

# 非対称 $t$ 接合関数の性質・推定法とその応用\*

東京都立大学・大学院経営学研究科 吉羽 要直

Toshinao Yoshiba

Graduate School of Management, Tokyo Metropolitan University

## 概要

本稿では、接合関数 (copula) を用いて定義される裾依存性が、金融ポートフォリオのリスク量に大きな影響を及ぼすことを想定し、資産下落方向での依存性での強さを表現できる非対称  $t$  接合関数を導入し、その推定法を議論する。

また、3変量株式ポートフォリオでの実証を通じて、非対称  $t$  接合関数を使ったモデリングの有効性を議論する。

## 1. はじめに

接合関数 (copula)  $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$  は、同時分布  $\Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$  を

$$\Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = C(\Pr(X_1 \leq x_1), \dots, \Pr(X_d \leq x_d)) \quad (1)$$

のように周辺分布  $\Pr(X_i \leq x_i), i = 1, \dots, d$  と繋ぐ関数である。本稿では、よく知られたパラメトリックな多変量分布に内包される接合関数 (implicit copula) を対象とする。具体的には、 $d$ 変量分布 (累積確率) 関数  $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$  から第  $j$  変量の周辺分布関数  $F_j(x_j)$  を特定し、以下のように接合関数を導出する。

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (2)$$

正規接合関数 (Normal copula, Gaussian copula) は  $d$  変量正規分布関数、 $t$  接合関数 (Student- $t$  copula) は  $d$  変量  $t$  分布関数に内包される代表的な接合関数であり、本稿で考察する非対称  $t$  接合関数 (skew- $t$  copula) も  $d$  変量非対称  $t$  分布関数に内包される接合関数である。

金融実務では、市場リスクの中でも債券の価格変動リスク、株式の価格変動リスクなどがあり、市場リスクの他にも信用リスク、オペレーショナルリスクなどが知られている。こうした様々なリスクを統合し、1つのリスク指標にまとめることをリスク合算と呼ぶ。リスク合算を伴う金融実務は多様であり、そのモデリングの際にリスクファクター間の接合関数には、(1)相関行列などで全体の依存性を調整できること、(2)裾での依存性を調整できることが求められる。正規接合関数は、(1)の観点で扱いやすい接合関数であり、実務で最もよく利用されている。しかしながら、裾

\* 本研究は JSPS 科研費 JP19K23226 からの助成を受けたものです。

での依存性が低く、理論的には漸近独立になるという性質から、(2)の裾での依存性が問題になる場合には正規接合関数に代えて  $t$  接合関数が利用されることもある。しかしながら、リスクファクターが資産変動を捉えるようなものである場合、裾での依存性を含めた依存性は、資産変動の上下で異なることが想定される。具体的には上昇方向の資産変動よりも下落方向の資産変動で同時に変動する確率が高まることが想定される。こうした(3)資産変動の上下で依存性を変えられることもリスク合算実務で要請される点であり、(1)~(3)を満たす接合関数として非対称  $t$  接合関数の利用が望まれる。

非対称  $t$  接合関数を実務で利用する場合、ネックとなるのが、与えられたデータからのパラメータ推定である。Yoshida [2018]では、非対称  $t$  接合関数の最尤推定法を確立した。本稿では、Yoshida [2018]に沿って非対称  $t$  接合関数の最尤推定法を概説したうえで、リスク管理への応用事例を述べる。また、吉羽 [2020]に沿って、非対称  $t$  接合関数の性質と実用可能性について整理する。

## 2. 非対称 $t$ 接合関数とその性質

### 2.1. 2つの非対称 $t$ 接合関数

非対称  $t$  接合関数は、 $d$  変数非対称  $t$  分布関数に内包される接合関数であるが、 $d$  変数非対称  $t$  分布は、 $d$  変数正規分布や  $t$  分布関数と異なり、非対称性の導入方法により様々な提案がある。Yoshida [2018]では、GH (generalized hyperbolic) と AC (Azzalini and Capitanio) の2つの非対称  $t$  接合関数を扱った。

一般化双曲型 (generalized hyperbolic) の非対称  $t$  分布 (以下、GH 非対称  $t$  分布)  $\text{GHSt}_d(\Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu)$  に従う  $d$  変数確率ベクトル  $\mathbf{X}$  は、相関行列  $\Omega$  を持つ  $d$  変数正規確率ベクトル  $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, \Omega)$  と独立なガンマ確率変数  $V \sim G(\nu/2, \nu/2)$  を用いて、非対称性ベクトルを  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^d$  として、

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\gamma}V^{-1} + \frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{V}} \quad (3)$$

で構成される。(3)式から明らかのように、第  $j$  変量の周辺分布は  $\text{GHSt}_1(1, \gamma_j, \nu)$  となるため、内包される接合関数は  $\Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu$  をパラメータとして

$$C_{\text{GHSt}}(u_1, \dots, u_d; \Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu) = \text{GHSt}_d(\text{GHSt}_1^{-1}(u_1; \gamma_1, \nu), \dots, \text{GHSt}_1^{-1}(u_d; \gamma_d, \nu); \Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu) \quad (4)$$

で定義できる。Demarta and McNeil [2005]は、(4)式で定義される接合関数を非対称  $t$  接合関数 (skew- $t$  copula) と呼び、その利用を提案した。本稿ではこの非対称  $t$  接合関数を GH 非対称  $t$  接合関数と呼ぶ。 $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$  ならば (対称な)  $t$  接合関数に帰着し、

$\nu \rightarrow \infty$ では正規接合関数に帰着する。Christoffersen *et al.* [2012]は先進国とエマージング諸国の週次の株価収益率に対して実証分析を行っている。

$d$ 変量 GH 非対称  $t$  分布  $\text{GHSt}_d(\Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu)$  の同時密度は

$$f(\mathbf{x}; \Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu) = \frac{2^{\frac{2-(\nu+d)}{2}} K_{\frac{\nu+d}{2}}(\eta(\mathbf{x}; \Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu)) \exp(\mathbf{x}^\top \Omega^{-1} \boldsymbol{\gamma})}{\Gamma(\nu/2) (\pi \nu)^{\frac{d}{2}} \sqrt{|\Omega|} (\eta(\mathbf{x}; \Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu))^{\frac{\nu+d}{2}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^\top \Omega^{-1} \mathbf{x}}{\nu}\right)^{\frac{\nu+d}{2}}}, \quad (5)$$

$$\eta(\mathbf{x}; \Omega, \boldsymbol{\gamma}, \nu) = \sqrt{(\nu + \mathbf{x}^\top \Omega^{-1} \mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma}^\top \Omega^{-1} \boldsymbol{\gamma}}$$

