サーヴェイ論文

証明論的意味論における原子ベースと完全性の連関

豊岡 正庸*

A Connection between atomic base and completeness in Proof-Theoretic semantics

Masanobu TOYOOKA

§1　序論

証明論的意味論 (Proof-Theoretic Semantics, 以下 PTS) はモデル論的意味論に代わる意味論の候補として提示されてきた．モデル論的意味論が文の意味を真理値から説明するのに対し，PTS は，文の意味をその文が持つ**証明**から説明する．モデル論的意味論と比べて，PTS がいかなる性質を持つか探求されてきたが，このような性質の中で特に**完全性**についての議論が近年の PTS では盛んである（Piecha, Sanz, and Schoroeder-Heister 2015；Piecha and Schroeder-Heister 2016；Piecha and Schroeder-Heister 2018；Prawitz 2014；Litland 2011；Sandqvist 2009；Schroeder-Heister 1983）．近年の完全性に関する議論でポイントになるのが**原子ベース** (atomic base) という概念である．PTS は証明から意味を捉えるという点ではモデル論的意味論とは異なっているものの，複合文の意味を合成的に定めるという点は共通している．ゆえに，PTS においては複合文の証明は帰納的に定められることになる．原子ベースは，その際に原子文同士の推論関係を定める体系である．PTS においては文の意味はその証明から捉えられ，証明は推論関係から構成される．よって，原子ベースを与えるということは，原子文の意味を定めることでもある．いわば，原子ベースはモデル論的意味論における，原子文に対する真理値割り当てに対応している．ピエチャとシュレーダー＝ハイスター（Piecha and Schroeder-Heister 2016；Piecha and Schroeder-Heister 2017）によれば原子ベースに対しては，それが知識の状況を表しているという解釈と，原子文の定義を表してい

* 北海道大学大学院文学院 人文学専攻 哲学宗教学講座 哲学倫理学研究室 修士課程 1 年
masanobu.toyo@gmail.com

るという解釈の二通りの解釈が存在し，どちらをとるかにより原子ベースの構成が変わり，完全性の議論についても異なる帰結が得られる．

以下，本稿の流れを説明する．第 2 節では，PTS の起源となる **BHK 解釈**と，**簡約** (reduction) と**正規化** (normalization) について説明し，PTS の基本方針を確認する．BHK 解釈とは，直観主義者による証明についての構成的な解釈である．簡約と正規化とはプラウィッツ（Prawitz [1965]2006）が与えた証明に対する操作である．第 3 節では原子ベースに着目し，原子ベースを知識の状況とする解釈と，原子文の定義とする解釈を提示し，それぞれの解釈に従って，いかにして原子ベースが構成されるかを述べる．その上で，原子ベースの解釈の相違により，PTS の定める妥当性の枠組みや，単調性や原子完全性といった議論にどのような影響が生じるかを概説する．第 4 節では近年の PTS における完全性の議論を概観する．PTS の完全性についての議論の発端となったのは，**プラウィッツの予想** (Prawitz's conjecture) とよばれる問題提起である（Prawitz 1973, p.246）．プラウィッツは直観主義論理と PTS の間には完全性が成立すると予想した．本論文ではこの予想を踏まえて，直観主義論理と PTS における完全性についての近年の議論を概観する．なお，本論文では，論理は，命題変数に量化を許さない直観主義命題論理に限る．ゆえに述語や量化子は考慮の対象から外すものとする．また，構文論の命題変数の全集合を明示するときは，$\mathsf{Prop} = \{p, q\}$ などとする．なお，本稿においては，PTS の基本的な枠組みや妥当性の定め方については（Prawitz 1973；Prawitz 2006；Prawitz [1965]2006）に，原子ベースに関する内容については（Piecha and Schroeder-Heister 2016；Piecha and Schroeder-Heister 2017）に，完全性については（Piecha 2016；Piecha, Sanz, and Schoroeder-Heister 2015）におおむねしたがっている．しかし，（Prawitz 1973；Prawitz 2006）においては論証に対して妥当性が定められているのに対して，（Piecha and Schroeder-Heister 2016；Piecha and Schroeder-Heister 2017；Piecha 2016；Piecha, Sanz, and Schoroeder-Heister 2015）では帰結関係に対して妥当性が定められており，第 3 節や第 4 節における妥当性や健全性・完全性に関する議論は，論証に対する妥当性に基づき筆者が再構成を行った．

§2　PTS の枠組み

2.1　PTS の合成性と BHK 解釈

序論でも述べた通り，PTS は証明を中心概念とする**合成的な意味論**である．よって，PTS においては，文の意味は**証明**から捉えられ，複合文の証明はそれよりも短い文の証明により説明される．

PTS の合成性を理解するうえで重要なのが，BHK 解釈である．BHK 解釈とは，直観主義数学の初期の提唱者である，ブラウアー・ハイティング・コルモゴロフの頭文字をとって名づけられた，証明の直観主義的な解釈である．BHK 解釈では，各論理定項を主結合子とする複合文の証明は，それぞれ以下のように解釈される（van Dalen 2013, p.156）．

- $A \wedge B$ の証明は，A の証明と B の証明から成る．
- $A \vee B$ の証明は，A の証明か B の証明から成る．
- $A \to B$ の証明は，任意の A の証明を B の証明へと変形する構成である．
- $\perp$ は証明を持たない．

このように BHK 解釈では複合文の証明はそれよりも短い文の証明を用いて，合成的に解釈される[1]．PTS は BHK 解釈を，意味論において実現したものだと言える．

2.2　論証と証明

PTS では証明が中心的な概念であるが，ここでの「証明」とは，ある特定の体系における規則を用いることで構成された証明のことではない．ある特定の体系において構成された証明が証明論に属する概念であるのに対し，PTS で文の意味を説明するために用いられる証明とは意味論に属する概念であるからである．本項では二つの証明概念について説明を行う．

プラウィッツ（Prawitz 1973；Prawitz 2006）によれば，PTS における**証明**とは妥当な論証のことである．ここでの**論証** (argument) とは一般的に用いられる意味と捉えてもらって差し支えない．例えば以下のような推論を考えてみよう．

2 月にジョンにあったとき，ジョンは 4 月からロシアか韓国のどちらかに 2 年

[1] なお，ゲーデル（Gödel 1995）により，BHK 解釈には循環があることが指摘されている．

間出張に行くことになるが，まだどちらに行くかは決まっていないといっていた．7 月に私がメアリーにあったとき，彼女はジョンと 6 月に電話をしたときに，彼が日常会話で使うために韓国語を必死に勉強しているといっていたと，私に述べた．だから，ジョンは韓国に出張に行くことになったのだろう．

これは我々が普段論証として受け入れるであろう推論である．そして，形式化を行うことで，以下のようなツリー状の対象として先ほどの推論は表すことができる．

$$\frac{C \quad (C \land A) \to \bot \quad A \lor B}{B}$$

A は「ジョンが出張でロシアに行っている」，B は「ジョンが出張で韓国に行っている」，C は「ジョンが日常会話のために韓国語を勉強している」を表していると考えればよい．プラウィッツによれば，**論証**とは論理式がツリー状に配置された任意の対象のことである[2]．ゆえに，論証は特定の体系の規則に従って構成されていなくてもよい．実際，先ほどの論証は特定の体系の規則に従っているわけではない．また，誤っているように思える以下のような対象も，論理式がツリー状に配置されている以上，論証として認められる．

$$\frac{A \quad \neg B}{(A \land B) \land C}$$

なお，論証中の仮定がすべて消去されている論証を**閉じた論証** (closed argument)，そうでない論証を**開いた論証** (open argument) と呼ぶ．PTS においてはこのツリー状の対象に対して妥当かどうか，が論じられることになる．妥当な論証でなければ，文の意味を与えるものとして認められない．PTS においては証明によって文の意味が与えられるが，その証明の概念を定める役割を担うのが**妥当性** (validity) だというわけである．よって PTS においては，妥当性をいかに定めるかが重要な議題となる．

