

# ランダム力学系における異常拡散

佐藤讓\*

(北海道大学 電子科学研究所 / 理学研究院数学部門,

London Mathematical Laboratory)

Yuzuru Sato

(RIES / Department of Mathematics, Hokkaido University,

London Mathematical Laboratory)

## 1 決定論力学系における異常拡散

ブラウン運動で基礎付けられる拡散においては, 粒子集団の平均二乗変位 (mean square displacement) は長時間極限で時間  $t$  に比例して増大し, 拡散係数  $D$  はその比例係数で与えられる;

$$\langle x^2 \rangle \propto t, \quad D \rightarrow \frac{\langle x^2 \rangle}{2t} \quad (t \rightarrow \infty).$$

これに対して異常拡散では平均二乗変位が時間  $t$  に関して非線形に増大する;

$$\text{劣拡散: } \langle x^2 \rangle \propto t^\alpha, \quad \alpha < 1,$$

$$\text{優拡散: } \langle x^2 \rangle \propto t^\alpha, \quad \alpha > 1.$$

拡散については, 一般化ランジュバン方程式や非整数フォッカー・プランク方程式といった, 直接的な粗視化記述である確率モデルの研究が成熟している [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. 一方, パスワイズな運動の記述である決定論力学系モデルについては, ハミルトン系の淀み層 [9, 1, 2, 10], Pomeau-Manneville 間欠性 [9, 1, 2, 10], 多角

---

\*ysato@math.sci.hokudai.ac.jp

形ビリヤード系 [11] における異常拡散などがあげられるが、これらについては未解決の問題が多々残っている。

最も単純な決定論拡散のモデルは以下の区分線形な開放力学系 (Open dynamical systems) で与えられる;

$$x_{t+1} = M_a(x_t), \quad (1)$$

$$M_a(x) = \begin{cases} ax & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ a(x-1) + 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}, \quad (2)$$

$$M_a(x+1) = M_a(x) + 1, \quad (3)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad a > 2. \quad (4)$$

この区分線形写像モデルでは局所的な一様双曲カオスによりランダムウォークが実現され、拡散が生じる。適当な初期値から出発した軌道サンプルと平均二乗変位をを図 1 に示す。

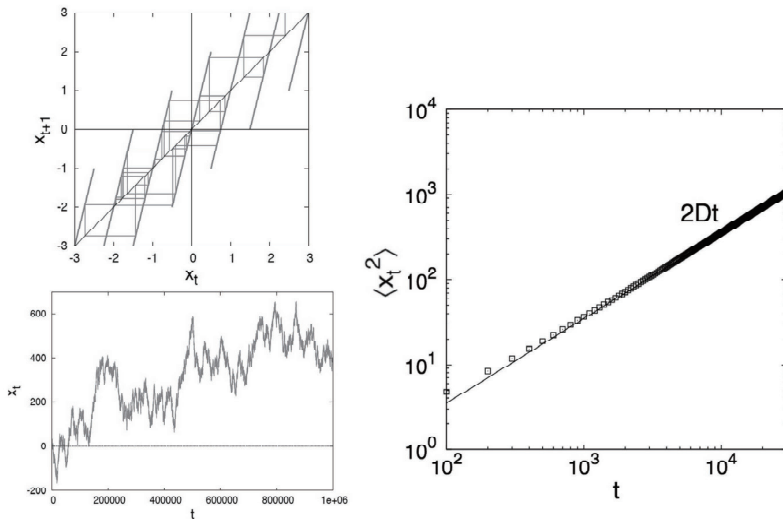


図 1:  $x_{t+1} = M_a(x_t)$  の  $a = 4$  の場合の cobweb プロット (左上), 時系列 (左下), および平均二乗変位 (右).

極めて単純なモデルではあるが、直感に反して、例えば拡散係数が軌道拡大率  $a$  のフラクタル関数となる [11] といった性質が知られている。さらに  $M_a(x)$  を間欠性を示す次の Pomeau-Manneville 写像  $L_z(x)$ ,  $R_z(x)$  で置き換えると、異常拡散の決

定論力学系モデルが得られる [12, 13];

$$\text{劣拡散: } L_z(x) = \begin{cases} x + ax^z & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ x - a(1-x)^z & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}, \quad (5)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad a > 2, \quad z > 2, \quad (6)$$

$$\text{優拡散: } R_z(x) = \begin{cases} x + ax^z - 1 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ x - a(1-x)^z + 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}, \quad (7)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad a > 2, \quad z > 2. \quad (8)$$

他に例えばクライミング・サイン写像

$$x_{t+1} = x_t + c \sin(2\pi x_t), \quad x_t \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

においても異常拡散 (優拡散) が生じることが知られている [11].