で与えられる。ただし、 $K_\lambda(\cdot)$  は第 3 種の修正ベッセル関数である。第  $j$  変量の周辺密度は

$$f_j(x; \gamma_j, \nu) = \frac{2^{\frac{1-\nu}{2}} K_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\sqrt{\gamma_j^2(\nu + x^2)}\right) \exp(\gamma_j x)}{\Gamma(\nu/2) \sqrt{\pi \nu} \left(\sqrt{\gamma_j^2(\nu + x^2)}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{\nu+1}} \quad (6)$$

で与えられる。

Azzalini and Capitanio [2003]が示した非対称  $t$  分布（以下、AC 非対称  $t$  分布）に従う  $d$ 変量確率ベクトル  $\mathbf{X}$  は、Azzalini and Dalla Valle [1996]の非対称正規分布  $\text{SN}_d(\boldsymbol{\zeta}, \Psi)$  に従う  $d$ 変量確率ベクトル  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)^\top$  を

$$Y_j = \delta_j |Z_0| + \sqrt{1 - \delta_j^2} Z_j, \quad Z_0 \sim N(0, 1), \quad \mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^\top \sim N_d(0, \Psi) \quad (7)$$

で構成し、確率ベクトル  $\mathbf{Y}$  と独立なガンマ確率変数  $V \sim G(\nu/2, \nu/2)$  を用いて、

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{Y}}{\sqrt{V}} \quad (8)$$

で構成される。ただし、 $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)^\top \in \mathbb{R}^d$  と  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_d)^\top$  はどちらも非対称性を表すベクトルであり、以下の関係式が成立する。

$$\delta_j = \frac{\zeta_j}{\sqrt{1 + \zeta_j^2}}, \quad \zeta_j = \frac{\delta_j}{\sqrt{1 - \delta_j^2}}, \quad j = 1, \dots, d \quad (9)$$

(8)式で構成される AC 非対称  $t$  分布に内包される接合関数を AC 非対称  $t$  接合関数と呼ぶ。Joe [2006]は AC 非対称  $t$  接合関数の可能性を示唆しているものの、推定法の提案までには至っていなかった。

Azzalini and Capitanio [2003]は  $d$ 変量 AC 非対称  $t$  分布  $\text{St}_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}, \nu)$  の同時密度が

$$g(\mathbf{x}; \Omega, \boldsymbol{\alpha}, \nu) = 2t_{d,\nu}(\mathbf{x}; \Omega) T_{1,\nu+d} \left( \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} \sqrt{\frac{\nu + d}{\mathbf{x}^\top \Omega^{-1} \mathbf{x} + \nu}} \right) \quad (10)$$

で与えられることを示している。ただし、 $t_{d,\nu}(\cdot; \Omega)$ は自由度 $\nu$ 、相関行列 $\Omega$ の $d$ 変量 $t$ 密度であり、 $T_{1,\nu}(\cdot)$ は自由度 $\nu$ の1変量 $t$ 分布関数である。また、

$$\Omega = \Delta(\Psi + \zeta\zeta^\top)\Delta, \quad \Delta = \text{diag}\left(\sqrt{1 - \delta_1^2}, \dots, \sqrt{1 - \delta_d^2}\right),$$

$$\alpha = \frac{\Omega^{-1}\delta}{\sqrt{1 - \delta^\top\Omega^{-1}\delta}} = \frac{\Delta^{-1}\Psi^{-1}\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^\top\Psi^{-1}\zeta}} \quad (11)$$

で与えられる。このとき、第 $j$ 変量の周辺密度は

$$g_j(x_j; \zeta_j, \nu) = 2t_{1,\nu}(x_j)T_{1,\nu+1}\left(\zeta_j x_j \sqrt{\frac{\nu+1}{x_j^2 + \nu}}\right) \quad (12)$$

で与えられ、第 $j$ 変量の周辺分布は $\text{St}_1(0, 1, \zeta_j, \nu)$ になっていることがわかる。したがって、AC非対称 $t$ 接合関数は $\Omega, \delta, \nu$ をパラメータとして、

$$C_{\text{st}}(u_1, \dots, u_d; \Omega, \delta, \nu) = \text{St}_d(\text{St}_1^{-1}(u_1; 0, 1, \zeta_1, \nu), \dots, \text{St}_1^{-1}(u_d; 0, 1, \zeta_d, \nu); \mathbf{0}, \Omega, \alpha, \nu) \quad (13)$$

で定義できる。 $\delta = \mathbf{0}$ ならば(対称な) $t$ 接合関数に帰着し、 $\nu \rightarrow \infty$ では非対称正規接合関数に帰着する。 $\delta = \mathbf{0}$ かつ $\nu \rightarrow \infty$ では正規接合関数に帰着する。

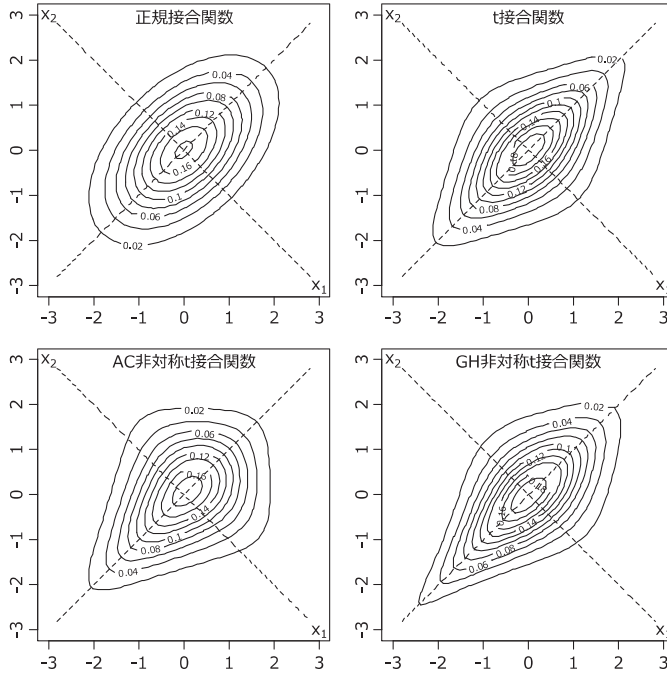


図 1 4種類の接合関数と標準正規の周辺分布による同時密度の等高線

ここで、2変量( $d = 2$ )に注目し、(1)正規、(2) $t$ (自由度 $\nu = 3$ )、(3)AC非対称 $t$ (非対称性 $\delta_1 = \delta_2 = -0.7$ 、 $\nu = 3$ )、(4)GH非対称 $t$ (非対称性 $\gamma_1 = \gamma_2 = -0.2$ 、 $\nu =$

