

Fine patterns arising in reaction-diffusion systems and Young measure

東京大学大学院数理科学研究科 大下 承民 (Yoshihito Oshita)  
 Graduate School of Mathematical Sciences,  
 University of Tokyo

1 序論

本概説では, FitzHugh-Nagumo 方程式を考察する.

$$\begin{aligned}
 (FH-N) \quad & u_t = \varepsilon^2 \Delta u + f(u) - v && \text{in } \Omega \times \mathbf{R}^+, \\
 & \tau v_t = \Delta v + u - v - g(x) && \text{in } \Omega \times \mathbf{R}^+, \\
 & \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 && \text{on } \partial\Omega \times \mathbf{R}^+.
 \end{aligned}$$

但し,  $\tau, \varepsilon > 0$  は定数,  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) は滑らかな境界をもつ有界領域,  $\partial/\partial n$  は外向き法微分,  $f, g$  は §2 の仮定を満たす滑らかな関数とする. これは, 未知関数  $u$  と  $v$  から成る反応拡散方程式のシステムである. この  $u, v$  を 2 種の物質  $U$  と  $V$  の濃度を表す変数とみたとき, (FH-N) 方程式は数値シミュレーションによって, BZ 反応のような化学反応に現れる空間パターンの特徴を再現することができる. そこで, (FH-N) 方程式を, 2 つの拡散物質  $U$  と  $V$  の変化を表す方程式とみたとき, 拡散と反応の組み合わせによって出現する, 複雑な構造をもった空間パターンを考察する.

ここでは,  $U$  の拡散係数を 0 にする特異極限問題を考える. これは, 生物の形態形成の観点から重要なパラメータ範囲である. このような特異極限を, FitzHugh-Nagumo のような双安定な非線形の反応項をもつ場合に考えたとき, 次のような「相分離」パターンが現れることが多い. すなわち, 領域は,  $u$  が 1 に近い領域  $\Omega_1$  と 0 に近い領域  $\Omega_0$  の 2 つの相に分かれ, その残りの領域が薄い層 (遷移層) となったパターンである. 極限では, 遷移層の幅は 0 に近づき, 一般に「界面」と呼ばれる領域内部の不連続面が生じる. これについては, 類似の方程式で多くの研究がある. しかしながら, ある種のスケールリングにおいては極限状態が滑らかな曲面になるようなおとなしいパターンが現れず, 解の様子がずっと複雑になるために従来の手法での解析は困難である.

2 次元の場合, 実際の実験や数値シミュレーションで無数の水玉状の界面をもつ微細な周期構造が頻繁に現れることが以前から知られている (図 1). しかし, これまで数学的な解析が行われたのは本質的に 1 次元の問題である直線状界面の場合だけで, 水玉状の微細パターンの厳密な解析はなされていなかった. [10] では, 空間 2 次元でどのような微細な構造をもっているかを調べるために, 正規化された極限「エネルギー」を導入した. そして, 水玉状界面を持ったいろいろな周期パターンのエネルギーを計算し, 正六角形の構造が最小値を与えることがわ

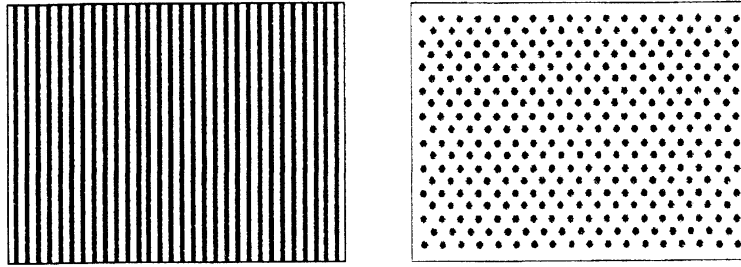


図1 2次元における縞模様と斑点模様

かった. 更に, その最小値を与える斑点模様と縞模様 (直線状界面) とでエネルギーの比較をした. これにより, あるパラメータ範囲で, 縞模様より斑点模様の方が小さいエネルギーをもつことが示され, 斑点模様が頻繁に現れることの理論的裏付けを与えることができた.