続いて証明論における「証明」について述べる．これ以降，議論の明確化のため，証明論における証明のことを**体系内証明**と呼ぶことにする．本論文では体系として自然演繹を用い，自然演繹の規則のみを用いて構成された導出図のことを**体系内証明**とする．体系内証明も，論理式がツリー状に配置された対象であるため，論証に含まれる．なお，自然演繹では各論理結合子に対して導入則と除去則という二つの規則が与えら

[2] 正確には，プラウィッツは論理式がツリー状に配置された対象のことを論証骨格 (argument skeleton) と呼び，論証骨格と正当化手続きをあわせたものを論証と呼ぶ（Prawitz 1973；Prawitz 2006）．しかし，近年の PTS の研究では正当化手続きに言及されないことも多く，本論文でも話を明確にするため，論証の概念から正当化手続きを省くこととする．

れている．例えば，論理結合子「→」に対しては以下の二つの規則が与えられる (左が導入則，右が除去則).

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]_m \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ (\to I)_m \qquad \dfrac{A \quad A \to B}{B}\ (\to E)$$

導入則では結論部分に，また除去則では前提部分に，その論理結合子を主結合子とした複合文が現れる．除去則の前提のうち，論理結合子を含むものを**大前提**，論理結合子を含まないものを**小前提**と呼ぶ[3]．「→」の除去則であれば,「$A \to B$」が大前提,「A」が小前提である．「∧」の除去則など，小前提を持たない除去則も存在する．

2.3 簡約と正規化

BHK 解釈と並んで，PTS のアイデアの源泉となるのが**簡約** (reduction) と**正規化** (normalization) という体系内証明に対する操作である．簡約と正規化を理解するうえで肝要なのが**反転原理** (inversion principle) と呼ばれる原理である．反転原理はプラウィッツ（Prawitz [1965]2006）が定式化した原理である．以下ではまず反転原理の説明を行う．

プラウィッツはまず初めに, 各論理定項を主結合子として持つ複合文を演繹するための十分条件を, それぞれの論理定項に対して以下のように与えた（Prawitz [1965]2006, p.32）.

- 「$A \wedge B$」を (Γ から) 演繹するためには，(Γ から)「A」の演繹と，(Γ から)「B」の演繹の両方があれば十分である
- 「$A \vee B$」を (Γ から) 演繹するためには，(Γ から)「A」の演繹か，(Γ から)「B」の演繹のいずれかがあれば十分である
- 「$A \to B$」を (Γ から) 演繹するためには,「A」から (もしくは Γ に含まれるすべての論理式と「A」から)「B」への演繹があれば十分である

この十分条件を踏まえて，プラウィッツは反転原理を以下のように定式化した．

> α を B を結論として持つような除去則の適用だとしよう．すると (上記のリストにある) 十分条件を満たす，α の大前提を導出するための演繹は，(もしあれ

[3] ここでの用語の定義はプラウィッツ（Prawitz [1965]2006, pp.32-33）に従っている．

ば) α の小前提の演繹と結びつけられたとき，すでに B の演繹を「含んでいる」. ゆえに，B の演繹は，α を加えることなしに与えられた演繹から直接得ることができる．（Prawitz [1965]2006, p.33）

反転原理の内容を，以下の体系内証明を例として具体的に説明しよう．

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]_1\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,(\to I)_1}{B}\,(\to E)$$

ただし，Π_1 は任意の体系内証明である．反転原理では除去則の適用が問題になるので，上の証明の最後の「→」の除去則の適用を「α」と考えればよい．よって，「α」の結論は「B」である．上記の論証においては「$A \to B$」が大前提であるため，「α」の大前提を導出するための演繹とは「A」から Π_2 を経由し，「B」に至る体系内証明だということになる．この演繹は，上記のリストにおける「→」についての十分条件を満たしている．このことから，反転原理に従えば，「A」から Π_2 を経由し「B」にいたる体系内証明は，小前提「A」の演繹と結びつけられたとき，すでに「B」の演繹を「含んでいる」わけであり，最後の「→」の除去則の適用は必要ないことになる．そして実際「→」の除去則の適用は以下のような変形により消去される．

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]_1\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,(\to I)_1}{B}\,(\to E) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\Pi_1\\ A\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}$$

なお，この際用いた仮定の数は減ることはあっても増えることはなく，仮定の中身は変化しない．

このように，ある除去則の適用に関して，その大前提の演繹が上記のリストにある十分条件を満たしている場合，その除去則の適用は必要ない．このことから分かるのは，ある除去則の適用について，その大前提の演繹が十分条件を満たしているならば，その適用は論証において不必要なステップであるということである．より具体的に言うならば，導入則の直後に除去則が使われている場合，その除去則の適用は不必要なものである．導入則の適用の後に同じ結合子の除去則が適用されている部分を**局所的ピーク**と呼ぶ．局所的ピークを消去し，体系内証明における不必要な部分を取り除く

操作を**簡約 reduction** と呼ぶ[4]．簡約を有限回用いることで，体系内証明におけるすべての局所的ピークを取り除く操作を**正規化 normalization** と呼ぶ．

2.4 自己正当化的な規則

ここまで PTS の基盤となる BHK 解釈と，簡約と正規化という操作を説明してきた，続いて PTS の基本方針を確認しておく．先述した通り，PTS では証明から文の意味を捉える．そして証明概念を定めるためには妥当性の概念が必要なのであった．しかしながら，ある規則を正当化するためには当然別の規則に訴えねばならない．そのため，有限個の規則から規則の正当化を可能にするためには，他の規則による正当化を必要としない，いわば**自己正当化的** (self-justifying) な規則が必要だということになる．PTS においては，一般的にこのような規則として，自然演繹における各論理結合子の導入則が採用される．つまり PTS においては，自然演繹の導入則を自己正当化的な規則と定めた上で，ツリー状に配置された任意の対象である論証の正当化を試みる，ということになる．このような PTS の基本方針は，ゲンツェンによる以下の洞察に影響を受けている．

> 導入則は，それ自体，当該の記号の「定義」を構成している．そして，除去則は，最終的な分析においては，これらの定義の帰結に過ぎない（Gentzen [1935]1969, p.80）

ゲンツェンのこの洞察を例を出して考えてみよう．論理結合子「∧」の導入則は以下のような規則である

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

この規則は,「A」と「B」の両方を確立していれば,「$A \wedge B$」の両方を確立することができる，というものである．ゲンツェンによれば，この規則は論理結合子「∧」の定義を構成している．導入則は論理結合子「∧」に関する規則であるだけでなく,「∧」そのものの定義を表すものであるから，他の「∧」に関する規則に先立つものとしての地位

[4] 基本的には局所的ピークを取り除くことで，体系内証明の中の不必要な部分は取り除かれるが，例外もある．デ・グルート（de Groote 2002）は局所的ピークが存在しないが，不必要なステップを持つ体系内証明を示している．デ・グルートによれば，このような体系内証明に対しては，規則の適用の順番の入れ替えを行うことで，局所的ピークを作り出し，簡約を行うことが可能である．規則の適用の順番を入れ替えることで，局所的ピークを作り出す操作は，型付きラムダ計算における，permutation-conversion と呼ばれる操作に対応している（de Groote 2002, pp.444-445）．

を与えられる.