3) の 4 種類の 2 変量接合関数について、相関パラメータを  $\rho = 0.5$  として密度関数の形状を確認する。各変量の周辺分布は標準正規分布として、上記の 4 種類の 2 変量接合関数を用いて同時密度の等高線を描いたものが図 1 である。図 1 より、歪みパラメータ  $\delta$ ,  $\gamma$  が負の時、下側裾依存性が高まることがわかる。

## 2.2. その他の非対称 $t$ 接合関数

吉羽 [2020]では、GH と AC 以外の非対称  $t$  接合関数として Smith *et al.* [2012]の非対称  $t$  接合関数に取り上げられている。これは、Sahu *et al.* [2003]の  $d$ 変量非対称  $t$  分布に内包される接合関数である。Sahu *et al.* [2003]の  $d$ 変量非対称  $t$  分布に従う確率ベクトル  $\mathbf{X}$  は(8)式の AC 非対称  $t$  分布の確率ベクトルと同様に、非対称正規分布に従う確率ベクトル  $\mathbf{Y}$  と独立なガンマ確率変数  $V \sim G(v/2, v/2)$  を用いて  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}/\sqrt{V}$  と表される。ただし、Sahu *et al.* [2003]の非対称正規分布に従う確率ベクトル  $\mathbf{Y}$  は、 $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^\top \sim N_d(\mathbf{0}, \Psi)$  を用いて

$$\mathbf{Y} = \Gamma|\mathbf{W}| + \mathbf{Z}, \quad \Gamma \sim \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_d), \quad \mathbf{W} \sim N_d(\mathbf{0}, I) \quad (14)$$

で構成され、(7)式の AC 非対称  $t$  分布の

$$\mathbf{Y} = \delta|\mathbf{Z}_0| + \sqrt{1 - \delta_j^2} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}_0 \sim N(\mathbf{0}, 1) \quad (15)$$

と異なっている。同時密度が計算しやすいことが後述の最尤法の実装の 1 つのポイントであるが、Sahu *et al.* [2003]の非対称  $t$  分布では非対称性を与える確率要素が  $d$  変量正規確率ベクトルで与えられ、同時密度は  $d$  次元  $t$  分布関数を含むため、最尤法の実装には向かない。このため、Smith *et al.* [2012]はマルコフ連鎖モンテカルロ法で実装し、実証分析を行っている。

吉羽 [2020]では、非対称  $t$  接合関数として定義されていないその他の多変量非対称  $t$  分布として、Ferreira and Steel [2007], Bauwens and Laurent [2005]の多変量非対称  $t$  分布を挙げている。これらは単変量では用いられることが多い Fernández and Steel [1998]の非対称  $t$  分布を多変量化したものであり、周辺密度は

$$f(x_j | \xi_j) = \frac{2\xi_j}{\xi_j^2 + 1} t_{1,\nu} \left( x_j \xi_j^{-\text{sign}(x_j)} \right) \quad (16)$$

で与えられる。Bauwens and Laurent [2005]では変量間は独立に設定しており、Ferreira and Steel [2007]では相関を

$$f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\xi}) = |A|^{-1} \prod_{j=1}^d f((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^\top A_j^{-1} | \xi_j), \quad \mathbf{y} = A^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu} \quad (17)$$

で設定している。吉羽 [2020]ではさらに別の多変量非対称  $t$  分布として、Jones [2002]、Rosco *et al.* [2011]などの提案にも言及している。

### 2.3. 裾依存係数

2変量 ( $d = 2$ ) に注目した場合の裾での同時確率が依存性のあるオーダーかどうかを示す指標として裾依存係数 (tail dependence) があり、下側裾依存係数 $\lambda_L$ 、上側裾依存係数 $\lambda_U$ は以下で定義される。

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \lambda_L(u), \quad \lambda_L(u) \equiv \Pr[F_j(X_j) < u | F_i(X_i) < u] = \frac{C(u, u)}{u} \quad (18)$$

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \lambda_U(u), \quad \lambda_U(u) \equiv \Pr[F_j(X_j) > u | F_i(X_i) > u] = \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

定義から明らかなように第  $i$  変量と第  $j$  変量が独立ならば  $C(u, u) = u^2$  で  $\lambda_L = 0$ 、すなわち下側漸近独立となる。

2変量の正規接合関数を考えると、相関 $|\rho| < 1$ では、下側漸近独立 $\lambda_L = 0$ となる。このことは、接合関数で資産変動を捉える場合、資産急落での依存性が弱まることを意味する。しかし、現実的には資産下落のストレス下ではむしろ依存性は強まることが想定される。理論的には、漸近的にどの程度相関が弱まってしまうのかを考察する必要がある。

### 2.4. 正規接合関数の漸近的挙動

Coles *et al.* [1999]では、2つの $[0,1]$ の確率変数 (周辺分布関数に相当)  $U_1, U_2$  に対し、

$$\bar{\chi}_U \equiv \lim_{u \rightarrow 1} \bar{\chi}_U(u), \quad \bar{\chi}_U(u) \equiv \frac{2 \ln(1 - u)}{\ln \Pr(U_1 > u, U_2 > u)} \quad (19)$$

という上側の漸近的挙動の指標を定義し、Ledford and Tawn [1996]の結果を用いて、相関 $\rho$ の正規接合関数に従う場合は、 $\bar{\chi}_U = \rho$ となることを示している。同様に、下側での漸近的挙動に対し、

$$\bar{\chi}_L \equiv \lim_{u \rightarrow 0} \bar{\chi}_L(u), \quad \bar{\chi}_L(u) \equiv \frac{2 \ln u}{\ln \Pr(U_1 \leq u, U_2 \leq u)} \quad (20)$$

を定義でき、 $\bar{\chi}_L = \rho$ となることが示される。

Ledford and Tawn [1996], p.177 の(5.1)式では、相関 $\rho$ の2変量標準正規確率変数  $Z_1, Z_2$  に対し、 $r \rightarrow \infty$ で

$$\Pr(Z_1 > r, Z_2 > r) \sim C_p r^{-2/(1+\rho)} (\ln r)^{-\rho/(1+\rho)}, \quad (21)$$

$$C_p = (1 + \rho)^{3/2} (1 - \rho)^{-1/2} (4\pi)^{-\rho/(1+\rho)}$$

を満たすことが示されており、これにより、 $\bar{\chi}_U = \rho$ は示される。この関係式は Reiss [1989]でも示されている。

## 2.5. 非対称 $t$ 接合関数の漸近特性

$t$  接合関数は正規接合関数とは異なり漸近従属となり、裾依存係数は、

$$\lambda_L = \lambda_U = 2T_{\nu+1} \left( -\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{1+\rho}} \right) \quad (22)$$