ここでは, 空間1次元の場合に, 最小化法を用いたアプローチで定常解を構成する. 次に, その解のパターンについて,  $g$  が定数の場合に発見的考察をする. その結果, この解は振動の激しさが増していく複雑な構造をもっているため, 漸近挙動の解析が関数のクラスでは困難であることがわかる. そこで, 局所振動の様子を表すヤング測度を考察し, 解の振動の  $x$  依存性を調べる.

## 2 1次元での微細なパターン

$\Omega = (0, 1)$  で, 定常 FitzHugh-Nagumo 方程式系を考える.

$$(S) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 u_{xx} + f(u) - v &= 0, & x \in (0, 1), \\ v_{xx} + u - v - g(x) &= 0, & x \in (0, 1), \\ u_x(x) = v_x(x) &= 0, & x = 0, 1. \end{aligned}$$

但し,  $f$  は,

(f) 次の (W1), (W2) を満たす滑らかな関数  $W : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  に対して,  $f(u) = -W_u(u)$  と表される.

(W1)  $W(0) = W(1) = 0 < W(s), \quad \forall s \neq 0, 1$  ;

(W2) ある定数  $C_1, C_2 > 0$  に対して,  $W(s) \geq C_1 s^2 - C_2$  for all  $s \in \mathbf{R}$ .

また,

(g1)  $g$  は滑らかで,  $g(x) \in (0, 1)$  for all  $x \in (0, 1)$

と仮定する.

■解の構成 汎関数:

$$\mathbf{I}(u, v, \varepsilon) := \int_0^1 \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} v_x^2 + W(u) + uv - \frac{1}{2} v^2 - gv \right\} dx$$

を定義する.  $\mathbf{I}$  の第一変分は,

$$\begin{aligned} \langle D\mathbf{I}(u, v), (\varphi, \psi) \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{I}(u + t\varphi, v + t\psi) - \mathbf{I}(u, v)}{t} \\ &= \int_0^1 \varepsilon^2 u_x \varphi_x - v_x \psi_x - f(u)\varphi + v\varphi + u\psi - v\psi - g\psi \, dx \\ &= [\varepsilon^2 u_x \varphi - v_x \psi]_0^1 + \int_0^1 (-\varepsilon^2 u_{xx} - f(u) + v)\varphi + (v_{xx} + u - v - g)\psi \, dx \end{aligned}$$

となり, 臨界点が (S) の解に対応する.

$$\mathbf{K} := \{(u, v) \in (H^1(0, 1))^2 \mid -v_{xx} + v = u - g \text{ in } (0, 1), \quad v_x = 0 \text{ at } 0, 1\}$$

上での最小問題

$$(M) \quad \inf_{(u, v) \in \mathbf{K}} \mathbf{I}(u, v, \varepsilon)$$

を考える.  $(u, v) \in \mathbf{K}$  のとき,  $-v_{xx} + v = u - g$  の両辺に,  $v$  をかけて,  $(0, 1)$  上積分すると,

$$\int_0^1 v_x^2 + v^2 \, dx = \int_0^1 (u - g)v \, dx.$$

従って,

$$(2.1) \quad (u, v) \in \mathbf{K} \implies \mathbf{I}(u, v, \varepsilon) = \int_0^1 \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} u_x^2 + W(u) + \frac{1}{2}(v^2 + v_x^2) \right\} dx$$

がわかる. 各  $u \in H^1(0, 1)$  に対して,  $(u, v) \in \mathbf{K}$  となる  $v$  は一意に定まるので, 汎関数

$$\mathbf{E}(u, \varepsilon) := \mathbf{I}(u, v, \varepsilon), \quad (u, v) \in \mathbf{K}$$

が定義できる. この  $\mathbf{E}(\cdot, \varepsilon)$  は,  $H^1$  ノルムに関して弱下半連続であり, コアーシブでもあるので, 各  $\varepsilon > 0$  に対して, (M) が達成されることがわかる. すなわち,

$$(2.2) \quad \mathbf{I}(u^\varepsilon, v^\varepsilon, \varepsilon) = \inf_{(u, v) \in \mathbf{K}} \mathbf{I}(u, v, \varepsilon)$$

を満たす関数  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \mathbf{K}$  が存在する. この  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$  は  $\mathbf{I}$  の臨界点, すなわち (S) の解となることも容易にわかる.  $\tau \in (0, 1)$  のときの (FH-N) に対する安定性解析については, [33] を参照.