このように,ゲンツェンは自然演繹の導入則が当の論理結合子の定義を表すと考え,除去則に対して優位性をもつと示唆した.このようなゲンツェンの示唆に基づき,一般的な PTS では自然演繹の導入則が自己正当化的な規則とみなされる.なお,PTS では論証の最後のステップが導入則の適用で終わっている論証のことを**カノニカル形式の論証** (canonical argument) と呼ぶ.換言すれば,カノニカル形式の論証とは,その最後のステップが自己正当化的な規則の適用である論証である.

§3 原子ベースの解釈とその帰結

本節では,原子ベースに関する議論を扱う.原子ベースは,PTS において妥当性を定める上で重要な役割を果たす.**原子ベース** (atomic base) とは,いわば原子文同士の推論関係を定める体系のことである.原子ベースに対しては,それを知識の状況とする解釈と,原子文の定義とする解釈の二通りが存在する[5].いずれの解釈をとるかにより,原子ベースの構成において相違点が生じる.より詳細に述べるならば,これは原子ベースにおいて正当化される規則の面での相違点である.この点については 3.1 節と 3.2 節で扱う.また,原子ベースの解釈の相違は,PTS における様々な議論に影響を与える.本論文では,PTS における妥当性の定式化と,単調性と原子完全性の成立・不成立に及ぼす影響について,3.3 節から 3.5 節で説明する.

3.1 知識の状況としての原子ベース解釈

知識の状況としての原子ベースの解釈は, PTS を提案した際のプラウィッツ(Prawitz 1971)やシュレーダー=ハイスター (Schroeder-Heister 2006)において採用されている解釈である[6].知識の状況として原子ベースを解釈する場合,**原子ベース** (atomic base) とは原子規則からなる体系のことを指す[7].**原子規則** (atomic rule) とは以下のよ

[5] 知識の状況としての原子ベースの解釈は,理想的な数学者の活動として解釈されることの多い,直観主義論理のクリプキモデルと類比的である (van Dalen 2013, p.164),(Piecha 2016, Section 5.6),(Piecha and Schroeder-Heister 2016, Section 2.3).

[6] なお,プラウィッツ (Prawitz 1971)はハイティング (Heyting [1956]1971)による論理定項の説明を参考にしたと述べている.

[7] プラウィッツ (Prawitz 1973)は「記述定項 (descriptive constant)」の集合と原子規則の集合を原子ベースと呼んでいる. 記述定項とは一階述語論理の構文論におけるパラメータに似た役割を果たすものであるので,命題論理に議論を限る本論文では記述定項への言及は割愛する.

うな形式を持つ規則である ($p_1, ..., p_n, q$ はいずれも原子文).

$$\frac{p_1 \cdots p_n}{q}$$

原子規則とは有限個の原子文から単一の原子文を導く規則である．また，$p_1, \ldots, p_n$ が空な場合，その原子規則は**原子公理** (atomic axiom) となる．原子公理においては，結論部にある原子文は前提無しで導出可能である．原子文同士の導出関係は原子ベースにより決定される．また，原子ベース S に含まれる全ての原子規則を含んでいる原子ベース S' のことを，原子ベース S の**拡張**と呼ぶ．原子ベース S それ自体も，原子ベース S の拡張の一つであることに注意されたい．

なお，PTS においては原子規則は結論部分の原子文の導入則として理解される．論理結合子の導入則と同様，結論部分の原子文 q を導出するための前提 $p_1, \ldots, p_n$ を，原子規則が示しているからである．そのため，PTS において妥当性を定める際，原子規則も 2.4 節で述べた自己正当化的な規則として扱われる．ただし，自然演繹の導入則がいかなる原子ベース S においても自己正当化的な規則であるのに対し，原子規則はその規則が属する原子ベース S において自己正当化的な規則とみなされる点には注意されたい．知識の状況として原子ベースを解釈する場合，原子ベースに含まれる規則はすべて自己正当化的な規則だということになる．

3.2 原子文の定義としての原子ベース解釈

原子文の定義としての原子ベースの解釈は，一般的ではないものの，プラウィッツは近年の著作でこの解釈を支持する意見を述べている[8]（Prawitz 2016, 脚注 12）．原子文の定義としての原子ベースの解釈は，PTS の扱う領域の拡張と考えることができる[9]．先述したように，PTS では文の意味はその証明から与えられる．文は論理結合子から構成される．論理結合子の導入則は自己正当化的とみなされ，それ以外の規則は導入則から正当化される．このことからわかるように，PTS では文に意味を与える際，論理結合子に焦点を当てるのが一般的である．定義として原子ベースを捉える解

[8] 定義として原子ベースを解釈する場合，高階の原子ベースを考えることがあるが，本論文では知識の状況としての原子ベースの解釈との比較を明確にするため，高階の原子ベースについては扱わない．高階の原子ベースについては，（Piecha and Schroeder-Heister 2016；Piecha and Schroeder-Heister 2017）を参照.

[9] 定義としての原子ベース解釈に関する説明は（Piecha and Schroeder-Heister 2016；Piecha and Schroeder-Heister 2017；Schroeder-Heister 2018；Hallnäs and Schroeder-Heister 1991）を参考にした.

釈は，原子文においても同様のアプローチを行おうという試みである[10]．このことから，定義として原子ベースを解釈する場合，3.1 節で提示した原子規則が自己正当化的な規則と捉えられ，そこから別の規則が正当化され，原子ベースに加えられる[11]．

以下では，いかなる規則が正当化されたものとして加えられるのかを説明しよう．この規則は（Hallnäs 1991；Hallnäs and Schroeder-Heister 1990；Hallnäs and Schroeder-Heister 1991；Schroeder-Heister 1993）などにおいて提案されたものである.[12]．この規則を説明するために，以下の原子規則からなる原子ベース S_1 を考えよう $((qI_1), (qI_2), (rI), (sI)$ はいずれも原子規則の名前である．また，Prop=$\{p, q, r, s, t\})$.

$$\frac{p \quad s}{q}\ (qI_1) \quad \frac{t}{q}\ (qI_2) \quad \frac{t}{r}\ (rI_1) \quad \frac{s}{s}\ (sI_1)$$

この原子ベース S_1 においては，以下の規則が正当化される．

$$\frac{q \quad \begin{matrix}[p, s]_m \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[t]_n \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ (qE)_{m,n} \quad \frac{r \quad \begin{matrix}[t]_m \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ (rE)_m \quad \frac{s \quad \begin{matrix}[s]_m \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ (sE)_m \quad \frac{t}{C}\ (tE)$$

この規則を以下では**反映規則**と呼ぶことにする．q を前提として持つ反映規則を考えよう．原子ベース S_1 は定義を表すから，q の導出のための条件は p かつ s と t 以外何もない．そのため，p かつ s と t から論理式 C を導出できる場合，q のみを前提として C を導出可能である．これが定義として原子ベースを解釈する場合に，反映規則が

[10] シュレーダー＝ハイスター（Schroeder-Heister 2018）は，原子文同士の推論関係に着目した初期の研究として，（Lorenzen [1955]1969；Martin-Löf 1971）をあげている．

