

## Markov operator cocycle の漸近的周期性

北見工業大学・工学部 中村 文彦

Fumihiko Nakamura

Department of engineering, Kitami Institute of Technology

東海大学・理学部 中野 雄史

Yushi Nakano

Department of Mathematics, Tokai University

本稿は, Lasota-Li-Yorke [2] および Komornik [3] によって示された「収斂的 (constrictive) マルコフ作用素は, 漸近周期的 (asymptotically periodic) である。」という命題を, ランダム力学系の性質として拡張した結果 [1] について, 定理を証明するための条件や設定をまとめたものである.

$(X, \mathcal{G}, m)$  を確率空間とし,  $L^1(X, m)$  を  $X$  上の  $m$  可積分関数全体の集合,  $L^1_+(X, m) := \{f \in L^1(X, m) \mid f \geq 0 \text{ } m\text{-a.e.}\}$ ,  $D(X, m) := \{f \in L^1_+(X, m) \mid \|f\|_m = 1\}$  とする.  $D(X, m)$  の元は密度関数と呼ばれる. 有界線形作用素  $P: L^1(X, m) \rightarrow L^1(X, m)$  がマルコフ作用素であるとは,

- $f \in L^1(X, m)$  かつ  $f \geq 0$   $m$ -a.e. ならば,  $Pf \geq 0$   $m$ -a.e. (正値性)
- $f \in L^1(X, m)$  かつ  $f \geq 0$   $m$ -a.e. ならば,  $\|Pf\|_m = \|f\|_m$  (ノルム不変性)

が成り立つときを言う. そして, マルコフ作用素  $P$  が漸近周期的 (asymptotically periodic) とは, ある自然数  $r \geq 1$ , 密度関数の列  $\{g_i\}_{i=1}^r \subset D(X, m)$ , 有界線形汎関数の列  $\{\lambda_i: L^1(X, m) \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^r$ , さらに  $\{1, \dots, r\}$  の置換  $\rho$  が存在して,

$$(i) \quad i \neq j \text{ ならば, } m(\text{supp}g_i \cap \text{supp}g_j) = 0,$$

$$(ii) \quad \text{すべての } i = 1, \dots, r \text{ に対して, } Pg_i = g_{\rho(i)},$$

$$(iii) \quad \text{任意の } f \in L^1(X) \text{ に対して, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P^n f - \sum_{i=1}^r \lambda_i(f) g_{\rho(i)} \right\|_m = 0,$$

が成り立つときを言う. これをランダム力学系の性質として拡張する.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とし,  $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$  を  $\mathbb{P}$ -保測な変換とする. 可測空間  $\Sigma$  に対して, 可測写像  $\Phi: \mathbb{N}_0 \times \Omega \times \Sigma \rightarrow \Sigma$  が  $\sigma$  を駆動系とする  $\Sigma$  上のランダム力学系であるとは,

$$\varphi_\omega^{(n+m)} = \varphi_{\sigma^n \omega}^{(n)} \circ \varphi_\omega^{(m)}, \quad \varphi_\omega^{(0)} = \text{id}_\Sigma$$

がすべての  $m, n \in \mathbb{N}_0$  と  $\omega \in \Omega$  について成り立つときをいう. ただし,  $\varphi_\omega^{(n)} = \Phi(n, \omega, \cdot)$ ,  $\sigma\omega = \sigma(\omega)$  である. このランダム力学系に対する一般論については [4] を参照せよ. 定義からすぐに,

$$\varphi_\omega^{(n)} = \varphi_{\sigma^{n-1}\omega} \circ \varphi_{\sigma^{n-2}\omega} \circ \dots \circ \varphi_\omega \quad (1)$$

であることがわかる. 逆に, 可測写像  $\varphi: \Omega \times \Sigma \rightarrow \Sigma: (\omega, x) \mapsto \varphi_\omega(x)$  に対し, (1) で定義される可測写像  $(n, \omega, x) \mapsto \varphi_\omega^{(n)}(x)$  はランダム力学系となる. これを  $\sigma$  上で  $\varphi$  によって誘導されるランダム力学系と呼び,  $(\varphi, \sigma)$  と表すことにする. 特に,  $\Sigma$  がバナッハ空間で,  $\varphi_\omega: \Sigma \rightarrow \Sigma$  がほとんどすべての  $\omega \in \Omega$  に対して線形作用素であるとき,  $(\varphi, \sigma)$  は Linear operator cocycle と呼ばれる.

**定義 1.**  $\mathbb{P}$ -保測な変換  $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$  上で, 可測写像  $P: \Omega \times L^1(X, m) \rightarrow L^1(X, m)$  から誘導される Linear operator cocycle  $(P, \sigma)$  が Markov operator cocycle であるとは, ほとんどすべての  $\omega \in \Omega$  に対して,  $P_\omega = P(\omega, \cdot): L^1(X, m) \rightarrow L^1(X, m)$  がマルコフ作用素であるときをいう.