$$(2.3) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}^\varepsilon + f(u^\varepsilon) - v^\varepsilon = 0, & x \in (0, 1), \\ v_{xx}^\varepsilon - v^\varepsilon + u^\varepsilon - g(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ u_x^\varepsilon(x) = v_x^\varepsilon(x) = 0, & x = 0, 1. \end{cases}$$

## 2.1 一様媒質の場合

本節では,

(g2) ある定数  $m \in (0, 1)$  に対して,  $g \equiv m$

とし, 激しく振動する相分離パターン  $u^\varepsilon$  の構造を  $\Omega = (0, 1)$  の場合に考察する. まず,  $\bar{v} = \frac{1}{1} \int_0^1 v$  を  $v$  の平均としたとき,  $v$  に対する方程式を積分して,  $\bar{v} = \bar{u} - m$  となる.  $\|v\|_{L^2}^2 = \|v - \bar{v}\|_{L^2}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2}^2$  なので,

$$(2.4) \quad \mathbf{E}(u, \varepsilon) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2 u_x^2 + W(u) + \frac{1}{2} (\bar{u} - m)^2 \right\} + \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} (v - \bar{v})^2 \right\}$$

と表される.  $u$  が 0 から 1 へ変わる遷移層 (拡散的界面) は  $\varepsilon$  スケールである. 実際, 界面の近くで,  $u(x) \sim Q(\pm(x-z)/\varepsilon)$ , ただし,  $z$  は界面の位置,  $Q$  は遷移のプロファイルで,

$$\begin{cases} \ddot{Q}(\xi) + f(Q(\xi)) = 0, & \forall \xi \in \mathbf{R}, \\ Q(-\infty) = 0, \quad Q(\infty) = 1, \quad \int_{\mathbf{R}} \xi \dot{Q}(\xi) d\xi = 0 \end{cases}$$

の一意解である. 最後の式は正規化条件であり,

$$\int_{-\infty}^0 Q = \int_0^{\infty} (1 - Q) \iff \int_0^{Q(0)} \frac{s}{\sqrt{2W(s)}} ds = \int_{Q(0)}^1 \frac{1-s}{\sqrt{2W(s)}} ds$$

と同値である. 各遷移層に対して,  $u$  を含むエネルギーの部分のコスト (界面エネルギー) は, およそ  $\sigma\varepsilon$ ,

$$\sigma := \int_0^1 \sqrt{2W(s)} ds$$

である. したがって, 界面の数が少ないほど, 全界面エネルギーは小さくなる.

一方, 界面がたくさんなれば, 相領域 ( $u \sim 0$  または  $u \sim 1$  のところ) は長くなり, (2.4) の第 2 の積分 (相互作用エネルギー) は小さくならない. 実際, 2 つの界面間の距離を  $l$  としたとき,  $v$  に関する方程式を  $v'' = m + v - u \sim m$  or  $m - 1$  で近似すると, 相互作用エネルギーは概ね,

$$\frac{m^2(1-m)^2}{6} l^3$$

となる. 故に, エネルギー密度 (単位長さ当たりのエネルギー) は

$$\frac{1}{l} \left( \sigma\varepsilon + \frac{m^2(1-m)^2}{6} l^3 \right)$$

で近似できる. これは,  $l \sim L_0 \varepsilon^{1/3}$ ,

$$L_0 := \left( \frac{3\sigma}{m^2(1-m)^2} \right)^{1/3}$$

のとき, 最小値

$$(\varepsilon\sigma)^{2/3} A_S(m), \quad A_S(m) := \frac{1}{2} [3m(1-m)]^{2/3}$$

をとることが容易にわかる. 従って界面間の距離が,  $L_0\varepsilon^{1/3}$  というポテンシャルスケールに近づくことが期待される. 言い換えれば, (2.2), (2.3) の解  $u^\varepsilon$  はこのスケールで振動しているということである. 厳密な結果は [9] を参照.

## 2.2 非一様媒質の場合

本節では, (f), (g1) を仮定する.  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \mathbf{K}$  を (2.2), (2.3) の解とする. 次の結果が成立する.