## 2 ランダム力学系における異常拡散

最も単純な決定論拡散モデルである区分線形系のパラメーター  $a$  を確率変数  $\xi$  におきかえることにより, 拡散のランダム力学系モデルを与えよう.

$$x_{t+1} = M_\xi(x_t), \quad (9)$$

$$M_\xi(x) = \begin{cases} \xi x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \xi(x-1) + 1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$M_\xi(x+1) = M_\xi(x) + 1, \quad (11)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{Prob}[\xi = b] = p, \quad \text{Prob}[\xi = a] = 1 - p, \quad 0 < b < 1, \quad 2 < a \quad (12)$$

このランダム区分線形写像では, 局所的な確率カオスによってランダムウォークが実現され, 拡散が生じる. とくに局所ダイナミクスが間欠的な場合, 具体的には Lyapunov 指数が 0 となる  $p = p^*$  において,  $\langle x \rangle \propto t^{1/2}$  である異常拡散が生じる [14].

例えば  $a = 4, b = 1/2$  のときには,  $0 \leq p < 2/3$  で通常拡散,  $p = 2/3$  で異常拡散が生じ,  $2/3 < p \leq 1$  の場合は全ての整数点が安定なランダムアトラクターとなる [14]. あるノイズ系列  $(\xi_i)$  について, 適当な初期値から出発したサンプル軌道と平均二乗変位を図 2 に示す.

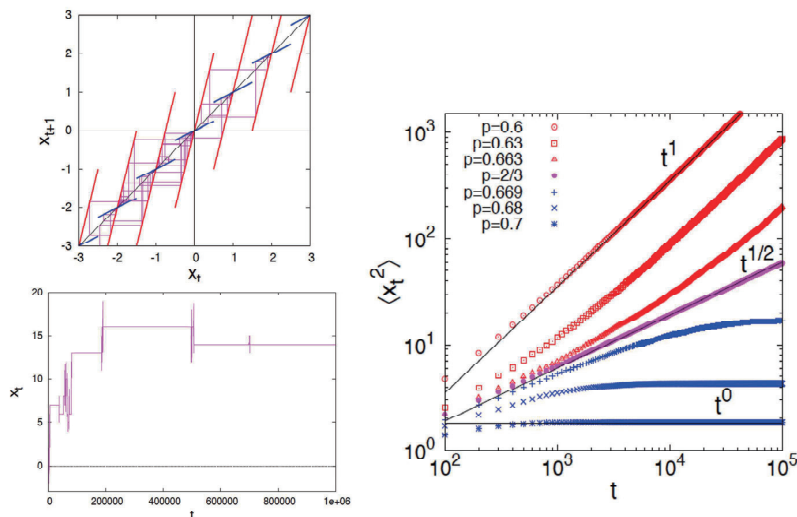


図 2:  $x_{t+1} = M_{\xi}(x_t)$ ,  $a = 4$ ,  $b = 1/2$ ,  $p = 2/3$  の場合の cobweb プロット (左上) と時系列 (左下). 平均二乗変位は  $p = 0.6, 0.63, 0.663, 2/3, 0.669, 0.68, 0.7$  についてプロットした (右).  $p = 2/3$  のとき  $\langle x^2 \rangle \propto t^{1/2}$  である異常拡散が生じる.

このランダム区分解像モデルにおいて、とくに  $a = 1/2, b = 2$  とした閉じたランダム力学系 (closed random dynamical systems) は  $1/2 < p \leq 1$  のとき可解な確率カオス系となり [15],  $p = 1/2$  で Lyapunov 指数が 0 の無限エルゴード系となる [14]. 他のランダム力学系, 例えばランダムクライミング・サイン写像;

$$x_{t+1} = x_n + \xi_t \sin(2\pi x_t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{Prob}[\xi = 0.2] = p, \quad \text{Prob}[\xi = 0.8] = 1 - p,$$

においても, Lyapunov 指数が 0 となる  $p \simeq 0.505702$  のとき, 同じクラスの異常拡散が生じる [14].

