

様式VI

博士学位論文調査報告書

論文題目 Symbolic-Numeric Approaches Based on Theories of Abstract Algebra to
Control, Estimation, and Optimization
(制御、推定、最適化に対する抽象代数学を用いた数値数式融合アプローチ)

申請者氏名 庵 智幸

最終学歴 平成30年3月
京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻専攻修士課程 修了
令和3年3月
京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻博士後期課程
研究指導認定見込

学識確認 令和 年 月 日 (論文博士のみ)

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科
(調査委員長) 教授 大塚 敏之

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科
教授 石井 信

論文調査委員 京都大学大学院情報学研究科
教授 太田 快人

(続紙 1)

京都大学	博士 (情報学)	氏名	庵 智幸
論文題目	Symbolic-Numeric Approaches Based on Theories of Abstract Algebra to Control, Estimation, and Optimization (制御、推定、最適化に対する抽象代数学を用いた数値数式融合アプローチ)		
(論文内容の要旨)			
<p>Various problems in the real world can be formulated as nonlinear optimization problems. The efficiency of the solution methods for such problems is particularly crucial in the applications to optimal control and estimation, while the exactness of the methods is useful to guarantee the theoretical properties of their outputs. This thesis aims to propose efficient and exact approaches to optimization problems including optimal control and estimation by utilizing symbolic-numeric computation methods based on theories of abstract algebra. This thesis consists of seven chapters.</p> <p>Chapter 1 describes the backgrounds, motivations, and goals of this thesis.</p> <p>Chapter 2 introduces the basics of optimization theory and optimal control and estimation theory, which are used in the following chapters of this thesis. First, the fundamental concepts and theorems of optimization theory are described. Next, a class of optimal control problems called the finite-horizon optimal control problems (FHOCPs) with terminal constraints are formulated. Finally, two types of optimal estimation problems: the finite-horizon optimal estimation problems (FHOEPs) and Bayesian filtering problems are formulated.</p> <p>Chapter 3 presents a recursive elimination method for the FHOCPs with terminal constraints. By using symbolic computation based on algebraic geometry, the method decouples the Euler-Lagrange equations for the problems into sets of algebraic equations, where each equation set involves only the variables at a single time step. This special structure is suitable for model predictive control (MPC) because only the initial optimal input is required at each time step in MPC. The initial optimal input can be computed by solving the decoupled equation set at the first time step. Sufficient conditions are also provided to guarantee that the decoupled equation sets give a unique local optimal feedback control law at each time step. Several numerical examples are provided to illustrate the methodology.</p> <p>Chapter 4 presents a recursive elimination method for the FHOEPs, which are formulated as joint maximum a posteriori estimation problems. After the variable elimination based on the elimination theory in algebraic geometry, an implicit function representation of the optimal estimate is obtained as a function of observed outputs over the horizon. Moving horizon estimation is performed by repeatedly solving the implicit function representation. A comparison is performed to show the efficiency of the proposed method.</p> <p>Chapter 5 presents a symbolic-numeric method for Bayesian filtering problems of nonlinear stochastic systems. The posterior probability density function (PDF) is first approximated as a Gaussian PDF, and the update law of its mean and variance is then formulated as functions of</p>			

the previous mean and variance and observed output. These functions are evaluated at each given previous estimates and observed output by utilizing a symbolic-numeric method called the holonomic gradient method. A numerical example is provided to showing the efficiency of the proposed method.

Chapter 6 presents an algorithm to derive necessary optimality conditions for polynomial optimization problems. The derived conditions do not require any constraint qualifications and thus are more general than the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions. The algorithm is based on the penalty function method and consists of symbolic computation based on the results of algebraic geometry. Several numerical examples are provided to clarify the methodology and to demonstrate the cases where some local minimizers do not satisfy the KKT conditions.

Chapter 7 summarizes this thesis and discusses the directions of future work based on the results of this thesis from the theoretical and computational perspectives.

