

(続紙 1)

京都大学	博士 (理 学)	氏名	清水 雄貴
論文題目	Point vortex dynamics in background fields on surfaces (曲面上の背景場付点渦力学系)		
(論文内容の要旨)			
<p>点渦力学 (point vortex dynamics) は, 二次元空間内における非粘性・非圧縮流体の運動を記述するオイラー (Euler) 方程式に対して, 速度場の回転場として定義される渦度が N 点のサポートを持つ δ 関数であると仮定したときに, 得られる N のサポート時間発展を考える力学である. 点渦力学は二次元流体運動の素過程を記述する定番の数理モデルとして, 数学的にも物理的にもよく研究されている数理物理における重要な研究対象である. この点渦方程式の解が, 導出の元になったオイラー方程式の解であるかという数学的問題には困難が存在している. すなわち, 点渦力学は二次元オイラー方程式の点測度初期値に対する解として正当化できるかという点である. この問題についての基本的な結果は, 二次元平面における点渦力学の方程式の解は, その解が存在している限りにおいてオイラー方程式の弱い意味での解として定義できるものの, 時間大域的な解としては定義ができないということである. これは点渦力学の流体モデルとしての数学的正当性を確保し, またこの理論的背景に基づいて点渦力学の解からオイラー方程式を通じて圧力項の計算 (ベルヌーイの定理) が可能になり, その結果として流体の「力学」としての理論的研究が可能なる.</p> <p>さて, このような点渦力学モデルは境界付き平面, 球面やトーラスなどの向き付け可能二次元多様体上 (surfaces) でも考えることができる. 球面上の点渦力学は地球流体運動の素過程を理解する上で非常に重要な研究対象となっており, トーラス上の点渦力学は Bose Einstein 凝集体の Toy model として用いられるなど, 近年非常に活発に理論研究が行われている分野である. 曲面上の点渦力学方程式の導出は平面の例にならって形式的に導出ができるが, これがもとの二次元オイラー方程式の解とどう関係しているかは明らかではなかった. そのために, 点渦力学の解から圧力を計算する数学的に正当化された方法が存在していなかった. 加えて, こうした曲面の流れの上に点渦以外の背景流れ場 (background fields) を考えることが応用上しばしば行われているが, 点渦力学方程式の解から背景流つきオイラー方程式の解をどう構成するかという問題も未解決である. このような学術的背景にそって清水氏の学位論文は行われている.</p> <p>清水氏は, 多様体上の二次元オイラー方程式の微分形式による特徴付けとして知られる Euler-Arnold 流を考えた. 具体的には特異性が強い流体とその微分方程式を扱うために微分形式の双対空間として定義される de Rham の p-current の空間を考えて, 点渦のような特異な渦度分布を許す双対空間での弱 Euler-Arnold 流の解として数学的に正当化できることを示した.</p>			

(論文審査の結果の要旨)

古典的な Euler-Arnold 流を背景流に持つ場合を想定して、背景流の持つ点渦方程式を定める二つのパラメータと合わせて、弱 Euler-Arnold 流の正則部分と特異部分に分解し、それぞれの圧力高が背景流方程式のパラメータを込めて正しい対応関係をもつ状態を C^r 分解可能と呼び、このように分解される弱 Euler-Arnold 流を C^r 分解可能と定義する。この定義は清水氏が本論文においてオリジナルに導出したものである。

この定義に基づいて、本論文の主結果である二つの定理は以下のように与えられる。まず、渦度が有限個のサポートからなる点渦になっていれば、それに対応する弱 Euler-Arnold 流は C^r 分解可能なこと、また相当する背景流の下で点渦力学系の運動は弱 Euler-Arnold 流と等価なものであることを示した。もう一つはその逆に相当する定理である。すなわち、古典的な Euler-Arnold 流を背景流をもつ点渦力学方程式の解が存在すれば、そこから C^r 分解可能な弱 Euler-Arnold 流を構成することができることを示している。この正当化の帰結として、点渦力学方程式から弱 Euler-Arnold 流を通して数学的に正しい「圧力」が定義できることも示した。これは曲面上におけるベルヌーイの定理の多様体上への拡張と見做すことができる。

さらに、単に抽象的な理論にとどまらず、本理論の応用も行っている。まず、古典的な平面の点渦力学がこの理論に包含されることを確認した。次に二つの応用例で具体的に計算を行っている。第一の例では、平面の線型シア一流れを背景流にもつ二点渦系という古典的によく知られた解をこの弱 Euler-Arnold 方程式として見直した。二つ目の例では一般の曲面上で背景流がポテンシャル流である点渦方程式のパラメータを特殊にとった場合に、非定常・定常の流れの場合の双方でのベルヌーイの法則を導出している。このベルヌーイの法則は球面上の点渦力学における点渦の作る圧力計算など応用上も利用価値が高いものである。

本結果は、曲面上の点渦方程式とオイラー方程式の解の関係を C^r 分解可能な弱 Euler-Arnold という概念によって数学的に正当化を行うという数学的な観点と、点渦力学方程式の解から圧力を計算することを可能にしたという数理流体力学の観点、さらにこれらの定式化において古典的な Euler-Arnold 流を背景場として取り込むことに成功して、幅広い流体モデルに対応出来るという応用上の観点、いずれの点においても高い価値を有するものである。

以上のことから、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について令和3年1月25日に試問を行った結果、合格と認めた。