[11] 知識の状況としての原子ベース解釈と，原子文の定義としての原子ベース解釈の中間もあるように思われるかもしれない．例えば，カルナップの述べた「部分的定義」に類似したものとして，原子ベースを解釈する場合，原子ベースは原子文の意味を与えるが，原子文の意味全体を与えるわけではない，ということになろう．しかし，このような解釈は通常考慮されない．PTS においては，ある概念に対する規則が変化することは，その概念が異なるものになったことを意味するとみなされるからである．2.4 節で述べたように，論理結合子「∧」の意味は「∧」の導入則により定義されており，それ以外に「∧」を主結合子とする文を導く規則が存在する場合，それは「∧」の概念が変化したと理解される．原子文の意味は原子規則により全体として定義されるため，部分的な定義の可能性は与えられていない．なお，部分的定義に関しては（Carnap [1950]2003；中村 1967）を参考にした．

[12] なお，プラウィッツ（Prawitz 2016）は先述した通り，原子文の定義を表すものとして原子ベースを解釈するが，原子文のみを含む論証の集合を原子ベースと呼ぶという方法をとるため，この規則を扱ってはいない．

正当化される理由である．なお，S_1 においては以下の二つの論証が構成可能である．

$$\dfrac{(p \wedge s) \vee t \qquad \dfrac{\dfrac{[p \wedge s]_1}{p}\,(\wedge E) \quad \dfrac{[p \wedge s]_1}{s}\,(\wedge E)}{q}\,(qI_1) \qquad \dfrac{[t]_2}{q}\,(qI_2)}{q}\,(\vee E)_{1,2}$$

$$\dfrac{q \qquad \dfrac{\dfrac{[p]_1 \quad [s]_1}{p \wedge s}\,(\wedge I)}{(p \wedge s) \vee t}\,(\vee I) \qquad \dfrac{[t]_2}{(p \wedge s) \vee t}\,(\vee I)}{(p \wedge s) \vee t}\,(qE)_{1,2}$$

この二つの論証からわかるように，反映規則により q と $(p \wedge s) \vee t$ が相互に導出可能となる．同様に，反映規則により，r から t を導出することも可能である．また，t を前提として持つ反映規則については，t を結論として持つ原子規則が原子ベース S_1 には含まれていないので，t からは任意の論理式が導出可能である[13]．

先述したように，原子規則は自己正当化的であり，論理結合子における導入則と類比的である．一方，反映規則は原子文を前提として用いた場合に結論として何を導出できるかを定めるものであり，その意味で論理結合子の除去則と類比的である．原子ベース S において，反映規則が原子規則により正当化されるということは，除去則が導入則から正当化されるという事実に対応している．

3.3 妥当性

本節では，原子ベースの解釈の相違が，PTS の定める妥当性の定式化にどのような影響を及ぼすかを説明する．まずは知識の状況として解釈した場合の枠組みを示す．

この枠組みは若干の相違点はあるものの，プラウィッツ（Prawitz 1973；Prawitz 2006；Prawitz 2014）が与えたものである[14]．論証に対する妥当性の枠組みは，以下のように原子ベース S に相対的に与えられる．

[13] 原子ベースと直観主義論理の規則からなる体系であれば，この反映規則の結論部分を原子文に制限しても体系内での証明能力は変わらない．これは「⊥」の規則の適用を原子文に制限する議論と類似の議論である．

[14] ここでの若干の相違点とは，脚注 2 で述べたように，プラウィッツが論証と正当化手続きをあわせたものに対して妥当性を定めていることに起因する．プラウィッツ（Prawitz 2006, pp.517-519）は，論証のみに対して妥当性を定める場合の定式化を，ダメットの妥当性の定式化を修正するという形で与えている．本論文でのここでの定式化はこの記述を参考にしているが，この記述には原子ベースに対する明確な言及がなかったため，原子ベースに言及する定式化へと再構成した．その際，ピエチャ（Piecha 2016, p.234）による定式化を参考にした．

(1) カノニカル形式の閉じた論証が，ある原子ベース S において**妥当である**のは，最後に適用された導入則の前提を結論として持つようなすべての部分論証が，その原子ベース S において妥当であるとき，かつそのときに限る

(2) カノニカル形式ではない閉じた論証が，ある原子ベース S において**妥当である**のは，その論証を，カノニカル形式の，原子ベース S における妥当な論証に還元できるとき，かつそのときに限る

(3) 開いた論証が，ある原子ベース S において**妥当である**のは，ある手続きが存在し，その手続きを実行することで，当の論証の開いた仮定の部分に，原子ベース S の任意の拡張 S' における，いかなる閉じた妥当な論証を代入したとしても，代入後の論証を原子ベース S' において妥当なカノニカル形式の論証に変形することができるとき，かつそのときに限る．

ある論証の，原子ベース S における妥当性の判定は (1) から (3) を適宜参照することでなされる．具体的に，原子規則を持たない空な原子ベース S_0 において，以下の論証の妥当性を判定するとしよう．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]_1 \quad [p]_1}{p \wedge p}\,(\wedge I)}{p}\,(\wedge E)}{p \to p}\,(\to I)_1$$

この論証の結論は「$p \to p$」という自明に成り立つものであり，論証中で自然演繹の規則のみが用いられているため，この論証は S_0 において妥当と判定されるべきであろう．以下が妥当性の判定のプロセスである．この論証は閉じており，最後のステップが「→」の導入則の適用となっているので，カノニカル形式の論証である．よって (1) より，この論証が S_0 で妥当であるためには,「→」の導入則の前提となっている p を結論として持つ，以下の部分論証が S_0 で妥当であればよい．

$$\dfrac{\dfrac{p \quad p}{p \wedge p}\,(\wedge I)}{p}\,(\wedge E)$$

これは開いた論証である．よって，(3) に従って S_0 における妥当性は判定される．原子ベース S_0 の拡張として，p を原子公理として加えた原子ベース S_0' を考えよう．p を結論として持つ，S_0' における閉じた妥当な論証を代入することで，以下の論証が得

られる．

$$\dfrac{\dfrac{\overline{p} \quad \overline{p}}{p \wedge p}\ (\wedge I)}{p}\ (\wedge E)$$

(3) より，この論証を S_0' において妥当なカノニカル形式の論証に変形する手続きがあれば，元の開いた論証は S_0 において妥当である．妥当なカノニカル形式の論証への変形手続きという (3) におけるこの条件は，閉じたカノニカル形式ではない論証が妥当であるための，(2) で示された条件から要請されている．この論証の，カノニカル形式の論証への変形は以下のようになされる．

$$\dfrac{\dfrac{\overline{p} \quad \overline{p}}{p \wedge p}\ (\wedge I)}{p}\ (\wedge E) \rightsquigarrow \overline{p}$$

変形後の論証は閉じたカノニカル形式の論証であり，S_0' に含まれる原子規則しか用いられていないので，S_0' で妥当である．よって，S_0' において妥当なカノニカル形式の論証への変形手続きが存在するので，元の開いた論証は S_0 において妥当であり，最初に提示した論証全体も S_0 において妥当である．

なお，(3) において開いた論証の妥当性を判定する際，開いた仮定に対する代入を考えるのは，開いた論証をシェマとして捉えることに起因する．例えば，以下のような論証を考えよう．

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

この論証は，A と $A \to B$ を導く妥当な論証が構成された場合，それがいかなる論証であれ，B を導く妥当な論証が構成できる，ということを示していると考えられる．すると，この論証が妥当であるかどうかは，A と $A \to B$ を導く妥当な論証の実例を用いることで判定されるべきであろう．このことから，開いた論証に対してはその実例を与えるため，代入が行われる．

知識の状況としての原子ベースの解釈の特徴は，(3) において論証中の開いた仮定に，原子ベース S における閉じた妥当な論証ではなく，原子ベース S の拡張 S' における閉じた論証を代入するという点である．ある開いた論証の妥当性を判定する際，現在の知識の状況では，論証中の開いた仮定に対する証明は与えられていないかもしれない．しかし，論証が妥当であるためには，知識が拡張しその仮定に対する証明が与えられた場合，その証明を仮定に結合することで得られる論証が，進んだ知識の状

況において妥当でなければならない．このような考察に基づいて，原子ベース S の拡張が (3) では考慮される[15].

