Functional limit theorem for intermittent interval maps

京都大学大学院理学研究科・数学教室　世良 透
Toru Sera
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Kyoto University

1　序

中立不動点 (微分係数の絶対値が 1 である不動点) を持つ区間写像力学系を**間欠力学系** (intermittent dynamics, intermittent interval map) と呼ぶ．この力学系は間欠現象のモデルとして研究されてきた [9, 7]．間欠現象の例としては，対流が層流 (laminar phases) から乱流 (turbulent bursts) へ間欠的に遷移する現象が挙げられる．このような統計物理の文脈の下では，区間力学系の中立不動点**近傍**への滞在は持続的・安定な**層流**状態に対応し，中立不動点**遠方**への滞在は一時的・不安定な**乱流**状態に対応する．数学の観点からは，無限エルゴード理論によって中立不動点近傍・遠方の滞在時間に関する種々の分布極限定理が得られてきた．例えば [2, 12, 13, 18, 8, 11]．本稿では [10] に基づいてこれらの関数型・分布結合的拡張を考える．Boole 変換と呼ばれる典型例によって主結果を例示しよう．

例 1.1 (Boole 変換)．区間写像 $T : [0,1] \to [0,1]$ を次で定義する：

$$Tx = \frac{x(1-x)}{1-x-x^2} \quad \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right), \quad Tx = 1 - T(1-x) \quad \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right). \tag{1.1}$$

すぐに確かめられるように，$T0 = 0, T1 = 1$ かつ $T'0 = T'1 = 1$ である．すなわち 二点 $0, 1$ は T の中立不動点である．定数 $\delta \in (0, 1/2)$ を固定する．ξ を $[0,1]$-値確率変数であって分布が絶対連続なものとする．さらに「ξ を初期点とする力学系の軌道 $(\xi, T\xi, T^2\xi, \dots)$ が小区間 $[\delta, 1-\delta]$ へ到達する n 回目の時刻」を $\varphi(n)$ と書こう．この時，次の二つの関数

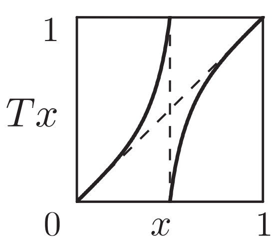

図 1: Boole 変換 T

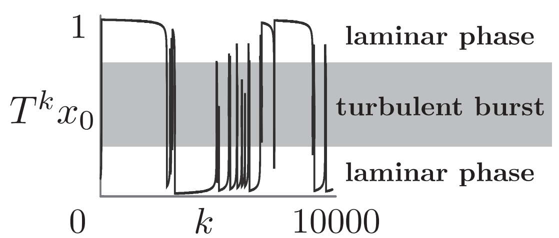

図 2: Boole 変換の軌道 $(x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots)$，ただし $x_0 = 0.1$

型収束が得られる：適当な定数 $C>0$ が取れて

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\varphi([C^{-1}\sqrt{n}t])}\mathbb{1}_{\{T^k\xi<\delta\}},\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\varphi([C^{-1}\sqrt{n}t])}\mathbb{1}_{\{T^k\xi>1-\delta\}}:t\geq 0\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}(S_-(t),S_+(t):t\geq 0),$$

ここで $\xrightarrow{\mathrm{d}}$ は分布収束 (distributional convergence) を意味し，$S_\pm(t)$ は i.i.d. なる 1/2-安定増加 Lévy 過程であって $\mathbb{E}[\exp(-\lambda S_\pm(t))]=\exp(-\sqrt{\lambda}t/2)$, $\lambda,t\geq 0$. 加えて，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[nt]}\mathbb{1}_{\{T^k\xi<\delta\}},\ \frac{C}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{[nt]}\mathbb{1}_{\{T^k\xi\in[\delta,1-\delta]\}},\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[nt]}\mathbb{1}_{\{T^k\xi>1-\delta\}}:t\geq 0\right)\\&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}\left(\int_0^t\mathbb{1}_{\{B(s)<0\}}\mathrm{d}s,\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}\int_0^t\mathbb{1}_{\{B(s)\in[-\varepsilon,\varepsilon]\}}\mathrm{d}s,\ \int_0^t\mathbb{1}_{\{B(s)>0\}}\mathrm{d}s:t\geq 0\right),\end{aligned}$$

ここで $B(t)$ は原点出発の 1 次元 Brown 運動であり，$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}\int_0^t\mathbb{1}_{\{B(s)\in[-\varepsilon,\varepsilon]\}}\mathrm{d}s$ は $B(t)$ の原点に関する局所時間で，Blumenthal–Getoor の意味で正規化されたものである．

2　設定と基本的性質

以下，本稿では常に Thaler [12] に倣い次の仮定を置く．

仮定 2.1. 区間写像 $T:[0,1]\to[0,1]$ は以下の三つの条件を満たす：

(1) (簡単のために) T は点対称的，すなわち $Tx=1-T(1-x)$, $x\in(1/2,1]$.