異常拡散を示すこれらのランダム力学系において, 局所的なダイナミクスの大域的統計性は概ねオンオフ間欠性 [16, 17] と同じだが, 局所的統計性と動力学は異なる. ランダム力学系で生じるこのような間欠性を確率間欠性とよぶ. 確率間欠性は確率分岐点直上でしばしば生じる. 前述の性質を持つ確率間欠性は低次元のランダム力学系において普遍性を持つと考えられる [14]. 確率間欠性のタイプあるいは普遍クラスに関しては著者の知る限り研究がない. 一次元ランダム写像で上で述べたクラスと異なる統計性を持つ間欠性は今のところ見つかっていない.

別の観点からこの現象を解釈することもできる. 開放系における雑音誘起現象

については例えば [18, 19] などがあげられるが, 拡散のランダム力学系モデルにおいて, 決定論極限では通常拡散を示しているが, ノイズを加えると異常拡散を示すことがある. このような形で生じた異常拡散は開放系における雑音誘起現象であるとみなせる. つまり

ランダムウォークにノイズを加えると, 拡散係数が0になる (あるいは発散する).

という現象である. このような現象は, 例えばクライミング・サイン写像で生成される決定論拡散にノイズを加えた場合にも生じうる.

### 3 結び

近年複数の分野で非自励力学系, ランダム力学系の理論の重要性が認識されている. 本稿で議論した決定論拡散のようなごく古典的な問題に関しても, ランダム化によって生じる非自明な現象が存在する. ランダム力学系で生じる様々な複雑現象を理解するには, 既存の力学系理論・エルゴード理論の概念を外挿するだけでなく, 新しい数学的・物理的な概念を構築していくことが必要である.

### 参考文献

- [1] M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky, and J. Klafter. Strange kinetics. *Nature*, 363:31–37, 1993.
- [2] J. Klafter, M. F. Shlesinger, and G. Zumofen. Beyond brownian motion. *Phys. Today*, 49:33–39, 1996.
- [3] R. Klages, G. Radons, and I.M. Sokolov, editors. *Anomalous transport*. Wiley-VCH, Berlin, 2008.
- [4] Felix Höfling and Thomas Franosch. Anomalous transport in the crowded world of biological cells. *Rep. Prog. Phys.*, 76:046602/1–50, 2013.
- [5] Y. Meroz and I.M. Sokolov. A toolbox for determining subdiffusive mechanisms. *Phys. Rep.*, 573:1–29, 2015.

- [6] G.M. Viswanathan, M.G.E. da Luz, E.P. Raposo, and H.E. Stanley. *The Physics of Foraging*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [7] V. Zaburdaev, S. Denisov, and J. Klafter. Lévy walks. *Rev. Mod. Phys.*, 87:483–529, 2015.
- [8] Ralf Metzler, Jae-Hyung Jeon, Andrey G. Cherstvy, and Eli Barkai. Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 16:24128–24164, 2014.
- [9] A. Zacherl, T. Geisel, J. Nierwetberg, and G. Radons. Power spectra for anomalous diffusion in the extended sinai billiard. *Phys. Lett.*, 114A:317–321, 1986.
- [10] G.M. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Phys. Rep.*, 371:461–580, 2002.
- [11] R. Klages. *Microscopic chaos, fractals and transport in nonequilibrium statistical mechanics*, volume 24 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific, Singapore, 2007.
- [12] T. Geisel and S. Thomae. Anomalous diffusion in intermittent chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1936–1939, 1984.
- [13] T. Geisel, J. Nierwetberg, and A. Zacherl. Accelerated diffusion in Josephson junctions and related chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 54:616–619, 1985.
- [14] Yuzuru Sato and Rainer Klages. Anomalous diffusion in random dynamical systems. *Physical review letters*, 122(17):174101, 2019.
- [15] S Pelikan. Invariant densities for random maps of the interval. *Trans. Am. Math. Soc.*, 281(2):813–825, 1984.
- [16] H. Fujisaka and T. Yamada. A new intermittency in coupled dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, 74:918–921, 1985.

- [17] T. Harada, H. Hata, and H. Fujisaka. On-off diffusion: onset and statistics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:1557–1566, 1999.
- [18] Ying-Cheng Lai and Celso Grebogi. Noise-induced riddling in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 77(25):5047, 1996.
- [19] Christian S Rodrigues, Aleksei V Chechkin, Alessandro PS de Moura, Celso Grebogi, and Rainer Klages. Diffusion in randomly perturbed dissipative dynamics. *EPL (Europhysics Letters)*, 108(4):40002, 2014.