（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	村山　拓也
論文題目	Loewner chains and evolution families on parallel slit half-planes （平行截線半平面上のレヴナー鎖および発展族）		

（論文内容の要旨）

本学位論文は、多重連結な複素領域における、測度値関数を駆動関数とする小松・レヴナー方程式について研究したものである。複素単連結領域におけるレヴナー方程式は、函数論におけるビーベルバッハ予想の研究で導入されたものであるが、駆動関数をブラウン運動とした場合の確率的レヴナー発展（またはシュラム・レヴナー発展、SLE）が様々な統計力学モデルのスケーリング極限として現れることが見出されて以来、確率論の立場からも注目を集めている対象である。

実軸から出発する複素上半平面 $\mathbb{H}$ 内の単純曲線 $\gamma = \gamma(t)$ について、時刻 t までの曲線の像を $\mathbb{H}$ から取り除いた単連結領域から $\mathbb{H}$ への等角写像は、無限遠点における挙動を指定すると一意に定まる。こうして得られる等角写像 g_t の族 $\{g_t\}_{t>0}$ がみたす微分方程式がレヴナー方程式であり、$\xi(t) := g_t(\gamma(t))$ を含む形の方程式となる。実軸上の連続関数 $\xi = \xi(t)$ を駆動関数と呼ぶ。逆に駆動関数 ξ を与えたときに等角写像の族 $\{g_t\}_{t>0}$ および $\mathbb{H}$ 内の閉集合の増大族 $\{F_t\}_{t>0}$ を定めることができる。$\{F_t\}_{t>0}$ は一般に増大する曲線の像にはなっていない。そこで、単純曲線 γ の代わりに適切な条件をみたす閉集合の増大族に対してレヴナー方程式の対応物を考察することは自然であり、それは実軸上の測度に値を取る関数を駆動関数とするレヴナー方程式として実現される (Goryainov–Ba)。このように、$\mathbb{H}$ 内の単純曲線と実軸上の連続関数との対応は、$\mathbb{H}$ 内の閉集合の増大族と実軸上の測度値関数との対応に一般化される。

本論文は、$\mathbb{H}$ 内の多重連結領域において同様の対応関係を確立した。領域として、$\mathbb{H}$ から実軸に平行な有限個の線分を取り除いた平行截線領域 D をとる。有限連結度を持つ任意の $\mathbb{H}$ 内の領域は、ある平行截線領域と等角同値であることに注意する。実軸から出発する D 内の単純曲線 $\gamma = \gamma(t)$ について、時刻 t までの曲線の像を D から取り除いた領域から、ある平行截線領域 D_t への等角写像 g_t が、無限遠点における挙動を指定すると一意に定まる。こうして得られる等角写像の族 $\{g_t\}_{t>0}$ がみたす微分方程式が小松・レヴナー方程式であり、駆動関数 $\xi(t) := g_t(\gamma(t))$ と領域 D_t における複素ポアソン核を含む方程式となる（Komatu, Bauer–Friedrich, Lawler, Chen–Fukushima–Rohde らによる）。時間とともに領域が変化する方程式となるところが単連結領域の場合との大きな相違点である。本論文の主結果においては、まず D 内の閉集合増大族を自然に公理化した発展族 (evolution family) による定式化の下で、付随する方程式として、実軸上の測度値関数を駆動関数とする小松・レヴナー方程式を導出した。逆に、与えられた測度値駆動関数に対して、緩やかな制約条件の下で小松・レヴナー方程式を解くことができ、発展族を得ること

を示した。さらに、実数値駆動関数における小松・レヴナー方程式が対応するための、発展族に関する必要十分条件を与えた。これらは散在する先行研究の部分的結果を大きく拡張・改良し、包括的な一般論にまで昇華したものである。

（ 続紙 3 ）

（論文審査の結果の要旨）

本学位論文は、多重連結複素領域における小松・レヴナー方程式を、増大する閉集合族と測度値駆動関数との対応にまで拡張した一般論を論じたものである。上半平面を典型例とする単連結領域においては既に十分な研究がなされている。一方、多重連結の場合、時間発展とともに等角同値類が変わっていくために、等角写像の族がなす方程式は各時刻で変化する領域における複素ポアソン核を含み、その解析は格段に困難となる。

本論文では、複素ポアソン核の虚部が領域上の膝りブラウン運動のポアソン核により与えられるという Chen–Fukushima–Rohde の確率論的アプローチをベースにして、まずポアソン核の定量評価を新たに準備し、等角写像が適切な仮定をみたすこととポアソン核を用いた実軸上の積分表現を持つことの同値性を示した。これを元に、領域の発展族に対する小松・レヴナー方程式を、測度値駆動関数の明示的な意味付けとともに導出することに成功した。逆に、与えられた測度値駆動関数の台が一様に有界であるとき、小松・レヴナー方程式から発展族が得られることを示した。これらの結果は単連結領域において対応する主張を自然に一般化したものと見なせるが、変化する領域に依存する方程式を扱うため議論は複雑化する。村山氏はこれらの困難を単葉函数論や確率論のさまざまな結果を利用することにより解決した。また、測度値駆動関数がいつ通常の実数値駆動関数になるかという自然な問いに対しても、満足のいく特徴付けを与えており、一部の主張は単連結領域においても新しい結果を与えるものである。以上の研究は、今後多重連結領域におけるレヴナー理論をさらに展開していく上で基礎理論となる成果であり、本論文はその基本文献となることが期待される。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和3年1月28日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　　年　　　月