一方，原子文の定義として原子ベースを解釈する場合，開いた論証の妥当性を定める際，(3) の代わりに以下の (3′) が採用される．

(3′) 開いた論証が，ある原子ベース S において**妥当である**のは，ある手続きが存在し，その手続きを実行することで，当の論証の開いた仮定の部分に，原子ベース S におけるいかなる閉じた妥当な論証を代入したとしても，代入後の論証を原子ベース S において妥当なカノニカル形式の論証に変形することができるとき，かつそのときに限る．

(3) においては，原子ベースの拡張は考慮されていない．先述した通り，定義を与えるものとしての原子ベースの解釈は，規則が文の定義を与えるという考え方に基づいている．原子規則が変化するということは，原子ベースに含まれる原子文の定義が変化したということを意味する[16]．ゆえに，原子ベース S における妥当性を考える際，S 以外の原子ベースを参照することはない [17].

しかし，(3) の代わりに (3′) が採用された場合，妥当性のための条件が緩くなってしまうという問題が生じる．(3′) に従うと，論証中の開いた仮定を結論として持つ原子ベース S において妥当な論証を与えることができない場合，開いた論証は自明に妥当だということになる．このような理由からも，知識の状況として原子ベースを捉える解釈の方が PTS において一般的である．

なお，2.3 節で説明した簡約という操作は直観主義論理の自然演繹の規則に対するものであったが，ここでの簡約という操作は直観主義論理の自然演繹の規則に加えて，原子ベース S に含まれる原子規則を含んだ体系に対して実行されるという点に注意されたい．その際，3.1 節で述べたように原子規則も自己正当化的な規則とみなされ，自然演繹の導入則と同様に扱われる．また直観主義論理の自然演繹の除去則はいかなる

[15] このような考察は，理想的な数学者の活動として解釈されることの多い，直観主義論理のクリプキモデルとも共通点がある（van Dalen 2013, p.164），（Piecha 2016, Section 5.6），（Piecha and Schroeder-Heister 2016, Section 2.3）．

[16] この点については脚注 11 を参照．

[17] 科学的実践の場面などにおいては，新しい概念が定義を与えられ導入されることは珍しいことではなく，そのため定義として原子ベースを解釈する場合でも，拡張を考えるべきだと思われるかもしれない．しかし原子ベースを与える際，構文論を定めることで扱う原子文を限定しているため，このような場面は議論の対象外である．

原子ベース S においても簡約可能であるため，任意の原子ベース S において，正当化される規則である．

3.4 単調性

本項では原子ベースの単調性の議論において，二つの解釈が持つ相違点を説明しよう．原子ベース S の**単調性** (monotonicity) とは以下のような性質である．

(単調性) ある原子ベース S において妥当な論証は，その原子ベース S の任意の拡張 S' においても妥当である

これはすなわち，一度妥当となった論証が，その原子ベースの拡張において妥当でなくなることがない，という性質である．知識の状況として原子ベースを解釈する場合，この性質は問題なく成り立つ．これは論証の仮定と結論の複雑度に関する帰納法で示される（大西 2012, pp.45-47）．

一方で，定義として原子ベースを解釈する場合，単調性は成り立たない（Piecha and Schroeder-Heister 2016, Section 2.4.3）．反例をあげるため，3.2 節で例として用いた原子ベース S_1 を再び例として用いる．S_1 は以下の二つの規則を含んでいた．

$$\frac{t}{q}\ (qI_2) \qquad \frac{r \quad \begin{matrix}[t]_m \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ (rE)_m$$

S_1 においては，前提 r から結論 q を導く以下のような妥当な論証を構成可能である．

$$\frac{r \quad \dfrac{[t]_1}{q}\ (qI_2)}{q}\ (rE)_1$$

ここで，原子ベース S_1 に以下の原子規則を加えた，拡張 S'_1 を考えよう．

$$\frac{s}{r}\ (rI_2)$$

この規則の存在により，S'_1 における，r を前提として持つ反映規則は以下のものとなる．

$$\frac{r \quad \begin{matrix}[t]_m \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[s]_n \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ (rE')_{m,n}$$

このように反映規則が変化し，s のみから q を導出することは不可能であるため，先ほどの論証の中の反映規則を使ったステップは正当化されない．よって，前提 r から結論 q を導出する先ほどの論証は妥当なものではなくなる．このことから分かるように，反映規則により原子ベースの単調性は保たれないものとなる．

3.5 原子健全性・原子完全性

続いて，**原子健全性** (atomic soundness) と**原子完全性** (atomic completeness) という観点から，二つの解釈の相違点を理解することにする．序論で PTS の完全性についての議論が近年盛んであると述べたが，原子健全性・原子完全性についての議論はこの一部である．知識の解釈として原子ベースを解釈する場合，原子健全性と原子完全性は成立する．一方，原子文の定義として原子ベースを解釈する場合，原子健全性と原子完全性の成立は困難なものになる．なお，これ以降原子規則のみからなる原子ベースを S，反映規則も含んだ原子ベースを $S + ref(S)$ とし，知識の状況としての解釈における妥当性を**妥当性 1**，原子文の定義としての解釈における妥当性を**妥当性 2** と呼ぶ．以下ではまず知識の状況として原子ベースを解釈する場合を考える．

3.5.1 知識の状況として原子ベースを解釈する場合

命題 1. （Piecha and Schroeder-Heister 2016, Section 2.2.4, p.54） 直観主義論理＋ S は妥当性 1 に対して原子健全である，すなわち

> 原子ベース S 中の原子規則と直観主義論理の自然演繹の規則のみを用いて構成された，原子文のある集合 $p_1, \ldots, p_n$ を仮定として持ち，原子文 q を結論として持つ論証は，原子ベース S において妥当な論証である[18]．

証明. ある原子ベース S における，S 中の規則と直観主義論理自然演繹の規則のみから構成された，原子文 $p_1, \ldots, p_n$ を仮定として持ち，原子文 q を結論として持つ，以下のような論証を考える．

$$\begin{array}{c} p_1 \ldots p_n \\ \Pi \\ q \end{array}$$

[18] 以下の命題 1 から命題 3 とそれに付随する証明は基本的にはピエチャとシュレーダー＝ハイスター（Piecha and Schroeder-Heister 2016；Piecha and Schroeder-Heister 2017）により与えられたものだが，そこでは帰結関係に対して妥当性が定められており，そのため本論文とは異なる妥当性が用いられている．ゆえに，命題 1 から命題 3 とその証明はピエチャとシュレーダー＝ハイスターが与えたものを再構成したものである．

Π で適用されている規則は S 中の原子規則，もしくは直観主義論理の自然演繹の規則である．目標は，この論証が S において妥当と示すことである．これは開いた論証であるため，S の任意の拡張 S' を考え，$p_1,\dots p_n$ をそれぞれ結論として持つ，S' における任意の閉じた妥当な論証 $\Omega_1,\dots,\Omega_n$ を $p_1,\dots,p_n$ に代入する．

$$\begin{array}{c} \Omega_1 \quad\ \ \Omega_n \\ p_1 \ \dots\ p_n \\ \Pi \\ q \end{array}$$