で与えられる (Demarta and McNeil [2005]を参照)。

Fung and Seneta [2010]と Padoan [2011]は、独立に2変量AC非対称 $t$ 分布の裾依存係数(下側 $\lambda_L$ 、上側 $\lambda_U$ )を与えている。 $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ での裾依存係数は、

$$\begin{aligned} \lambda_L &= 2F_{EST} \left( -\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}; \delta \sqrt{\frac{(1-\rho)}{(1+\rho-2\delta^2)}}, -\delta \sqrt{\frac{(\nu+1)(1+\rho)}{(1+\rho-2\delta^2)}}, \nu+1 \right) \\ \lambda_U &= 2 - 2F_{EST} \left( \sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}; \delta \sqrt{\frac{(1-\rho)}{(1+\rho-2\delta^2)}}, \delta \sqrt{\frac{(\nu+1)(1+\rho)}{(1+\rho-2\delta^2)}}, \nu+1 \right) \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられる。ただし、 $F_{EST}(x; \alpha, \tau, \nu)$ は、自由度の自由度 $\nu$ の $t$ 密度関数を $t_\nu(\cdot)$ として、

$$F_{EST}(x; \alpha, \tau, \nu) = \int_{-\infty}^x t_\nu(z) \frac{T_{\nu+1} \left( (\alpha z + \tau) \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+z^2}} \right)}{T_\nu(\tau/\sqrt{1+\alpha^2})} dz \quad (24)$$

で与えられる。(23), (24)式の結果を用いて共通非対称性 ( $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ) の2変量AC非対称 $t$ 分布 ( $\rho = 0.5$ ) の下側・上側裾依存係数をプロットしたものが図2である。図2では、横軸を共通非対称性 $\delta$ とし、 $\nu = 1, 3, 5, 10$ で下側依存係数から上側依存係数を差し引いた値をプロットしている。

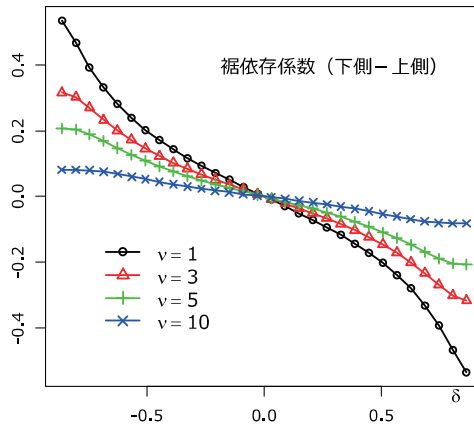


図2 AC非対称 $t$ 接合関数の裾依存係数

一方、GH 非対称  $t$  接合関数の裾依存係数については、Banachewicz and van der Vaart [2008]が Theorem 2.1 で示した特殊ケースとして、Fung and Seneta [2010]が Theorem 1 で下側裾依存係数 $\lambda_L$ を整理している。上側裾依存係数 $\lambda_U$ については、 $\lambda_U(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_L(-\gamma_1, -\gamma_2)$ の関係が成立するため、 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ での裾依存係数は、 $\Omega_{12} = \Omega_{21} = \rho$ として、以下のように整理できる。

$$\begin{cases} \gamma < 0 \rightarrow \lambda_L = 1, \lambda_U = 0 \\ \gamma > 0 \rightarrow \lambda_L = 0, \lambda_U = 1 \\ \gamma = 0 \rightarrow \lambda_L = \lambda_U = 2T_{v+1} \left( -\sqrt{\frac{(1-\rho)(v+1)}{(1+\rho)}} \right) \end{cases} \quad (25)$$

### 3. 非対称 $t$ 接合関数の最尤推定法

#### 3.1. 2 段階推定

リスクファクターの同時分布については、2 段階推定による最尤推定法を採用する。すなわち、周辺分布は推定してあるものとし、 $[0,1]^d$  の一様分布に従う  $N$  個の観測データ  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\}$  を所与とする。このとき、パラメータ  $(\Omega, \boldsymbol{\delta}, \nu)$  の (AC) 非対称  $t$  接合関数の対数尤度は、接合密度  $c_{\text{st}}(\mathbf{u}_i; \Omega, \boldsymbol{\delta}, \nu)$  を用いて

$$l(\Omega, \boldsymbol{\delta}, \nu; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) = \sum_{i=1}^N \ln c_{\text{st}}(\mathbf{u}_i; \Omega, \boldsymbol{\delta}, \nu) \quad (26)$$

で与えられる。接合密度は、

$$c_{\text{st}}(\mathbf{u}_i; \Omega, \boldsymbol{\delta}, \nu) \equiv \frac{\partial^d C_{\text{st}}(u_{i1}, \dots, u_{id}; \Omega, \boldsymbol{\delta}, \nu)}{\partial u_{i1} \cdots \partial u_{id}} = \frac{g(\mathbf{x}_i; \Omega, \boldsymbol{\alpha}, \nu)}{\prod_{j=1}^d g_j(x_{ij}; \zeta_j, \nu)} \quad (27)$$

で与えられる。ただし、(27)式右辺分子の同時密度は元の  $d$  変量同時密度(10) (GH では(5)式) で、右辺分母は元の  $d$  変量分布の周辺密度(12) (GH では(6)(5)式) の積で表現されている。また、(27)式右辺のは  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})$  は、

$$x_{ij} = \text{St}_1^{-1}(u_{ij}; 0, 1, \zeta_j, \nu), \quad j = 1, \dots, d \quad (28)$$

で与えられる。

2 段階推定による最尤推定では、(26)式の対数尤度を最大化するパラメータを数値計算で求めればよいが、2つの問題がある。

第1の問題は、対数尤度(26)の計算では、収束途中のパラメータに対して(28)式の分位点計算をする必要があり、その計算には工夫が必要であるという点である。非対称  $t$  分布の周辺分布は(6)式や(12)式のように密度は解析的に表現されるが、分布関数(累積確率)は解析的に表現されず、密度関数を数値積分で求める必要がある。