**定理 2.1** (1) 連続関数  $h \in C(\mathbf{R})$  に対して,  $\{h(u^\varepsilon)\}$  が  $\varepsilon \searrow 0$  のとき  $L^1((0, 1))$  で弱収束するならば, 弱極限は関数

$$\bar{h}(x) = (1 - g(x))h(0) + g(x)h(1)$$

である.

(2) 任意の  $h \in C_0(\mathbf{R}) := \left\{ \rho \in C(\mathbf{R}) \mid \lim_{|s| \rightarrow \infty} \rho(s) = 0 \right\}$  に対して,  $\varepsilon \searrow 0$  のとき

$$h(u^\varepsilon) \xrightarrow{*} \bar{h}(x) = (1 - g(x))h(0) + g(x)h(1) \quad \text{weak } * \text{ in } L^\infty((0, 1))$$

である.

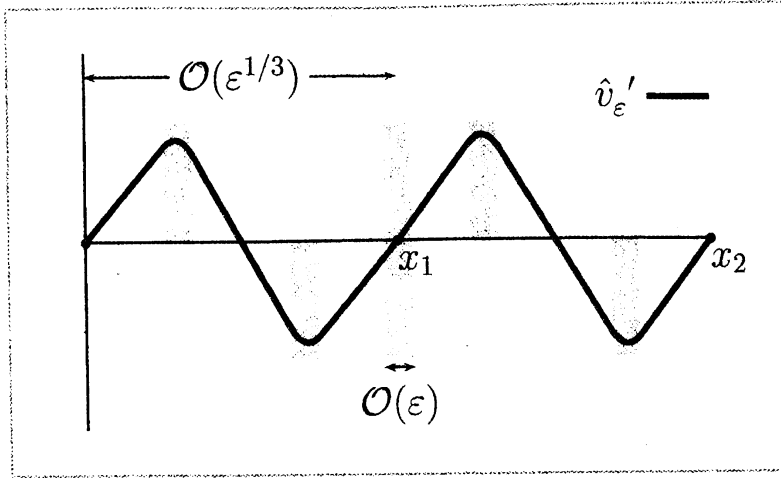
**注意**  $h \in C_0(\mathbf{R})$  のとき,  $\bar{h}(x) = \langle h, \mu_x \rangle = \int_{\mathbf{R}} h(\lambda) d\mu_x(\lambda)$  とかける. 但し,

$$\mu_x = (1 - g(x))\delta_0 + g(x)\delta_1, \quad x \in (0, 1)$$

は  $\mathbf{R}$  上の確率測度で,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $C_0(\mathbf{R})$  との双対積を表す.  $\mu_x$  の族  $\mu = \{\mu_x\}_{x \in (0, 1)} \in \text{YM}((0, 1); \mathbf{R})$  は,  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき  $u^\varepsilon$  が生成するヤング測度と呼ばれる. これは, 各  $x$  の近くで  $u^\varepsilon$  がある特定の値をとる確率の極限である. 今の場合,  $x$  の近くでランダムに点を選んだときの  $\{u^\varepsilon\}$  の値の確率分布は, 極限においては, 0 をとる確率が  $1 - g(x)$ , 1 をとる確率が  $g(x)$ , それ以外の値をとる確率が 0 ということである. これは直感的には次のことを示している.  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき,  $u^\varepsilon$  は, 0 または 1 の近くに値をとりつつ, その局所平均は  $g(x)$  に近づく. そのため,  $u^\varepsilon$  は 0 と 1 の間を激しく振動していく.

**定理 2.1 の証明:** まず, 次を示す.

**補題 2.1**  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{I}(u^\varepsilon, v^\varepsilon, \varepsilon) = 0$ .

図2 関数  $\hat{v}'_\epsilon$ 

*Proof.*  $n \in \mathbf{N}$  に対して,  $x_k = k/n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  とおく. 関数  $v_n$  を,  $v_n(0) = 0$ ,

$$v'_n(x) = \begin{cases} g(x_k)(x - x_k), & x \in [x_k, \frac{x_k + x_{k+1}}{2} - \frac{g(x_k)}{2n}], 0 \leq k < n \text{ のとき} \\ -(1 - g(x_k))(x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}), & x \in [\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - \frac{g(x_k)}{2n}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{g(x_k)}{2n}], \\ & 0 \leq k < n \text{ のとき} \\ g(x_k)(x - x_{k+1}), & x \in [\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{g(x_k)}{2n}, x_{k+1}], \\ & 0 \leq k < n \text{ のとき} \end{cases}$$