この論証全体が S' で妥当であると示せばよい．$\Omega_1,\dots,\Omega_n$ はそもそも原子ベース S' において妥当な閉じた論証であるため，Π の部分が S' において妥当であると示せばよい．Π で用いられているのは S 中の原子規則か直観主義論理の自然演繹の規則である．そして用いられている原子規則は S に含まれているものであるため，S の拡張 S' にも含まれている．よって，Π の部分を変形することで，カノニカル形式の S' において妥当な論証が得られる．ゆえに 3.3 節の (2) より Π の部分は S' において妥当であり，3.3 節の (3) より，元の論証も S において妥当である □

また，以下の命題も成立する．

命題 2. （Piecha and Schroeder-Heister 2016, Section 2.2.4, p.54） 直観主義論理＋ S は妥当性 1 に対して原子完全である，すなわち

> 原子文のある集合 $p_1,\dots,p_n$ を仮定として持ち，ある原子文 q を結論として持つ論証が，原子ベース S において妥当であるならば，同じ仮定と結論を持ち，原子ベース S に含まれる原子規則と直観主義論理の自然演繹の規則のみを用いた論証に変形可能である．

証明. ある原子ベース S において，原子文の集合 $p_1,\dots,p_n$ を仮定として持ち，原子文 q を結論として持つ，S において妥当な論証を考えよう．

$$\begin{array}{c} p_1 \ \dots\ p_n \\ \Pi \\ q \end{array}$$

この論証は S において妥当であるため 3.3 節の (3) より，$p_1,\dots,p_n$ を結論として持つ，S の任意の拡張 S' における，閉じた妥当な論証を，元の開いた論証の仮定 $p_1,\dots,p_n$ に代入した場合，論証全体は S' において妥当となる．ここで，$p_1,\dots,p_n$ のそれぞれを原子公理として加えた S の拡張 S' を考えよう．すると，論証は以下のように変形

可能である．

$$\begin{array}{c}\overline{p_1}\ \cdots\ \overline{p_n}\\ \Pi\\ q\end{array}$$

目標は，この論証が $p_1, \ldots, p_n$ を仮定として持ち，q を結論として持つ，S に含まれる規則と直観主義論理の自然演繹の規則のみを用いた論証へと変形可能であると示すことである．この論証は S' において妥当であるため，3.3 節の (2) より S' において妥当な閉じたカノニカル形式の論証 Π' が得られる．

$$\begin{array}{c}\overline{p_1}\ \cdots\ \overline{p_n}\\ \Pi'\\ q\end{array}$$

Π' において用いられているのは S' に含まれる原子規則か直観主義論理の自然演繹の導入則である．しかし，S' は S に $p_1, \ldots p_n$ を結論として持つ原子公理を加えただけなので，Π' で用いられている原子規則はすべて S に含まれている．よって，この論証においては S に含まれる原子規則と直観主義論理の自然演繹の導入則しか用いられていない．S を拡張する際に S' に加えられた原子公理によって，この論証は閉じたものになっているだけなので，この論証の仮定部分を開けば，$p_1, \ldots, p_n$ を仮定として持ち，q を結論として持つ，S に含まれる規則と直観主義の自然演繹の導入則のみを用いた論証が得られる．よって目標は示された．□

命題 1 と命題 2 から，知識の状況として原子ベースを解釈する場合，原子健全性と原子完全性のいずれも成り立つ．

3.5.2　定義として原子ベースを解釈する場合

妥当性 2 では，原子ベース S において正当化された規則として，S に含まれる反映規則が加えられ，原子ベース S の拡張は考慮されない．

命題 3.（Piecha and Schroeder-Heister 2016, Section 2.4.4, Case2）直観主義論理 $+S+ref(S)$ は妥当性 2 に対して原子完全ではない，すなわち

> 原子文のある集合 $p_1, \ldots, p_n$ を仮定として持ち，ある原子文 q を結論として持つ論証が，原子ベース S において妥当であるとしても，同じ仮定と結論を持ち，原子ベース S に含まれる原子規則と反映規則，直観主義論理の自然演繹の規則のみを用いた論証に変形可能だとは限らない．

証明. 反例をあげることにする．再び 3.2 節と 3.4 節で用いた原子ベース S_1 を用いよう．原子ベース S_1 において以下の論証が妥当かどうかを判定する．

$$\frac{s}{t}$$

この論証は S_1 において妥当となる．S_1 には s を前提として持つ規則として，(sI_1) と (sE) が含まれている．しかし，(sI_1) は s から s を導出可能という規則であり，(sE) は s から C を導出可能ならば，s から C を導出可能である，という規則であるため，いずれも実質的に無意味な規則である．よって S_1 において妥当な，s を結論として持つ妥当な論証を構成することはできない．よって，論証全体は S_1 において妥当である．しかし，先述した通り，S_1 には s を前提として持つものとして，無意味な規則しか含まれていないので，この論証を原子規則と反映規則，直観主義論理の自然演繹の規則のみを用いた論証に変形することはできない． □

以上より，原子完全性は成立しない[19]．

§4　論理的妥当性と完全性

4.1　健全性とプラウィッツの予想

本節では，知識の状況として原子ベースを解釈した場合の完全性について考察することにする．よってここでは妥当性 1 を扱う．なお，ここからの議論は仮定や結論を原子文に限定するものではない．また，先述した通り，直観主義論理の自然演繹の規則はいかなる原子ベースにおいても妥当なものとして認められるため，一般的に直観主義論理の自然演繹と PTS の間の完全性を論じる際の妥当性概念は，原子ベースに相対的ではないものである．原子ベースに相対的ではない妥当性を**論理的妥当性** (logical validity) と呼ぶ（Prawitz 2006）．ある論証が**論理的妥当である**のは，その論証がいかなる原子ベースにおいても妥当であるとき，かつそのときに限る (（Prawitz 2006, pp.515-516），（Piecha and Schroeder-Heister 2018）).

[19] 一方，原子健全性の成立，不成立は未解決問題のようである．ピエチャとシュレーダー＝ハイスター（Piecha and Schroeder-Heister 2017, pp.195-197）は高階の原子ベースにおいては，原子健全性が成立しないことを示しているが，規則の最後の適用を原子規則に絞れば原子健全性が成立すると述べている．しかしこの議論は高階の原子ベースにおけるものであるため，本論文での原子ベースの与え方には適用できない．また，シュレーダー＝ハイスター（Schroeder-Heister 1993, Theorem 2）は縮約規則抜きならば，シークエント計算に反映規則を加えた体系において，カット除去定理が成立すると述べている．

完全性の議論に入る前に，健全性について確認しておこう[20].

命題 4.（Piecha 2016, Definition 17,p242）,（Piecha, Sanz, and Schoroeder-Heister 2015, Definition 8） 直観主義論理は PTS に対して健全である．

証明. 3.3 節で述べた通り，直観主義論理の自然演繹の除去則はいかなる原子ベースにおいても簡約可能であるため，必ず正当化される．よって直観主義論理の自然演繹の体系内証明は全て PTS で論理的に妥当である． □

問題となるのは完全性の方である．プラウィッツ（Prawitz 1973）は直観主義論理と PTS の間で完全性が成り立つと予想した．彼は PTS において妥当な規則は全て，直観主義論理の自然演繹において導出可能であると予想したのである．次項ではこの**プラウィッツの予想** (Prawitz's conjecture) に基づいて完全性の議論を考察する．

4.2 導出可能な規則

完全性の反例となりうるのが，ハロップの規則と呼ばれる以下の規則である．

$$\frac{\neg A \to (B_1 \vee B_2)}{(\neg A \to B_1) \vee (\neg A \to B_2)}$$

ハロップの規則についての議論に入る前に，**導出可能な規則** (derivable rule) の定義を確認しておく．規則は以下のような形である．

$$\frac{A_1 \ldots A_n}{C}$$

この規則が**導出可能である**のは，$A_1, \ldots, A_n$ を仮定の集合とする，C を結論として持つ導出が存在するときである（Chagrov and Zakharyaschev 1997, pp.16-17）．ハロップの規則については，以下の命題が成立する．