分位点の計算はさらに累積確率が観測データ $\{u_{1j}, \dots, u_{Nj}\}$ に一致する点を求める Newton 法などでの収束計算になる。観測点 $N$ が多ければその収束計算には時間がかかることになる。この問題に対して、Yoshida [2018]は、同一パラメータのデータの最小値、最大値についてのみ正確に分位点を求め、残りは $m = 150$ の等区分点で累積確率を数値積分で求め、単調補間することによって分位点を推定することを提案している。これにより $d = 3$ 変量で $N = 2,500$ のデータに対する対数尤度計算は、精緻な計算より 300 倍程度高速化し、 $10^{-5}$ 程度の精度を確保している。

第 2 の問題は、パラメータの定義域である。GH では $\mathbf{Z} \sim N_d(0, \Omega)$ で想定した相関行列 $\Omega$ 、AC では相関行列 $\Omega$ と非対称性ベクトル $\boldsymbol{\delta}$ を用いて拡大した相関行列

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\delta}^\top \\ \boldsymbol{\delta} & \Omega \end{pmatrix} \quad (29)$$

は、非負定値対称行列で対角は 1 でなければならない点である。これについて Yoshida [2018]は、コレスキー分解と三角関数を用いた再パラメータ化を提案している。コレスキー分解により非負定値対称行列の性質を保ち、三角関数を用いて対角を 1 に保つという考え方である。これは、 $(j - 1)$ 変量までを所与とした $i (> j)$ 変量と $j$ 変量の偏相関係数 $\rho_{ij:1\dots(j-1)}$ を $\cos \theta_{ij}$ と置くことと同値である。

Yoshida [2018]で示されたこれら 2 点の解決により、2 段階推定による最尤推定法が確立したことになる。

### 3.2. 疑似標本の生成

日次収益率そのものあるいは GARCH(1,1)/EGARCH(1,1)でフィルタリングした基準化残差 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ から生成した疑似標本 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\}$ に対して、AC 非対称  $t$ 、GH 非対称  $t$ 、(対称な)  $t$ 、正規の各接合関数を推定し、情報量規準 (AIC、BIC) を比較して用いるべき接合関数を選択していく。

GARCH(1,1)/EGARCH(1,1)でのフィルタリングは、ボラティリティ・クラスタリングなどの現象に対応するものである。日次収益率 $r_t$ を

$$r_t = \mu + \epsilon_t = \mu + \sigma_t z_t \quad (30)$$

と表現し、時点 $t$ でのボラティリティ $\sigma_t$ の時系列をモデリングする。GARCH(1,1)であれば、

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \epsilon_{t-1}^2 \quad (31)$$

となり、EGARCH(1,1)であれば、

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \alpha z_{t-1} + \gamma(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|) \quad (32)$$

となる。本稿では、以下、GARCH(1,1)での分析結果は省略する。EGARCH(1,1)のパラメータ推定は、統計分析ソフト R の `rugarch` パッケージを利用する。基準化誤差  $z_t$  の分布として、Yoshida [2018] では標準正規分布を採用して日米欧の株価収益率を分析したが、本稿では標準化された  $t$  分布を採用して、TOPIX33 業種のうち、銀行業 (TPNBK)、保険業 (TPINSU)、証券・商品先物取引 (TPSECR) の金融 3 業種の株価収益率を分析する。

疑似標本  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\}$  は、 $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{id})^\top$  として

$$u_{ij} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N 1_{\{x_{kj} \leq x_{ij}\}} \quad (33)$$

で生成する。経験分布の 1 つであるが、 $1/N$  ずつ増えるのではなく、 $1/(N+1)$  ずつ増えるのが特徴で、これにより  $0 < u_{ij} < 1$  となり、分位点が  $\pm\infty$  に発散しないようにしている。

### 3.3. 3 業種株価収益率の接合関数の最尤推定

TOPIX33 業種のうち金融 3 業種の日次株価収益率から生成される疑似標本  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\}$  を用いて、4 つの接合関数 (AC 非対称  $t$ 、GH 非対称  $t$ 、Student- $t$ 、正規) を最尤推定する。

表 1 は、危機時 6 年間 (2006-10-1~2012-9-30) の日次データから日次収益率 (Unfilter) と EGARCH(1,1)でのフィルタリングした収益率から算出した疑似標本から 4 つの接合関数を最尤推定した結果である。この結果から、危機時にフィルタリングをしないと、AC 非対称  $t$  や (対称)  $t$  接合関数が選ばれ、自由度は小さく裾依存性が強いことがわかる。危機時にフィルタリングすると、AC 非対称  $t$  が選ばれ、自由度は大きくなる (裾依存性は低下する) 一方、非対称性は強くなることがわかる。

表 2 は、平時 6 年間 (2012-10-1~2018-9-30) の日次データから算出した疑似標本から 4 つの接合関数を最尤推定した結果である。平時では、GH 非対称  $t$  が選ばれている。フィルタリングをしないと、自由度は危機時 (4.15) ほどではないが小さいことがわかる。フィルタリングすると、自由度は大きくなるが、危機時 (8.17) ほどにはならず、非対称性は若干強くなることがわかる。

表 1 危機時 (2006-10-1~2012-9-30) での接合関数推定パラメータ

	Unfilter				EGARCH(1,1)			
	AC 非対称 $t$	GH 非対称 $t$	Student- $t$	正規	AC 非対称 $t$	GH 非対称 $t$	Student- $t$	正規
$\rho_{21}$	0.797	0.776	0.779	0.771	0.821	0.770	0.774	0.774
$\rho_{31}$	0.850	0.835	0.836	0.835	0.863	0.824	0.827	0.824
$\rho_{32}$	0.768	0.744	0.747	0.727	0.786	0.724	0.730	0.716
$\delta, \gamma$	-0.382	-0.092			-0.580	-0.236		
$\nu$	4.152	4.162	4.235		8.170	8.243	8.411	
対数尤度	<b>1704.07</b>	1704.03	1701.31	1575.33	<b>1573.20</b>	1572.24	1568.34	1532.15
AIC	<b>-3398.14</b>	-3398.06	-3394.63	-3144.66	<b>-3136.40</b>	-3134.48	-3128.69	-3058.29
BIC	-3371.67	-3371.59	<b>-3373.45</b>	-3128.78	<b>-3109.93</b>	-3108.01	-3107.51	-3042.41

