数理解析研究所講究録 1419 巻 2005 年 63-67

ω-extension について

寺澤 順 (Jun Terasawa)

防衛大学校 (The National Defense Academy)

2004/10

α-extension というのは何か，というお問い合わせが幾人かの方々から寄せられております。これは実は私の命名ではなくて，一時期共同研究をしていたロシアの Misha Matveev とアメリカの Ronnie Levy という，この人は一昨年松江に来ていましたが，二人が考えたもので，私にはどうも違和感があります。他に何かよい名前が無いのかといつも考えています。

要するに空間 X の ω-extension というのは，X に可算個の孤立点を付け加えて，そしてその孤立点全体が全空間で dense になるもののことです。可算個の孤立点からなる空間を普通 ω と表すので ω-extension なのです。以下では出来るだけこの ω-extension という言葉を避け，単純に X の (ω による) 拡大または拡張ということとします。

普通はこうした場合，$\omega \cup X$ を ω の拡大と考え X のことを remainder，つまり剰余部分と呼びます。あたかも主役が ω であり X はそれから作られるものという感じです。

例えば，singleton$\{0\}$ に可算個の孤立点を付け加えて $\{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ という空間を作ることが出来ます。空間の大部分が ω ですから，それが主役と考えるのが自然に見えます。しかしここではこれを $\{0\}$ を ω によって拡張した空間と考えるわけです。

空間 X に可算個の孤立点を付け加えるわけですが，その付け加え方を考察する

のが目的です。すなわち，その付け加え方が unique であるか，もっと精密に述べると，X の ω による拡大 W, W' が与えられたとき，W, W' が equivalent となるか，という問題であります。ここで equivalent とは，onto 同相写像 $h : W \to W'$ が存在して $h \restriction X = 1_X$ となることです。つまり X の点を動かさない同相写像が W と W' の間にあるかという問題です。

これについてまず次が知られています (Pełczyński 1964, Terasawa 1995):

Theorem 1. *compact metric space* を ω によって *compact metric space* に拡大する方式は一通りしかない。

これによれば，singleton$\{0\}$ を ω によって compact metric space に拡大する方式は $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ しかないことになる。

Theorem 1 のもっと華々しい応用を述べましょう。Pełczyński が上の定理を証明した目的は，次の通りです。

Corollary 1. 同相でない空間 W, W' に対して，その *hyperspace of nonempty closed sets* について 2^W, $2^{W'}$ が同相となることがある。

これは，任意の 0 次元 compact, metric space X を ω で拡張した空間 W について 2^W がすべて equivalent となるのです。

証明のためには Theorem 1 から，この 2^W が Cantor set を ω で拡張したものとなっていることを示せばよいこととなります。2^W の二つの部分空間

$$N = \text{the set of finite subsets of } \omega$$

$$Z = \text{the set of closed subsets } F \subset W \text{ which meet } X$$

を考えます。明らかに $2^W = N \cup Z$ です。N は可算集合で孤立点からなります。また Vietoris 位相で dense となります。各 $F \in Z$ は Z の集積点です。そして 2^W が 0 次元かつ compact であることが知られていますから，Z もそうです。つまり Z は Cantor set に他なりません。

一般に Tychonoff space を ω で空間 W へ拡張するとき，この W が単に Tychonoff space でよいということにすると，拡張の方式は決して unique でありません。

実際，Tychonoff space X が ω で拡張されるとき，当然 X の weight$\leq c$ となりますから，X は I^c に埋め込まれます。よく知られているように，I^c は separable です。そしてその countable dense set N を non-trivial な収束列を全く含まないように取ることが出来ます。$I^c \approx I^c \times I^c$ ですから，X を N と交わらないように埋め込むことが出来ます。

いま I^c の部分空間 $X \cup N$ において N の各点を孤立させたものを W とすると，W は明らかに X の ω による拡張です。そして ω 内のどの点列も X の点には収束しません。ところが我々はただ単に収束列を一つ追加することによってもう一つの拡張 W' を作ることが出来ます。例えば $W \times \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$ の部分空間を考えればよいのです。

従って拡張空間に何らかの位相的性質を課することが必要となります。どの性質にするか見解の分かれるところですが，上の Theorem 1 を参照して，metrizable のときにどうなるかということがやはり当面の重要課題となると思います。これについては実は極めて簡潔な必要十分条件を与えることができます。

Theorem 2. *metric space X を metric spaces W, W' に拡張するとき，これが equivalent であるための必要十分条件は W, W' がいづれも compact であるか，またはその locally compact parts が一致することである。*

ここで locally compact part というのは

$$L_W = \{p : W \text{ is locally compact at } p\}$$

のことです。当然 $L_W \supset \omega$ ですから $L_W \cap X$ のみが問題となります。すなわち，W, W' が equivalent であるための必要十分条件は，compact な場合を除けば $L_W \cap X = L_{W'} \cap X$ であるということになります。

これからどんなことが分かるかということですが，例えば次のようなことです。

Corollary 2. *nowhere locally compact separable metric space を ω で metric space へ拡張する方式は unique である。*

従って有理数の空間や無理数の空間を ω で距離空間に拡張する方式は一つしかないことになります。例えば無理数の場合，実数空間ですべての有理数を孤立点として作る方式しかないこととなります。

この定理をどうやって証明するかということですが，証明は２段階に分かれます。

W, W' が共に compact の場合のことは Theorem 1 そのものですから新たな議論は必要ありません。

X が compact で W, W' が non-compact である場合をまず示します。そして X が non-compact である場合をこの場合に帰着させます。

まず X が compact の場合です。W, W' が locally compact なら one-point compactification を考えることによって Theorem 1 に帰着します。よって W, W' が locally compact でない場合です。

この構成を一言で述べることは出来ませんが，要するに W も W' も或る特有の構造をもつことを示します。

ω を無限集合 M_f, M_∞ および $\pi^{\leftarrow}[\{r\}] \setminus \{r\}$, $r \in M_\infty$, の和に分解して

$$\mathrm{Cl}\, M_f = M_f \cup X$$

$$\mathrm{Cl}\, M_\infty = M_\infty \cup [X \setminus L_W]$$

となるようにします。

すると $\mathrm{Cl}\, M_f$, $\mathrm{Cl}\, M_\infty$ がそれぞれ X, $X \setminus L_W$ の compact な拡大となります。従って他に $L_W = L_{W'}$ となる拡大 W' があっても全く同じ構造をもつこととなります。

次に X が compact でないときです。このとき，X が separable metric ですから，X に metrizable compactification Y が取れます。これに対して

$$\Omega = Y \cup X = Y \cup \omega = (Y \setminus X) \cup X \cup \omega$$

に metrizable topology を導入し，$L_\Omega = L_W$ となるようにします。

これはまず基本に戻って，何を開集合とするかの定義を行います。そしてそれが位相になることを示し，T_2 を示し regularity を示して更に，locally compact の

議論をします。論旨は明快だと思いますが，細かいことの検証が多いので，ここで詳しくお話しするのは控えさせていただきます。

どのような問題が今後興味深いかということですが，私としては次が挙げられると思います。

Problem. compact non-metrizable space X で，それを ω で compact T_2-space に拡大する方式が一通りであるものが存在するか。

更に出来ればこの X が first-countable とできるかというのも重要だと思います。

なお，Double Arrow Space(2つの versions があります) も，或いは正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ へ辞書式順序を導入した空間もこの Problem への肯定的な解答は与えません。