以下の記号を導入し, Markov operator cocycle に対する漸近的周期性を定義する.

- $M(\Omega, E)$ :  $\Omega$  から可測空間  $E$  への可測写像全体の集合
- $(L^1(X, m))'$ :  $L^1(X, m)$  の双対空間

**定義 2.** Markov operator cocycle  $(P, \sigma)$  が漸近周期的 (asymptotically periodic) とは, ある自然数  $r \geq 1$ , 二つの写像の族  $\{g_i\}_{i=1}^r \subset M(\Omega, D(X, m))$  と  $\{\lambda_i\}_{i=1}^r \subset M(\Omega, (L^1(X, m))')$ , さらに  $\{1, \dots, r\}$  の置換  $\rho$  が存在し, ほとんどすべての  $\omega \in \Omega$  に対して,

$$(i) \quad i \neq j \text{ ならば, a.e. } \omega \in \Omega \text{ に対して, } m(\text{supp}g_i^\omega \cap \text{supp}g_j^\omega) = 0$$

$$(ii) \quad \text{すべての } i = 1, \dots, r \text{ と a.e. } \omega \in \Omega \text{ に対して, } \mathcal{L}_\omega g_i^\omega = g_{\rho(i)}^{\sigma\omega}$$

$$(iii) \quad \text{任意の } f \in L^1(X, m) \text{ と a.e. } \omega \in \Omega \text{ に対して, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{L}_\omega^{(n)} \left( f - \sum_{i=1}^r \lambda_i^\omega(f) g_i^\omega \right) \right\|_m = 0$$

が成り立つ時をいう.

次に, Markov operator cocycle に対する弱収斂性を定義する.

**定義 3.** Markov operator cocycle  $(P, \sigma)$  が弱収斂的 (weakly constrictive) とは, ある可測写像  $F: \Omega \rightarrow \mathcal{S}(L^1(X, m))$  が存在し, ほとんどすべての  $\omega \in \Omega$  に対して  $F_\omega = F(\omega)$  は  $L^1(X, m)$  の弱プレコンパクトな部分集合であり, さらに任意の可測写像  $f: \Omega \rightarrow D(X, m)$ ,  $\omega \mapsto f_\omega$  に対して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{\omega \in \Omega, g \in F_{\sigma^n \omega}} \|\mathcal{L}_\omega^{(n)} f_\omega - g\|_m = 0$$

が成り立つ時をいう. ただし,  $\mathcal{S}(L^1(X, m))$  は  $L^1(X, m)$  の空でない部分集合である.

ここで, 集合  $A \subset L^1(X, m)$  が弱プレコンパクトとは, 任意の関数列  $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset A$  に対して, ある収束部分列  $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$  が存在して, その極限  $f_*$  が  $f_* \in L^1(X, m)$  となるときをいう.

主定理が成り立つためには  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, P, \sigma)$  に対してさらに, 以下の仮定が必要となる.

(C1)  $\Omega$  は距離空間であり, 連結空間である.

(C2)  $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$  は同相写像であり, 極小 (minimal:  $\sigma$  によるすべての軌道が  $\Omega$  内で稠密) である.

(C3)  $P: \Omega \times L^1(X, m)$  は強連続 (任意の  $f \in L^1(X, m)$  に対して,  $\omega \mapsto P_\omega f$  が連続) である.

(C4) ある連続写像  $h: \Omega \rightarrow D(X, m)$  と定数  $C > 0$  が存在し,

$$P_\omega h_\omega = h_{\sigma\omega}, \quad \|h_\omega\|_{L^\infty(X, m)} < C$$

がすべての  $\omega \in \Omega$  について成り立つ.

定理 4. 仮定 (C1)-(C4) を満たす弱収斂的な *Markov operator cocycle* は漸近周期的である.

一般に, *Markov operator cocycle* が漸近周期的であれば弱収斂性が導出されるので, (C1)-(C4) の仮定の下では, これらの性質は同値となる. また, 仮定 (C1) の  $\Omega$  の連結性は, 一見不自然に見えるかもしれないが, 本質的な仮定であることを注意しておく ([1] 参照).

## References

- [1] F. Nakamura, Y. Nakano. "Asymptotic periodicity of Markov operators in random environments". (In preparation)
- [2] Lasota, A., T-Y. Li, and J. A. Yorke. "Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators." *Transactions of the American Mathematical Society* 286.2 (1984): 751-764.
- [3] Komorník, Jozef. "ASYMPTOTIC PERIODICITY OF THE ITERATES OF WEAKLY CONSTRUCTIVE MARKOV OPERATORS." *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 38.1 (1986): 15-27.
- [4] Arnold, Ludwig. "Random dynamical systems." *Dynamical systems*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995. 1-43.