(2) 小区間 $[0,1/2]$ への制限 $T|_{[0,1/2]}:[0,1/2]\to[0,1]$ は C^2 かつ全単射.

(3) $T0=0$, $T'0=1$ かつ $T''x>0$, $x\in(0,1/2)$.

以上の仮定の下で成り立つ基本的な性質を述べよう．二点 0，1 は T の弱反発的な中立不動点である． T は定数倍を除き一意な絶対連続エルゴード的不変測度 $\mu(\mathrm{d}x)$ を持ち，しかもそれが Lebesgue 測度 $\mathrm{d}x$ と同値であることが知られている． 点 0 と 1 のどんな近傍も μ について測度無限大であり，その補集合は測度有限である．すなわち任意の $\delta\in(0,1/2)$ について

$$\mu([0,\delta))=\mu((1-\delta,1])=\infty\quad\text{かつ}\quad\mu([\delta,1-\delta])<\infty.$$

軌道 $(x,Tx,T^2x,\dots)$ は再帰的である．すなわち任意の Lebesgue 測度正な Borel 集合 $A\in\mathcal{B}([0,1])$ について

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{T^kx\in A\}}\underset{n\to\infty}{\to}\infty,\quad\text{a.e.}x.$$

言い換えると軌道は集合 A を無限回訪れる．また Birkhoff の個別エルゴード定理により

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{T^k x\in[\delta,1-\delta]\}} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \left(\text{言い換えると，}\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{T^k x\notin[\delta,1-\delta]\}} \underset{n\to\infty}{\to} 1\right), \quad \text{a.e.}x.$$

おおまかに言えば，ほとんど全ての初期点 x に関して，軌道 $(x, Tx, T^2x, \dots)$ は点 0 と 1 の近傍に集中している．

3 先行研究

以下では $\delta\in(0,1/2)$ を固定する． 我々は軌道の $[0,\varepsilon), [\varepsilon,1-\varepsilon]$ や $(1-\varepsilon,1]$ への滞在時間，特にその適切な意味でのスケーリング極限に興味がある．実は初期点に関する各点収束の意味では非自明なスケーリング極限は現れない．例えば [1, 4] を見よ．しかし以下で述べるように，**ランダム初期点**を置いた下で分布収束を考えると，非自明なスケーリング極限が現れる．ランダム初期点を置くということは，初期点に関する統計的振る舞いを見ている，という解釈ができる．

$\varphi(n)=\varphi(n,x)$ を初期点 x の下での軌道 $(x, Tx, T^2x, \dots)$ が小区間 $[\delta, 1-\delta]$ を訪れる n 回目の時刻とする:

$$\varphi(0)=0 \quad \text{かつ} \quad \varphi(n+1)=\min\{k>\varphi(n) : T^k x\in[\varepsilon,1-\varepsilon]\}, \quad n\geq 0.$$

更に $\overline{\mu}(\cdot) := \mu([\delta,1-\delta]\cap\cdot)$， $b_n := (\Gamma(1-\alpha)\overline{\mu}[\varphi(1)>n])^{-1}$ と置く．

命題 3.1 (Thaler [12])．仮定 2.1 が満たされているとする．$\alpha\in(0,1)$ を定数とする．このとき，次の二条件は同値：

(A) $Tx-x=(1-x)-T(1-x)$ は $x\to 0$ において $(1+1/\alpha)$ 次の正則変動関数，すなわち

$$\lim_{x\to 0}\frac{T(\lambda x)-\lambda x}{Tx-x}=\lambda^{1+1/\alpha}, \quad \lambda>0.$$

(B) $(b_n)_{n\geq 1}$ は $n\to\infty$ において α 次の正則変動数列．

中立不動点遠方への滞在時間に関して，Aaronson [2, 3] は以下の分布収束定理を得た：

定理 3.2 (Aaronson [2, 3] の Darling–Kac 型極限定理)．命題 3.1 の仮定の下，条件 (A), (B) は次と同値：

(C) ξ を $[0,1]$-値の確率変数であって分布が絶対連続なものとする．このとき

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{T^k\xi\in[\delta,1-\delta]\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \left(\frac{1}{S^{(\alpha)}}\right)^{\alpha}, \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

ただし $S^{(\alpha)}$ は α-片側安定分布を持つ確率変数で，その Laplace 変換は $\mathbb{E}\exp(-\lambda S^{(\alpha)}) = \exp(-\lambda^\alpha)$, $\lambda > 0$, で与えられる．

注 3.3. 極限分布 $(1/S^{(\alpha)})^\alpha$ は指数 α の Mittag-Leffler 分布と呼ばれる．特別な場合として $\alpha = 1/2$ のときはその分布関数が

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{1}{S^{(1/2)}}} \le t\right] = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-s^2/4)\mathrm{d}s, \quad t \ge 0,$$