となるようにとる. このとき,  $v_n(x_k) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ),  $v_n = \mathcal{O}(1/n^2)$ ,  $v'_n = \mathcal{O}(1/n)$  が成立. また,  $u_n = g(x) - v''_n + v_n$  とおくと,  $x \in (x_k, \frac{x_k + x_{k+1}}{2} - \frac{g(x_k)}{2n}) \cup (\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{g(x_k)}{2n}, x_{k+1})$ ,  $0 \leq k < n$  のとき

$$u_n(x) = g(x) - g(x_k) + v_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n}),$$

$x \in (\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - \frac{g(x_k)}{2n}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{g(x_k)}{2n})$ ,  $0 \leq k < n$  のとき

$$u_n(x) = g(x) + 1 - g(x_k) + v_n = 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

となる. 故に,  $W(u_n) = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$  より,

$$(2.5) \quad \int_0^1 W(u_n) + \frac{1}{2}((v'_n)^2 + v_n^2) dx = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

がわかる. ここで,  $v_n \in W^{2,\infty}((0,1))$ ,  $v'_n$  は折れ線関数,  $v'_n(0) = v'_n(1) = 0$ ,  $u_n$  は高々  $3n$  個の点でジャンプする区分的連続関数であることに注意する.

$\epsilon \in (0,1)$  に対して,  $\epsilon^{-1/3} \leq n < \epsilon^{-1/3} + 1$  を満たす  $n \in \mathbf{N}$  をとる.  $v'_n$  の微分不可能点の  $\epsilon$  近傍を正則化して,  $(\hat{u}_\epsilon, \hat{v}_\epsilon) \in \mathbf{K}$  を作る.  $3n$  個の点の  $\epsilon$  近傍では,  $|\hat{u}'_\epsilon| = \mathcal{O}(1/\epsilon)$ , それ以外の領域では,  $|\hat{u}'_\epsilon| = \mathcal{O}(1)$  であるから,

$$\int_0^1 \frac{\epsilon^2}{2} (\hat{u}'_\epsilon)^2 dx = \mathcal{O}(\epsilon^2 \epsilon^{-2} \epsilon n) + \mathcal{O}(\epsilon^2)(1 - \mathcal{O}(\epsilon n)) = \mathcal{O}(\epsilon^{2/3})$$

となる. よって, (2.2), (2.5) より

$$0 \leq \mathbf{I}(u^\varepsilon, v^\varepsilon, \varepsilon) \leq \mathbf{I}(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}) \rightarrow 0$$

がわかる.  $\square$

ヤング測度の生成定理を思い出そう.

**命題 2.1** [35, Theorem 6.2]  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  を可測集合,  $z_j : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$  を

$$\sup_j \int_\Omega g(|z_j|) dx < \infty$$

を満たす可測関数とする. 但し,  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  は  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$  を満たす連続非減少関数である. このとき, ある部分列  $\{z_{j_n}\}$  と  $\mathbf{R}^m$  上の確率測度の族  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  で次の性質をもつものが存在する.

任意の Carathéodory 関数  $\psi(x, \lambda) : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  に対して,  $\{\psi(x, z_{j_n}(x))\}$  が  $L^1(\Omega)$  で弱収束するならば, 弱極限は関数

$$\bar{\psi}(x) = \int_{\mathbf{R}^m} \psi(x, \lambda) d\mu_x(\lambda)$$

である.