注) 対数尤度は最大、AIC、BIC は最小のものを太字で示している。

表 2 平時 (2012-10-1~2018-9-30) での接合関数推定パラメータ

	Unfilter				EGARCH(1,1)			
	AC 非対称 $t$	GH 非対称 $t$	Student- $t$	正規	AC 非対称 $t$	GH 非対称 $t$	Student- $t$	正規
$\rho_{21}$	0.849	0.810	0.816	0.814	0.844	0.791	0.799	0.797
$\rho_{31}$	0.866	0.832	0.837	0.826	0.864	0.817	0.823	0.813
$\rho_{32}$	0.817	0.769	0.776	0.780	0.809	0.743	0.752	0.751
$\delta, \gamma$	-0.545	-0.218			-0.609	-0.285		
$\nu$	6.161	5.913	6.188		7.795	7.456	7.878	
対数尤度	1800.08	<b>1801.01</b>	1795.51	1714.21	1647.35	<b>1647.66</b>	1641.14	1592.10
AIC	-3590.16	<b>-3592.02</b>	-3583.02	-3422.43	-3284.70	<b>-3285.32</b>	-3274.28	-3178.19
BIC	-3563.69	<b>-3565.55</b>	-3561.85	-3406.55	-3258.24	<b>-3258.86</b>	-3253.11	-3162.31

#### 4. 非対称 $t$ 接合関数を用いたリスク管理

##### 4.1. 3 業種ポートフォリオのリスク量

3.3 節で取り上げた金融 3 業種の株価指数を用いて、等ウェイト投資 (元本  $A = 100$ ) のポートフォリオを想定し、翌営業日までの Value-at-Risk (VaR) と期待ショートフォール (ES) を 5 万パスのシミュレーションで算出する。3.3 節の観測期間に沿って、危機時で求めたリスク量が表 3 であり、平時で求めたリスク量が表 4 である。表 3 より、危機時のフィルタリングなしでのリスク量は大きく、フィルタリングすると抑えられることがわかる。低水準 (90%) の VaR は正規接合関数によるものが大きくなることがあることがわかる。表 4 より、平時でのリスク量は小さく、フィルタリングするとさらに抑えられることがわかる。低水準 (90%~97.5%) の VaR は正規接合関数での値が大きくなることがある。

表 3 危機時 (2006-10-1~2012-9-30) でのリスク量

	Unfilter				EGARCH(1,1)			
	AC 非 対称 $t$	GH 非 対称 $t$	Student- $t$	正規	AC 非 対称 $t$	GH 非 対称 $t$	Student- $t$	正規
VaR(99%)	6.212	6.389	<b>6.464</b>	6.144	4.242	<b>4.270</b>	4.147	4.241
VaR(97.5%)	4.625	4.614	<b>4.704</b>	4.571	<b>3.458</b>	3.444	3.415	3.455
VaR(90%)	2.553	2.571	<b>2.602</b>	2.584	2.149	2.123	2.137	<b>2.149</b>
ES(99%)	8.712	8.874	<b>8.891</b>	8.436	5.108	<b>5.180</b>	4.975	5.117
ES(97.5%)	6.673	6.738	<b>6.793</b>	6.509	4.311	<b>4.342</b>	4.237	4.318
ES(90%)	4.171	4.186	<b>4.227</b>	4.123	<b>3.083</b>	3.076	3.051	3.078

注) 太字は各水準のリスク量で最も大きな値をとったものを示している。

表 4 平時 (2012-10-1~2018-9-30) でのリスク量

	Unfilter				EGARCH(1,1)			
	AC 非 対称 $t$	GH 非 対称 $t$	Student- $t$	正規	AC 非 対称 $t$	GH 非 対称 $t$	Student- $t$	正規
VaR(99%)	<b>3.953</b>	3.895	3.852	3.819	3.679	<b>3.681</b>	3.573	3.491
VaR(97.5%)	2.920	2.900	2.869	<b>2.923</b>	2.819	<b>2.834</b>	2.803	2.748
VaR(90%)	1.633	1.631	1.645	<b>1.659</b>	1.694	1.685	<b>1.709</b>	1.696
ES(99%)	<b>5.603</b>	5.520	5.290	5.038	4.638	<b>4.800</b>	4.579	4.292
ES(97.5%)	<b>4.258</b>	4.189	4.084	3.987	3.760	<b>3.832</b>	3.710	3.548
ES(90%)	<b>2.648</b>	2.628	2.598	2.594	2.540	<b>2.554</b>	2.527	2.470

## 4.2. VaR のバックテスト

次に、観測期間を 1,500 日間として、危機時、平時の各 1,000 日バックテストする。VaR については、実現損失が VaR を上回る頻度  $\pi_1$  を用いた Kupiec [1995] の無条件カバレッジ (UC) 検定 ( $\chi^2$  乗検定) を行う。また、 $\pi_{01}$  (前日に実現損失が VaR を超えない条件で、実現損失が VaR を上回る頻度) と  $\pi_{11}$  (前日に実現損失が VaR を超えた条件で、実現損失が VaR を上回る頻度) も用いた Christoffersen [1998] の独立性 (IND) 検定と条件付きカバレッジ (CC) 検定を行う。

危機時 (2007-8-28~2011-9-30) での VaR バックテスト結果は、表 5 のとおりであり、データがフィルタリングされていないと、無条件カバレッジ検定は 1% 水準で棄却されることがわかる。一方、データがフィルタリングされていると、無条件カバレッジ検定は 5% 水準でも棄却されないことがわかる。

表 5 危機時 (2007-8-28~2011-9-30) での VaR バックテスト結果

モデル		$1-p$	$\pi_1$	$\pi_{01}$	$\pi_{11}$	UC	IND	CC
Unfilter	AC 非対称 $t$	1%	2.3%	2.1%	8.7%	<b>0.0%</b>	27.5%	<b>0.1%</b>
	GH 非対称 $t$	1%	2.4%	2.1%	12.5%	<b>0.0%</b>	6.1%	<b>0.0%</b>
	Student- $t$	1%	2.4%	2.1%	12.5%	<b>0.0%</b>	6.1%	<b>0.0%</b>
	正規	1%	2.5%	2.3%	12.0%	<b>0.0%</b>	7.6%	<b>0.0%</b>
	AC 非対称 $t$	2.5%	4.8%	4.7%	6.3%	<b>0.0%</b>	89.8%	<b>0.0%</b>
	GH 非対称 $t$	2.5%	4.7%	4.6%	6.4%	<b>0.0%</b>	86.7%	<b>0.0%</b>
	Student- $t$	2.5%	4.8%	4.7%	6.3%	<b>0.0%</b>	89.8%	<b>0.0%</b>
	正規	2.5%	4.8%	4.7%	6.3%	<b>0.0%</b>	89.8%	<b>0.0%</b>
EGARCH(1,1)	AC 非対称 $t$	1%	1.4%	1.3%	7.1%	23.2%	41.7%	20.4%
	GH 非対称 $t$	1%	1.3%	1.2%	7.7%	36.4%	36.7%	24.3%
	Student- $t$	1%	1.5%	1.4%	6.7%	14.0%	46.8%	15.7%
	正規	1%	1.4%	1.3%	7.1%	23.2%	41.7%	20.4%
	AC 非対称 $t$	2.5%	2.9%	2.8%	6.9%	43.2%	53.6%	39.4%
	GH 非対称 $t$	2.5%	2.9%	2.8%	6.9%	43.2%	53.6%	39.4%
	Student- $t$	2.5%	3.0%	2.9%	6.7%	32.9%	58.2%	36.1%
	正規	2.5%	2.9%	2.8%	6.9%	43.2%	53.6%	39.4%