命題 5. ハロップの規則は導出不可能な規則である

証明. もしもハロップの規則が導出可能な規則であれば，導出可能な規則の定義より，以下の論理式が直観主義論理で導出可能でなければならない．

$$(\neg A \to (B_1 \vee B_2)) \to ((\neg A \to B_1) \vee (\neg A \to B_2))$$

[20] 大西（大西 2012, p.52）によればこれは半ば自明である．

この論理式はクライゼルーパットナム論理式 (Kreisel-Putnam formula) と呼ばれ，導出不可能であると知られている．そのことは直観主義論理との間で健全性が成り立つクリプキモデルにおいて，この論理式を不成立にさせるモデルを構成できるという事実からも保証される（Chagrov and Zakharyaschev 1997, p.55）． □

4.3 ハロップの規則と論理的不完全性

本項では，上述のハロップの規則がいかにして完全性の反例となるかを示す．この規則が導出可能ではないことはすでに命題 5 で示したため，本項ではこの規則が PTS で妥当になることを示す．ハロップの規則の妥当性について論じる前に，必要な二つの性質を確認しておく．

一つ目の性質は**意味論的拡張選言性質**である．意味論的拡張選言性質は**選言性質** (disjunction property) と呼ばれる以下の性質に根を持つ．

(DP) $A \vee B$ が定理であるのは，A もしくは B が定理であるとき，かつそのときに限る．

選言性質は古典論理では成立しないが，直観主義論理では成立する（Aloni 2016, Section 2.1.1）．加えて，これを一般化した以下の性質も直観主義論理では成立する（Piecha and Schroeder-Heister 2018, Lemma 1.2.2）．

(EDP) Γ が論理結合子「$\vee$」を含まない論理式の有限集合であるとする．このとき仮定 Γ から $A \vee B$ が導出可能であるのは，Γ から A が導出可能か，もしくは Γ から B が導出可能であるとき，かつそのときに限る．

仮定の集合 Γ に含まれる論理式の種類は制限されてはいるものの，仮定からの導出に拡張した選言性質である．これを**拡張選言性質**と以下では呼ぶことにする．

意味論的拡張選言性質は拡張選言性質を意味論において以下のように再構成したものである（Piecha and Schroeder-Heister 2018, Section 2）．

(EDPV) Γ が論理結合子「$\vee$」を含まない論理式の有限集合であるとする．このとき．全ての原子ベース S について，仮定 Γ から $A \vee B$ への論証がある原子ベース S において妥当であるのは，Γ から A に至る論証がその原子ベース S において妥当か，もしくは Γ から B に至る論証がその原子ベース S において妥当であるとき，かつそのときに限る．

意味論的拡張選言性質が成立するかどうかは開かれた問いである．意味論的拡張選言性質が成立するかどうかという問題は，PTS における妥当性の定め方に依存するからである．

二つ目の必要な性質は，**選言除外性質**である．この性質を支えるのが以下の三つの事実である．

($\vee$) $\neg(C \vee D)$ から $\neg C \wedge \neg D$ が導出可能であり，逆もまた然りである
($\wedge$) $\neg(C \wedge D)$ から $\neg(\neg\neg C \wedge \neg\neg D)$ は導出可能であり，逆もまた然りである
($\to$) $\neg(C \to D)$ から $\neg\neg C \wedge \neg D$ は導出可能であり，逆もまた然りである

この三つの事実を用いることで，否定を主結合子として持つ文は，論理結合子「∨」を含まない形に変形することができる（Piecha and Schroeder-Heister 2018, Lemma 1.2.3）．この性質を本論文では**選言除外性質**と呼ぶ．

二つの必要な性質の説明が済んだため，ハロップの規則の妥当性について述べることにする．ピエチャとシュレーダーハイスター（Piecha and Schroeder-Heister 2018, Section 2）によれば，直観主義論理と PTS の間には，以下の命題が成立する[21]．

命題 6.（Piecha and Schroeder-Heister 2018, Lemma 2.1）意味論的拡張選言性質を認めた場合，ハロップの規則は論理的妥当である．

証明. ハロップの規則は以下のような論証であると見ることができる．

$$\frac{\neg A \to (B_1 \vee B_2)}{(\neg A \to B_1) \vee (\neg A \to B_2)}$$

任意の原子ベース S を固定しよう．この S において，この論証が妥当になることを示せばよい．すなわち，S の任意の拡張 S' における，$\neg A \to (B_1 \vee B_2)$ を結論として持つ，閉じた妥当な論証を代入したうえで，この論証全体が S' において妥当であると示せばよい．S' における閉じた妥当な論証 Π を代入することで，以下の論証が得られる．

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi\\ \neg A \to (B_1 \vee B_2)\end{array}}{(\neg A \to B_1) \vee (\neg A \to B_2)}$$

この論証が S' において妥当であると示せばよい．この論証の最後のステップは導入

---

[21] 脚注 18 で述べたように，ピエチャとシュレーダー＝ハイスターの与える妥当性は帰結関係に対して定めたものであるため，ここでは再構成を行っている．

則ではないから，この時点でこの論証が S' において妥当かどうかを判別することはできない．しかしながら，Π から $\neg A \to (B_1 \vee B_2)$ に至る論証は原子ベース S' において妥当な論証である．よって，Π から $\neg A \to (B_1 \vee B_2)$ に至る部分論証は以下のように変形できる (Π' は原子ベース S' における妥当な論証とする).

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]_1 \\ \Pi' \\ B_1 \vee B_2\end{array}}{\neg A \to (B_1 \vee B_2)}\ (\to I)_1$$

この論証より $\neg A$ から $B_1 \vee B_2$ に至る，原子ベース S' において妥当な部分論証の存在が保証される．選言除外性質により，$\neg A$ は論理結合子「$\vee$」を含まない形 A' に変形可能である．この事実から A' から $B_1 \vee B_2$ に至る，原子ベース S' において妥当な論証を得ることができる．この上で意味論的拡張選言性質を用いることで，先ほどの部分論証は以下の形にさらに変形される (Π'' は原子ベース S' における妥当な論証).

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A']_1 \\ \Pi'' \\ B_i\end{array}}{B_1 \vee B_2}}{A' \to (B_1 \vee B_2)}\ (\to I)_1$$

この論証では A' から B_i ($i = 1$ または 2) への導出があるので，以下の論証が得られる．

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A']_1 \\ \Pi'' \\ B_i\end{array}}{A' \to B_i}\ (\to I)_1$$

選言除外性質により，A' は $\neg A$ に変形可能である．よって，上述の論証から $\neg A \to B_i$ を結論として持つ，S' において妥当な論証を得ることができる．この論証に対して「$\vee$」の導入則を適用することで以下の論証が得られる (Π''' は原子ベース S' において妥当な論証).

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]_1 \\ \Pi''' \\ B_i\end{array}}{\neg A \to B_i}\ (\to I)_1}{(\neg A \to B_1) \vee (\neg A \to B_2)}\ (\vee I)$$

Π''' は原子ベース S' において妥当な論証であり，それ以外のステップで用いられているのは直観主義論理の自然演繹における導入則であるから，この論証は S' において妥当である．よって，元の論証も妥当である． □

このように，意味論的拡張選言性質を認めると PTS においてハロップの規則は論証として論理的妥当なものになる[22].