**定理 2.1 の証明の続き** (1) が成立しないと仮定すると, 関数  $h \in C(\mathbf{R})$ ,  $\varphi \in L^\infty((0, 1))$ , 数列  $\varepsilon_n \searrow 0$ , 定数  $\delta > 0$  があって,  $\{h(u^{\varepsilon_n})\}$  は  $L^1((0, 1))$  で弱収束し,

$$(2.6) \quad \left| \int_0^1 \varphi(x) h(u^{\varepsilon_n}) dx - \int_0^1 \varphi \bar{h} dx \right| \geq \delta \quad \text{for all } n \geq 1$$

を満たす. 仮定 (W2) :  $W(u) \geq C_1 u^2 - C_2$  と (2.1) より,

$$(2.7) \quad C_1 \|u^{\varepsilon_n}\|_{L^2}^2 \leq \int_0^1 W(u^{\varepsilon_n}) dx + C_2 \leq \mathbf{I}(u^{\varepsilon_n}, v^{\varepsilon_n}, \varepsilon_n) + C_2 < \infty$$

なので,  $\{u^{\varepsilon_n}\}$  は  $L^2((0, 1))$  で弱収束しているとしてよい.  $u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$  weak in  $L^2((0, 1))$  とすると,  $-d^2/dx^2$  のグリーン作用素のコンパクト性より,  $v^{\varepsilon_n} \rightarrow v$  in  $H^1((0, 1))$  となる. 但し,  $v$  は  $(u, v) \in \mathbf{K}$  となる関数である. このとき, (2.1) より

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 v_x^2 + v^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^1 (v^{\varepsilon_n})_x^2 + (v^{\varepsilon_n})^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{I}(u^{\varepsilon_n}, v^{\varepsilon_n}, \varepsilon_n) = 0.$$

したがって  $v \equiv 0$ ,  $u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u \equiv g$  weak in  $L^2((0, 1))$  がわかる. また,

$$0 \leq \left\| \sqrt{W(u^{\varepsilon_n})} \right\|_{L^2}^2 = \int_0^1 W(u^{\varepsilon_n}) dx \leq \mathbf{I}(u^{\varepsilon_n}, v^{\varepsilon_n}, \varepsilon_n) \rightarrow 0$$

に注意する. ここで, (2.7) と命題 2.1 から,  $\{u^{\varepsilon_n}\}$  が確率測度の族  $\mu = \{\mu_x\}_{x \in (0, 1)}$  を生成しているとしてよい. 特に,

$$u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup g = \langle \text{Id}, \mu_x \rangle \quad \text{weak in } L^2((0, 1)), \quad \sqrt{W(u^{\varepsilon_n})} \rightarrow 0 = \langle \sqrt{W}, \mu_x \rangle \quad \text{in } L^2((0, 1))$$

が成立.  $\langle \sqrt{W}, \mu_x \rangle = \int_{\mathbf{R}} \sqrt{W(\lambda)} d\mu_x(\lambda) = 0$  は, 確率測度  $\mu_x$  が  $\sqrt{W}$  の零点  $\lambda = 0$  と  $\lambda = 1$  に集中していることを意味しているので,

$$\mu_x = (1 - \theta(x))\delta_0 + \theta(x)\delta_1, \quad \theta(x) \in [0, 1]$$

とかける. 更に,  $g(x) = \langle \text{Id}, \mu_x \rangle = \int_{\mathbf{R}} \lambda d\mu_x(\lambda) = \theta(x)$  より,  $h(u^{\varepsilon_n}) \rightharpoonup \bar{h}$  weak in  $L^1((0, 1))$  がわかる. これは (2.6) に矛盾. よって (1) が示された.

(2) が成立しないと仮定すると, 関数  $h \in C_0(\mathbf{R})$ ,  $\varphi \in L^1((0, 1))$ , 数列  $\varepsilon_n \searrow 0$ , 定数  $\delta > 0$  があって,

$$(2.8) \quad \left| \int_0^1 \varphi(x) h(u^{\varepsilon_n}) dx - \int_0^1 \varphi \bar{h} dx \right| \geq \delta \quad \text{for all } n \geq 1$$

を満たす.  $\|h(u^{\varepsilon_n})\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R})} < \infty$  より,  $h(u^{\varepsilon_n})$  は  $L^\infty((0, 1))$  で汎弱収束,  $L^1((0, 1))$  で弱収束していると仮定してよい. (1) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi(x) h(u^{\varepsilon_n}) dx = \int_0^1 \varphi \bar{h} dx$$