平時 (2014-8-29~2018-9-28) での VaR バックテスト結果は、表 6 のとおりであり、無条件カバレッジ検定は 5%水準でも棄却されないものの、データがフィルタリングされていないと、独立性検定と条件付きカバレッジ検定は 5%水準で棄却されることがわかる。

表 6 平時 (2014-8-29~2018-9-28) での VaR バックテスト結果

モデル		$1-p$	$\pi_1$	$\pi_{01}$	$\pi_{11}$	UC	IND	CC
Unfilter	AC 非対称 $t$	1%	0.8%	0.8%	0.0%	50.8%	NaN	NaN
	GH 非対称 $t$	1%	0.9%	0.9%	0.0%	74.4%	NaN	NaN
	Student- $t$	1%	0.9%	0.8%	11.1%	74.4%	18.4%	17.4%
	正規	1%	0.9%	0.8%	11.1%	74.4%	18.4%	17.4%
	AC 非対称 $t$	2.5%	2.1%	1.8%	14.3%	40.2%	<b>2.9%</b>	<b>2.1%</b>
	GH 非対称 $t$	2.5%	2.1%	1.8%	14.3%	40.2%	<b>2.9%</b>	<b>2.1%</b>
	Student- $t$	2.5%	2.1%	1.8%	14.3%	40.2%	<b>2.9%</b>	<b>2.1%</b>
	正規	2.5%	2.1%	1.8%	14.3%	40.2%	<b>2.9%</b>	<b>2.1%</b>
EGARCH(1,1)	AC 非対称 $t$	1%	0.8%	0.7%	12.5%	50.8%	14.5%	11.7%
	GH 非対称 $t$	1%	0.8%	0.7%	12.5%	50.8%	14.5%	11.7%
	Student- $t$	1%	0.9%	0.8%	11.1%	74.4%	18.4%	17.4%
	正規	1%	0.9%	0.8%	11.1%	74.4%	18.4%	17.4%
	AC 非対称 $t$	2.5%	1.9%	1.7%	10.5%	20.3%	14.4%	6.4%
	GH 非対称 $t$	2.5%	1.9%	1.7%	10.5%	20.3%	14.4%	6.4%
	Student- $t$	2.5%	1.9%	1.7%	10.5%	20.3%	14.4%	6.4%
	正規	2.5%	1.8%	1.7%	5.6%	13.5%	62.0%	20.2%

### 4.3. 期待ショートフォールのパフォーマンス

期待ショートフォール (ES) については、標準的なバックテスト手法が確立されていない。Embrechts *et al.* [2005]は、信頼水準  $p = 1 - \alpha$  の ES の推定値  $ES_t(\alpha)$  について、同水準の VaR も用いた乖離  $V_1^{ES}, V_2^{ES}$  を定義し、その絶対値  $|V_1^{ES}|$  と  $|V_2^{ES}|$  の平均  $V^{ES} \equiv (|V_1^{ES}| + |V_2^{ES}|)/2$  が小さいものを推奨している。  $V_1^{ES}$  と  $V_2^{ES}$  は

$$V_1^{ES} = \frac{\sum_{t=t_0}^{t_1} (R_t^1 - (-ES_t(\alpha))) \mathbf{1}_{\{R_t^1 < -VaR_t(\alpha)\}}}{\sum_{t=t_0}^{t_1} \mathbf{1}_{\{R_t^1 < -VaR_t(\alpha)\}}}, V_2^{ES} = \frac{\sum_{t=t_0}^{t_1} D_t \mathbf{1}_{\{D_t < D(\alpha)\}}}{\sum_{t=t_0}^{t_1} \mathbf{1}_{\{D_t < D(\alpha)\}}} \quad (34)$$

で定義される乖離である。ただし、 $R_t^1$  は時点  $t$  での 1 日後のポートフォリオ収益率であり、 $D_t \equiv R_t^1 - (-ES_t(\alpha))$  とし、 $D(\alpha)$  は  $D_t$  の経験  $\alpha$  分位点とする。

危機時 (2007-8-28~2011-9-30) での ES のパフォーマンスとして各モデルの  $V^{ES}$  を示した結果は表 7 のとおりであり、平時 (2014-8-29~2018-9-28) での ES パフォーマンス結果は表 8 である。危機時では非対称  $t$  接合関数での ES のパフォーマンスが優れており、平時でも非対称  $t$  接合関数か  $t$  接合関数での ES のパフォーマンスが優れてことがわかる。

表 7 危機時 (2007-8-28~2011-9-30) での ES パフォーマンス結果

モデル	$\alpha$	AC 非対称 $t$	GH 非対称 $t$	Student- $t$	正規
Unfilter	1%	1.169	<b>1.110</b>	1.199	1.487
	2.5%	<b>1.009</b>	1.028	1.062	1.187
	5%	<b>0.825</b>	0.833	0.858	0.916
	10%	<b>0.620</b>	0.640	0.651	0.679
EGARCH(1,1)	1%	<b>0.272</b>	0.316	0.306	0.453
	2.5%	<b>0.144</b>	0.168	0.232	0.261
	5%	<b>0.110</b>	0.112	0.159	0.160
	10%	<b>0.105</b>	0.116	0.154	0.148

注) 太字は各水準で乖離の絶対値平均  $V^{ES}$  が最も小さいものを示している。

表 8 平時 (2014-8-29~2018-9-28) での ES パフォーマンス結果

モデル	$\alpha$	AC 非対称 $t$	GH 非対称 $t$	Student- $t$	正規
Unfilter	1%	0.135	<b>0.061</b>	0.155	0.172
	2.5%	0.125	0.124	<b>0.123</b>	0.129
	5%	0.310	0.291	<b>0.287</b>	0.290
	10%	0.221	<b>0.220</b>	0.221	0.221
EGARCH(1,1)	1%	<b>0.423</b>	0.428	0.470	0.506
	2.5%	0.162	<b>0.161</b>	0.198	0.224
	5%	0.066	0.061	<b>0.057</b>	0.069
	10%	<b>0.074</b>	0.074	0.079	0.079