(論文審査の結果の要旨)

非線形最適化問題は、現実の様々な問題を定式化できる一方で、その解を効率的かつ厳密に求めることは一般に難しい。最適化アルゴリズムの効率化は、最適化問題をリアルタイムで解く必要がある最適制御・推定問題への応用において重要な課題である。本論文では、非線形最適化問題やその最適制御・推定への応用に対し、数値計算と数式処理の組み合わせによる新しい方法論を提案している。具体的には、以下に示す研究成果を得ている。

- (1) 終端制約条件を有する有限時間最適制御問題に対して、問題設定に現れる関数が有理関数や代数関数であるという仮定の下で、逐次消去法と呼ばれる解法を提案している。一般に、有限時間最適制御問題の最適性条件は評価区間にわたる変数が含まれた連立代数方程式に帰着されるが、本研究では、多項式環の消去イデアルを用いて隣り合う時刻の依存関係を逐次的に解消し、初期時刻における変数のみの代数方程式を導出する体系的なアルゴリズムを提案している。これは、各時刻で有限時間最適制御問題を解き、最適制御の初期値のみを用いてフィードバック制御を行うモデル予測制御において特に有用な成果である。さらに、局所最適な最適フィードバック則が一意に存在するための十分条件も与えている。数値例によって提案手法の有用性を示している。
- (2) 非ガウス性ノイズが加わった非線形システムの有限時間最適推定問題に対して逐次消去法による解法を提案している。状態軌道の最大事後確率推定問題に対して、消去イデアルを用いて過去の状態変数を消去し、過去の観測出力と現時刻の状態のみからなる代数方程式が構成できることを示した。これは、各時刻で有限時間最適推定問題を解いて現状態の推定をおこなう **moving horizon** 推定において有用な成果である。数値例によって既存手法に対する提案手法の優位性を示している。
- (3) 非線形システムにおける状態の事後確率密度関数をガウス分布で近似し、その平均と分散の計算にホロノミック勾配法が適用できることを示している。求める平均と分散が前時刻における平均と分散、観測値の関数であることに着目し、その関数がホロノミック関数と呼ばれる十分に一般的なクラスに属すれば、微分作用素環における代数演算によって、その関数が満たす偏微分方程式を厳密に導出できることを示している。さらに、その偏微分方程式の解は、常微分方程式の初期値問題として容易に評価できることも示している。これらの性質を統合して、オフラインで偏微分方程式を導出し、オンラインでは常微分方程式の初期値問題を数値的に解くという、新規性の高い状態推定手法を提案している。数値例によって、拡張カルマンフィルタや粒子フィルタなどの既存手法に対する提案手法の優位性を示している。
- (4) 多項式最適化問題に対して、制約想定を必要としない最適性必要条件の新しい導出方法を与えている。標準的な最適性必要条件である **Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** 条件は制約想定と呼ばれる条件が成り立たないと適用できないのに対し、提案手法では、ペナルティ関数法において制約を緩和するために導入されたパラメータを無限大にする操作を、射影空間や接錐といった幾何学的な対象に関する操作として解釈している。さらに、その操作を代数幾何学に基づく数式処理によって厳密に実行できることを示し、緩和前の問題の最

適解が満たすべき方程式を導出する方法を与えている。導出された最適性条件はすべての局所最適解が満たす条件であり、制約想定を必要としない。例題において、KKT 条件では求められない局所最適解が提案手法によって求められることを示している。

以上を要するに、本論文は、代数学や代数幾何学を基礎とする数式処理を用いることで、未決定なパラメータを含んだ数式を記号的に処理し、制御・推定を効率化する新しい方法論や、パラメータを無限大にしたときの最適性条件を厳密に導出する新しい方法論を構築している点で重要であり、その成果は学術上、實際上寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和3年2月22日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。また、本論文のインターネットでの全文公表についても支障がないことを確認した。

要旨公開可能日： _____ 年 _____ 月 _____ 日以降