§5　結論

本論文では PTS の基本的な枠組みを説明したうえで，二種類の原子ベースの解釈について述べた．第 3 節で述べたように，いずれの解釈をとるかにより，原子ベースに含まれる規則や妥当性の定め方に変化が生じ，単調性，原子健全性・原子完全性において異なる帰結が得られることが知られている．一方で，二つの解釈により生じるこれらの相違点が，哲学的・論理学的にいかなる含意を持つのかについては十分に探究されていない．今後の PTS の研究ではこの点を明瞭にしていくことが求められるであろう．

また，PTS の定める論理的妥当性と直観主義論理における完全性について考える際に重要になるように思われるのが，**許容可能な規則** (admissible rule) の存在である．許容可能な規則とは，簡潔に言えば，規則として論理に加えても，加える前と比べて導出する論理式を増やさない規則である．定義上導出可能な規則は全て許容可能な規則である．古典論理においては導出可能な規則と許容可能な規則は一致する（Chagrov and Zakharyaschev 1997, pp.16-17）．一方，直観主義論理ではハロップの規則をはじめとして，許容可能であるが導出可能ではない規則が存在する[23]．4.3 節で反例として提示したハロップの規則は，PTS において論理的妥当と判定されるが，導出可能な規則では無かった．しかし，ハロップの規則が許容可能な規則であるという事実を鑑みると，PTS と許容可能な規則には何らかの関係がある可能性が高い．ゆえに，今後は PTS の定める論理的妥当性と許容可能な規則の関係性を明らかにすることが望まれる．

---

[22] 意味論的選言性質を認めるかどうかは，妥当性の定め方に関わってくるため，開かれた問いである．しかし，ピエチャとシュレーダー＝ハイスター（Piecha and Schroeder-Heister 2018, Lemma 2.2）によれば，直観主義論理と PTS の完全性を認めた上で，移出という原理を用いると，意味論的拡張選言性質は導かれる．つまり，移出は意味論的拡張選言性質を含意する．ゆえに，意味論的選言性質を拒否するためには移出を拒否せねばならない．しかし，移出は一般的な PTS の枠組みでは導出されてしまう（Piecha, Sanz, and Schoroeder-Heister 2015, Definition 5, Definiton 6, Lemma 2）．よって，少なくとも一般的な PTS と直観主義論理の間には完全性は成立しない．

[23] ハロップの規則が許容可能な規則であることは，拡張選言性質を用いることで示すことができる．またミンツ（Mints 1976）も別の反例を提示している．

参考文献

Aloni, Maria. 2016. Disjunction. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2016ed., Zalta, Edward N. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Carnap, Rudolf. [1950] 2003 年.「テスト可能性と意味」 永井成男訳『カルナップ哲学論集』 復刊版 永井成男・内田種臣編. 98–189 頁. 東京：紀伊國屋書店. ［原書：*Testability and meaning* 2nd edition. (Graduate Philosophy Club, Yale University)］[1936/1937]1950

Chagrov, Alexander and Zakharyaschev, Michael. 1997. *Modal Logic*. Clarendon Pr.

de Groote, Philippe. 2002. On the strong normalisation of intuitionistic natural deduction with permutation-conversions. *Information and Computation* 178: 441–464.

Gentzen, Gerhard. [1935]1969. Investigations into logical deduction. In *The collected papers of Gerhard Gentzen*, ed. Sazbo M. E., 68–131. North-Holland Publishing Company.

Gödel, Kurt. 1995. The present situation in the foundations of mathematics. In *Kurt Gödel Collected Works: Volume 3 Unpublished essays and lectures*, ed. Feferman, Solomon, Dawson Jr, John W, Goldfarb, Warren, Parsons, Charles, and Solovay, Robert M, 45–53. Oxford University Press.

Hallnäs, Lars. 1991. Partial inductive definitions. *Theoretical Computer Science* 87: 115–142.

Hallnäs, Lars and Schroeder-Heister, Peter. 1990. A proof-theoretic aprroach to logic programming: I. Clauses as rules. *Journal of Logic and Computation* 1: 261–283.

———. 1991. A proof-theoretic aprroach to logic programming: II. Programs as definitions. *Journal of Logic and Computation* 1: 635–660.

Heyting, Arend. [1956]1971. *Intuitionism, an introduction*. 3rd edition. North-Holland Publishing Company.

Litland, Jon. 2011. Proof-Thoretic justification of logic. (Unpublished)

Lorenzen, Paul. [1955]1969. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. 2nd edition. Berlin: Springer.

Martin-Löf, Per. 1971. Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 63: 179–216.

Mints, Grigori. 1976. Derivability of admissible rules. *Journal of Soviet Mathematics* 6: 417–421.

Piecha, Thomas. 2016. Completeness in Proof-Theoretic Semantics. In *Advances in Proof-Theoretic Semantics (Trends in Logic)*, ed. Piecha, Thomas and Schroeder-Heister, Peter, 231–251. Springer, Cham.

Piecha, Thomas, Sanz, Wagner de Campos, and Schoroeder-Heister, Peter. 2015. Failure of completeness in Proof-Theoretic Semantics. *Journal of Philosophical Logic* 44: 321–335.

Piecha, Thomas and Schroeder-Heister, Peter. 2016. Atomic systems in Proof-Theoretic Semantics: Two approaches. In *Epistemology, Knowledge and the Impact of Interaction (Logic, Epistemology, and the Unity of Science book series)*, ed. Redmond, Juan, Martins, Olga Pombo, and Fernandez, Angel Nepomuceno, 47–62. Springer, Cham.

———. 2017. The definitional view of atomic systems in Proof-Theoretic Semantics. In *The Logica Yearbook*, ed. Arazim, Pavel and Lavicka, Tomas, 185–200. College Publications.

———. 2018. Incompleteness of intuitionistic propositional logic with respect to Proof-Theoretic Semantics. *Studia Logica* 107: 233–246.

Prawitz, Dag. 1971. Ideas and results in proof theory. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 63: 235–307.

———. 1973. Towards a foundation of a general proof theory. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 74: 225–250.

———. 2006. Meaning approached via proofs. *Synthese* 148: 507–524.

———. [1965]2006. *Natural deduction: A Proof- Theoretical study*. Dover Publications.

———. 2014. An approach to general proof theory and a conjecture of a kind of completeness of intuitionistic logic revisited. In *Advances in Natural Deduction (Trends in Logic)*, ed. Pereira, Luiz Carlos, Haeusler, Edward Hermann, and Paiva, Valeria de. Springer, Cham.

———. 2016. On the relation between Heyting's and Gentzen's approaches to meaning. In *Advances in Proof-Theoretic Semantics*, ed. Piecha, Thomas and Schroeder-Heister, Peter, 5–25. Springer, Cham.

Sandqvist, Tor. 2009. Classical logic without bivalence. *Analysis* 69: 211–218.

Schroeder-Heister, Peter. 1983. The completeness of intuitionistic logic with respect to a validity concept based on an inversion principle. *Journal of Philosophical Logic* 12: 359–377.

———. 1993. Rules of definitional reflection. *Proceedings Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science* 1: 222-232

———. 2006. Validity concepts in proof-theoretic semantics. *Synthese* 148: 525–571.

———. 2018. Proof-Theoretic Semantics. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Spring 2018ed., Zalta, Edward N. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

van Dalen, Dirk. 2013. *Logic and structure*. Fifth edition. Springer.

大西琢朗．2012 年．「証明論的意味論と双側面説」．京都大学大学院文学研究科

中村秀吉．1967 年．「概念構成と科学的説明」『金沢大学法文学部論集　哲学編』第 14 巻，51–71 頁．