## 5. まとめと課題

本稿では、非対称  $t$  接合関数の最尤推定法について Yoshiba [2018] に沿ってその概要を紹介した。AC、GH いずれの非対称  $t$  接合関数でも、分位点の単調補間と、コレスキー分解・三角関数を用いた再パラメータ化は最尤推定に有効であることを示した。

株価収益率の実証分析では、情報量規準で AC 非対称  $t$  接合関数が選ばれることが多く、歪みパラメータ  $\delta$  は負、自由度  $\nu$  は小さな値となり、下側裾依存性が強いことが示された。日次収益率について EGARCH でフィルタリングすると、裾依存性は弱まる ( $\nu$  は大きくなる) が、非対称性パラメータ  $\delta$  は有意に負で、より強まる傾向があることが示された。

金融 3 業種のポートフォリオのリスクについては、特に危機時を含む期間では、リスクファクターである業種別株価収益率についてフィルタリングすることが重要であり、ボラティリティ変化を考慮しないとリスク量を誤る可能性が高いことを指摘した。

高水準の VaR は、非対称  $t$  接合関数を用いた方が正確になりやすく、ES のパフォーマンスは非対称  $t$  接合関数を用いると良くなる傾向があることを示した。低水準 (90%程度) の VaR は、正規接合関数での値が大きいことがある。この点は、90%程度の水準では裾依存性は効かないことを示唆している。

今後の課題としては、理論面からは、裾の非対称性評価 (Kato, Yoshiba and Eguchi [2020]) との関係、特に、非対称正規接合関数を含めた漸近特性の分析が挙げられる。実用面では、AC 非対称  $t$  接合関数の利用について、自由度  $\nu$  を整数に限定した場合の分析や高速化が挙げられるほか、ヴァイン (vine) 接合関数への取り込みが挙げられる。また、夷藤・中村 [2019] で検討された GH 非対称  $t$  接合関数のパラメータの時間変化を捉えるモデルについて、AC 非対称  $t$  接合関数にも適用できるように拡張し、実証分析での比較分析を行うことが望まれる。

## 参考文献

- Azzalini, A. and Capitanio, A. [2003], "Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew  $t$ -distribution," *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **65**(2), 367–389.
- Azzalini, A. and Dalla Valle, A. [1996], "The multivariate skew-normal distribution," *Biometrika*, **83**(4), 715–726.
- Banachewicz, K. and van der Vaart, A. [2008], "Tail dependence of skewed grouped  $t$ -distributions," *Statistics & Probability Letters*, **78** (15), 2388–2399.

- Bauwens, L. and Laurent, S. [2005], “A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models,” *Journal of Business & Economic Statistics*, **23**(3), 346–354.
- Christoffersen, P. F. [1998] “Evaluating interval forecasts,” *International Economic Review*, **39**(4), 841–862.
- Christoffersen, P., Errunza, V., Jacobs, K. and Langlois, H. [2012] “Is the potential for international diversification disappearing? A dynamic copula approach,” *Review of Financial Studies*, **25**(12), 3711–3751.
- Coles, S., Heffernan, J. and Tawn, J. [1999], “Dependence measures for extreme value analyses,” *Extremes*, **2**(4), 339–365.
- Demarta, S. and McNeil, A. J. [2005], “The  $t$  copula and related copulas,” *International Statistical Review*, **73**(1), 111–129.
- Embrechts, P., Kaufmann, R. and Patie, P. [2005] “Strategic long-term financial risks: Single risk factors,” *Computational Optimization and Applications*, **32**(1–2), 61–90.
- Fernández, C. and Steel, M. F. J. [1998], “On Bayesian modeling of fat tails and skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, **93**(441), 359–371.
- Ferreira, J. T. A. S. and Steel, M. F. J. [2007], “A new class of skewed multivariate distributions with applications to regression analysis,” *Statistica Sinica*, **17**(2), 505–529.
- Fung, T. and Seneta, E. [2010], “Tail dependence for two skew  $t$  distributions,” *Statistics & Probability Letters*, **80**(9–10), 784–791.
- 夷藤翔・中村信弘 [2019], 「ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いた新興国国債市場の相互依存構造に関する研究」, 『ジャフイー・ジャーナル』, **17**, 45–66.
- Joe, H. [2006], “Discussion of ‘Copulas: tales and facts,’ by Thomas Mikosch,” *Extremes*, **9**(1), 37–41.
- Jones, M.C. [2002], “Multivariate  $t$  and beta distributions associated with the multivariate  $F$  distribution,” *Metrika*, **52**(3), 215–231.
- Kato, S., Yoshihara, T. and Eguchi, S. [2020], “Copula-based measures of asymmetry between the lower and upper tail probabilities,” <https://arxiv.org/abs/2008.01314>.
- Kupiec, P. [1995], “Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models,” *Journal of Derivatives*, **3**(2), 73–84.
- Ledford, A. W. and Tawn, J. A. [1996], “Statistics for near independence in multivariate extreme values,” *Biometrika*, **83**(1), 169–187.
- Padoan, S. A. [2011], “Multivariate extreme models based on underlying skew- $t$  and skew-normal distributions,” *Journal of Multivariate Analysis*, **102**(5), 977–991.
- Reiss, R. D. [1989], *Approximate Distributions of Order Statistics: With Applications to Non-parametric Statistics*, Springer-Verlag.



- Rosco, J.F., Jones, M.C. and Pewsey, A. [2011], “Skew  $t$  distributions via the sinh-arcsinh transformation,” *Test*, **20**(3), 630–652.
- Sahu, S. K., Dey, D. K. and Branco, M. D. [2003], “A new class of multivariate skew distributions with applications to Bayesian regression models,” *Canadian Journal of Statistics*, **31**(2), 129–150.
- Smith, M. S., Gan, Q. and Kohn, R. J. [2012], “Modelling dependence using skew  $t$  copulas: Bayesian inference and applications,” *Journal of Applied Econometrics*, **27**(3), 500–522.
- Yoshihara, T. [2018], “Maximum likelihood estimation of skew- $t$  copulas with its applications to stock returns,” *Journal of Statistical Computation and Simulations*, **88**(13), 2489–2506.
- 吉羽 要直 [2020], 「非対称  $t$  接合関数の性質と統計的推定方法」, 『統計数理』, **68**(1), 45–63.

Graduate School of Management, Tokyo Metropolitan University  
18F 1-4-1 Marunouchi, Chiyoda-ku, Tokyo 100-0005 Japan  
E-mail address: tyoshihara@tmu.ac.jp

東京都立大学・大学院経営学研究科 吉羽 要直