となり, これは (2.8) に矛盾. よって (2) が示された.  $\square$

### 3 最後に

2つの部分 a,b から分子が形成されている高分子共重合体の相分離問題のモデルにおいて, 類似の汎関数が Helmholtz 自由エネルギーとして使われる ([4, 18] を参照, また実験は [19], モデリングに関しては [3, 22, 32] も参照, 最初の数理解析は [29], その後の解析的結果は [11, 13, 16, 20, 31, 36, 37, 38] にある).  $\mathcal{O}(1)$  の界面パターンと特異摂動法については, [6, 28, 30, 34, 40, 41, 42] を参照. 界面運動については, [5, 7, 8, 15, 17, 23] を参照. 2つのスケールをもつ変分問題については, [1, 12, 26] を参照. FitzHugh-Nagumo 方程式の波については, [2, 14, 21] を参照.

### 参考文献

- [1] G. ALBERTI AND S. MÜLLER, *A new approach to variational problems with multiple scales*, Comm. Pure Appl. Math., 54 (2001), pp. 761-825.
- [2] D. G. ARONSON AND H. F. WEINBERGER, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, in Partial Differential Equations and Related Topics, Lecture Notes in Math. 446, Springer, New York, 1975; pp. 5-49.
- [3] BAHIANA AND OONO, *Cell dynamical system approach to block copolymers*, Phys. Rev., 41 (1990), pp. 6763-6771.
- [4] F. S. BATES AND G. H. FREDRICKSON, *Block Copolymers-Designer soft materials*, Physics Today, 32 (1999), 32-38.



- [5] A. BONAMI, D. HILHORST, AND E. LOGAK, *Modified motion by mean curvature: Local existence and uniqueness and qualitative properties*, Differential Integral Equations, 13 (2000), pp. 1371–1392.
- [6] J. CARR, M. E. GURTIN AND M. SLEMROD, *Structured phase transitions on a finite interval*, Arch. Ration. Mech. Anal., 86 (1984), pp. 317–351.
- [7] X. CHEN, *Generation and propagation of interfaces in reaction-diffusion systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 334 (1992), pp. 877–913.
- [8] X. CHEN, D. HILHORST, AND E. LOGAK, *Asymptotic behavior of solutions of an Allen-Cahn equation with a nonlocal term*, Nonlinear Anal., 28 (1997), pp. 1283–1298.
- [9] X. CHEN AND Y. OSHITA, *Periodicity of minimizer of an energy functional containing a long-range interaction term*, preprint.
- [10] X. CHEN AND Y. OSHITA, *An application of the modular function in interfacial dynamics*, preprint.
- [11] R. CHOKSI, *Scaling laws in microphase separation of diblock copolymers*, J. Nonlinear Sci., 11 (2001), pp. 223–236.
- [12] R. CHOKSI, R. KOHN, AND F. OTTO, *Domain branching in uniaxial ferromagnets: A scaling law for the minimum energy*, Comm. Math. Phys., 201 (1999), pp. 61–79.
- [13] R. CHOKSI AND X. F. REN, *On the derivation of a density functional theory for microscopic separation of diblock copolymers*, J. Statistical Physics, 113 (2003), pp. 151–176.
- [14] G. B. ERMENTROUT, S. P. HASTINGS, AND W. C. TROY, *Large amplitude stationary waves in an excitable lateral-inhibitory medium*, SIAM J. Appl. Math., 44 (1984), pp. 1133–1149.
- [15] P. C. FIFE, *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. 53, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [16] P. FIFE AND D. HILHORST, *The Nishiura-Ohnishi Free Boundary Problem in the 1D case*, SIAM J. Math. Anal., 33 (2001), pp. 589–606.
- [17] P. C. FIFE AND L. HSIAO, *The generation and propagation of internal layers*, Nonlinear Anal., 12 (1988), pp. 19–41.
- [18] I. W. HAMLEY, *The Physics of Block Copolymers*, Oxford University Press, Oxford, England, 1999.
- [19] T. HASHIMOTO, M. SHIBAYAMA, AND H. KAWAI, *Domain-Boundary Structure of Styrene-Isoprene Block Copolymer Films Cast from Solution. 4. Molecular-Weight Dependence of Lamellar Microdomains*, Macromolecules, 13 (1980), pp. 1237–1247.
- [20] M. HENRY, D. HILHORST, AND Y. NISHIURA, *Singular limit of a second order non-local parabolic equation of conservative type arising in the micro-phase separation of diblock copolymers*, Hokkaido Mathematical Journal, Vol. XXXII (2003), pp. 561–622.

