left(\|x\|^q+\|y\|^q\right)^{1/q}.$$

となる.

定理 3. X を Banch 空間, $1<p\le 2$, $1/p+1/q=1$ とする. このとき次の (i), (ii) は同値である.

(i) X は q-uniformly convex である.

(ii) 実数 s が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して

$$\left(\frac{\|x+y\|^q+\|x-y\|^q}{2}\right)^{1/q} \le (\,\|sx+(1-s)y\|^p+\|(1-s)x+sy\|^p\,)^{1/p} \tag{5}$$

が成立する.

注意 2. 定理 2 の場合と同様の変数変換により

$$\left(\frac{\|u+v\|^p+\|u-v\|^p}{2}\right)^{1/p} \ge \left(\|u\|^p+\left\|\frac{1}{2s-1}v\right\|^q\right)^{1/q}$$

となり,

$$UC_{q(p)}(X) = \max|1/(2s-1)| \tag{6}$$

を得る. (5) が成立するときの s の取り得る値の範囲は $s\le 0$, $s\ge 1$ である. したがって (5) の右辺は x,y を $|s|:|1-s|$ および $|1-s|:|s|$ に外分するベクトルを u,v とするとき, (u,v) の $l_q^2(X)$ ノルムとなる. $s=0,1$ の場合は (5) はオリジナルな Clarkson 不等式

$$\left(\frac{\|x+y\|^q+\|x-y\|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)^{1/p}.$$

となる.

定理 4 (双対定理). X を Banach 空間, X^* をその双対空間とする. $1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$ とし s, t は $|(2t-1)(2s-1)| = 1$ をみたす実数とする. このとき次の (i), (ii) は同値である.

(i) $$\left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)^{1/p} \ge \left(\|tx + (1-t)y\|^q + \|(1-t)x + ty\|^q \right)^{1/q}$$

が X で成立する.

(ii) $$\left(\frac{\|x^*+y^*\|^q + \|x^*-y^*\|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\|sx^* + (1-s)y^*\|^p + \|(1-s)x^* + sy^*\|^p \right)^{1/p}$$

が X^* で成立する.

3. Hanner 型不等式

Hanner [6] は L_p の *modulus of convexity* を算出する際に不等式

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \ge \Big|\|x\|_p + \|y\|_p\Big|^p + \Big|\|x\|_p - \|y\|_p\Big|^p \qquad (1 < p \le 2)$$

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \le \Big|\|x\|_p + \|y\|_p\Big|^p + \Big|\|x\|_p - \|y\|_p\Big|^p \qquad (2 \le p < \infty)$$

を導入した. これらの不等式を拡張した次の Hanner 型不等式によって 2-uniformly smooth および 2-uniformly convex である空間が特徴づけられる.

定理 5 ([15]). Banach 空間 X が 2-uniformly smooth であるための必要十分条件は, 任意の $1 < s,\ t < \infty$ に対して $1 \le \gamma < \infty$ が存在して

$$\left(\frac{\|x+y\|^s + \|x-y\|^s}{2}\right)^{1/s} \le \left(\frac{\Big|\|x\| + \|\gamma y\|\Big|^t + \Big|\|x\| - \|\gamma y\|\Big|^t}{2}\right)^{1/t} \quad \forall x, y \in X \tag{7}$$

が成立することである.

定理 6 ([15]). Banach 空間 X が 2-uniformly convex であるための必要十分条件は, 任意の $1 < s,\ t < \infty$ に対して $0 < \gamma \le 1$ が存在して

$$\left(\frac{\|x+y\|^s + \|x-y\|^s}{2}\right)^{1/s} \ge \left(\frac{\Big|\|x\| + \|\gamma y\|\Big|^t + \Big|\|x\| - \|\gamma y\|\Big|^t}{2}\right)^{1/t} \quad \forall x, y \in X \tag{8}$$

が成立することである.

Weight の位置を変えた次の Hanner 型不等式により p-uniformly smooth および q-unifrmly convex である空間が特徴付けられる.

定理 7. $1 < p \leq 2$ および $p \leq s < \infty$ とする. このとき Banach 空間 X が p-uniformly smooth であるための必要十分条件は $\gamma > 0$ が存在し

$$\left(\|x+y\|^p + \|\gamma(x-y)\|^p\right)^{1/p} \geq \left(\Big|\|x\| + \|y\|\Big|^s + \Big|\|x\| - \|y\|\Big|^s\right)^{1/s} \quad \forall x, y \in X \quad (9)$$

が成立することである.

定理 8. $2 \leq q < \infty$ および $1 \leq t \leq 2$ とする. このとき Banach 空間 X が q-uniformly convex であるための必要十分条件は $\gamma > 0$ が存在し

$$(\|x+y\|^q + \|\gamma(x-y)\|^q)^{1/q} \leq \left(\Big|\|x\| + \|y\|\Big|^t + \Big|\|x\| - \|y\|\Big|^t\right)^{1/t} \quad \forall x, y \in X \quad (10)$$

が成立することである.

注意 3. (9) は $s < p$ の場合, 実数体 $\mathbb{R}$ 上においても成立しない. また (10) は $2 < t \leq q$ の場合は未知ではあるが, $t > q$ の場合は $\mathbb{R}$ 上においても成立しない.

References

[1] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, Invent. Math. **115** (1994), 463–482.

[2] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd Ed., North Holland, 1985.

[3] R. P. Boas, Some uniformly convex spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 304–311.

[4] P. Enflo, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, Israel J. Math. **13** (1972), 281–288.

[5] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061–1083.

[6] O. Hanner, On the uniformly convexity of L^p and l^p, Ark. Mat. **3** (1956), 239–244.

[7] M. Kato, L. E. Persson and Y. Takahashi, Clarkson type inequalities and their relations to the concepts of type and cotype, Collect. Math. **51** (2000), 327–346.

[8] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces, Math. Nachr. **186** (1997), 187–196.

[9] A. Kigami, Y. Okazaki and Y. Takahashi, A generalization of Hanner's inequality. Bull. Kyushu. Inst. Tech. Math. Natur. Sci. No.**43**, (1996), 9-13.

[10] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces II, Springer-Verlag, 1979.

[11] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[12] G. Pisier, Martingales with values in uniformly convex spaces, Israel J. Math. **20** (1975), 26–350.

[13] Y. Takahashi, K. Hashimoto and M. Kato, On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 267-281.

[14] Y. Takahashi and M. Kato, Clarkson and Random Clarkson inequalities for $L_r(X)$, Math. Nachr. **188** (1997), 341–348.

[15] Y. Yamada, Y. Takahashi and M. Kato, Hanner type inequality and optimal 2-uniform convexity and smoothness inequalities, Proc. Conference on "Nonlinear Analysis and Convex Analysis", RIMS Kokyuroku Research Institue for Mathematical Sciences, Kyoto University **1365** (2004), 68–72 (in Japanese).