- [21] G. A. KLAASEN AND W. C. TROY, *Stationary wave solutions of a system of reaction-diffusion equations derived from the FitzHugh-Nagumo equations*, SIAM J. Appl. Math., 44 (1984), pp. 96–110.
- [22] L. LEIBLER, *Theory of Microphase Separation in Block Copolymers*, Macromolecules, 13 (1980), pp. 1602–1617.
- [23] E. LOGAK, *Singular limit of reaction-diffusion systems and modified motion by mean curvature*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 132 (2002), pp. 951–973.
- [24] M. MIMURA AND K. KAWASAKI, *Spatial segregation in competitive interaction-diffusion equations*, J. Math. Biol., 9 (1984), pp. 49–64.
- [25] L. MODICA, *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Ration. Mech. Anal., 98 (1987), pp. 123–142.
- [26] S. MÜLLER, *Singular perturbations as a selection criterion for periodic minimizing sequences*. Calc. Var. Partial Differential Equations, 1 (1993), No. 2, pp. 169–204.
- [27] S. MÜLLER AND G. WEISS, *private communication*, 1996.
- [28] Y. NISHIURA, *Dynamics Reported (New Series)*, Vol. 3, Springer, Berlin, 1994.
- [29] Y. NISHIURA AND I. OHNISHI, *Some mathematical aspects of the micro-phase separation in diblock copolymers*, Phys. D, 84 (1995), pp. 31–39.
- [30] Y. NISHIURA AND H. SUZUKI, *Nonexistence of higher dimensional stable turing patterns in the singular limit*, SIAM J. Math. Anal., 29 (1998), pp. 1087–1105.
- [31] I. OHNISHI, Y. NISHIURA, M. IMAI, AND Y. MATSUSHITA, *Analytical solution describing the phase separation driven by a free energy functional containing a long-range interaction term*, Chaos, 9 (1999), pp. 329–341.
- [32] T. OHTA AND K. KAWASAKI, *Equilibrium morphology of block copolymer melts*, Macromolecules, 19 (1986), pp. 2621–2632.
- [33] Y. OSHITA, *On stable stationary solutions and mesoscopic patterns for FitzHugh-Nagumo equations in higher dimensions*, J. Differential Equations, 188 (2003), pp. 110–134.
- [34] Y. OSHITA, *Stable stationary patterns and interfaces arising in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., 36 (2004), pp. 479–497.
- [35] P. PEDREGAL, *Parametrized measures and variational Principles*, Progress in Nonlinear Partial Differential Equations, Birkhäuser, Basel, 1977.
- [36] X. REN AND J. WEI, *Concentrically layered energy equilibria of the di-block copolymer problem*, European J. Appl. Math., 13 (2002), pp. 479–496.
- [37] X. REN AND J. WEI, *On energy minimizers of the diblock copolymer problem*, Interfaces and Free Boundaries, 5 (2003), pp. 193–238.
- [38] X. REN AND J. WEI, *On the spectra of three-dimensional lamellar solutions of the Diblock copolymer problem*, SIAM J. Math. Anal., 35 (2003), No. 1, pp. 1–32.

- [39] P. STERNBERG, *The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems*, Arch. Ration. Mech. Anal., 101 (1988), pp. 209–260.
- [40] H. SUZUKI, *Asymptotic characterization of stationary interfacial patterns for reaction diffusion systems*, Hokkaido Math. J., Vol. 26, No. 3, pp. 631–667, 1997.
- [41] H. SUZUKI, *Construction and stability of stationary interfacial patterns in rescaled reaction diffusion systems*, In Proceedings of the International Conference on Asymptotics in Nonlinear Diffusive Systems (Sendai, 1997), Vol. 8 of Tohoku Math. Publ., pp. 257–262, Sendai, 1998. Tohoku Univ.
- [42] M. TANIGUCHI AND Y. NISHIURA, *Instability of planar interfaces in reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 25, No. 1, pp. 99–134, 1994.