と書き表わせる．

さらに Owada–Samorodnitsky [8] は Aaronson [2, 3] の結果を関数型に拡張した：

定理 3.4 (Owada–Samorodnitsky [8] の Bingham 型関数型極限定理)．命題 3.1 の仮定の下，条件 (A)，(B)，(C) は次と同値：

(D) ξ を $[0,1]$-値の確率変数であって分布が絶対連続なものとする．このとき

$$\left(\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{[nt]} \mathbb{1}_{\{T^k\xi \in [\delta, 1-\delta]\}} : t \ge 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \left(\left(S^{(\alpha)}\right)^{-1}(t) : t \ge 0\right), \quad \text{in } D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

ただし $S^{(\alpha)}(t)$ を α-安定増加 Lévy 過程で $S^{(\alpha)}(1) \overset{\mathrm{d}}{=} S^{(\alpha)}$ なるもの，$(S^{(\alpha)})^{-1}(t)$ はその右連続な広義逆関数，つまり $(S^{(\alpha)})^{-1}(t) = \inf\{u > 0 : S^{(\alpha)}(u) > t\}$ である．

注 3.5. 極限確率過程 $(S^{(\alpha)})^{-1}(t)$ は指数 α の Mittag-Leffler 確率過程と呼ばれる．スケーリング則を用いることで

$$(S^{(\alpha)})^{-1}(1) \overset{\mathrm{d}}{=} \left(\frac{1}{S^{(\alpha)}}\right)^\alpha$$

を容易に確かめることができる．

以上が中立不動点遠方への滞在時間について知られている極限定理である．他方で中立不動点近傍への滞在時間については，上記のものとは別種の極限分布が現れることが知られている：

定理 3.6 (Thaler [12] の Lamperti 型一般化逆正弦法則)．命題 3.1 の仮定の下，条件 (A)，(B)，(C)，(D) は次と同値：

(E) ξ を $[0,1]$-値の確率変数であって分布が絶対連続なものとする．このとき

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T^k\xi < \delta\}},\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T^k\xi > 1-\delta\}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \left(\frac{S_-^{(\alpha)}}{S_-^{(\alpha)} + S_+^{(\alpha)}},\ \frac{S_+^{(\alpha)}}{S_-^{(\alpha)} + S_+^{(\alpha)}}\right).$$

ただし $S_-^{(\alpha)}$ と $S_+^{(\alpha)}$ は i.i.d. な α-片側安定分布を持つ確率変数で，その Laplace 変換は $\mathbb{E}\exp(-\lambda S_\pm^{(\alpha)}) = \exp(-\lambda^\alpha/2)$, $\lambda > 0$, で与えられる．

注 3.7. 極限分布 $S_-^{(\alpha)}/(S_-^{(\alpha)}+S_+^{(\alpha)})$ は指数 α の対称な Lamperti 型一般化逆正弦分布と呼ばれる．特別な場合として $\alpha=1/2$ のとき，これは通常の逆正弦分布に一致する：

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_-^{(1/2)}}{S_-^{(1/2)}+S_+^{(1/2)}}\le t\right]=\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\pi\sqrt{s(1-s)}}=\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}),\quad 0\le t\le 1.$$

以上の定理を適用できる写像について例を挙げよう．

例 3.8. $\alpha\in(0,1)$ として，写像 $T:[0,1]\to[0,1]$ を次で定める：

$$Tx=\begin{cases}x+2^{1/\alpha}x^{1+1/\alpha}, & 0\le x\le 1/2,\\ x-2^{1/\alpha}(1-x)^{1+1/\alpha}, & 1/2<x\le 1.\end{cases}$$

この写像が仮定 2.1 と条件 (A) を満たすことは明らかである．この場合ある定数 $C=C^{(\alpha)}>0$ が取れて $b_n\sim Cn^\alpha$, as $n\to\infty$ である．

例 3.9 (Boole 変換)**.** 写像 $T:[0,1]\to[0,1]$ を例 1.1 の通りとする．これが仮定 2.1 を満たすことは明らかである．また $Tx-x\sim x^3$, as $x\to 0$, であるので $\alpha=1/2$ の場合の条件 (A) を満たす．T のエルゴード不変測度 μ は

$$\mu(\mathrm{d}x)=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)\mathrm{d}x,\quad 0<x<1,$$

で与えられる．また，次が成り立つ．

$$b_n\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\mu([\delta,1-\delta]).$$

4 主結果

主結果について述べよう．これは先行研究の関数型・結合分布的拡張を含んでおり，上述の極限分布・極限確率過程たちがなぜ現れるのかがより一層明らかになる．

定理 4.1 (S. [10])**.** 命題 3.1 の仮定の下，条件 (A)，(B)，(C)，(D)，(E) は次と同値：

(F) ξ を $[0,1]$-値の確率変数であって分布が絶対連続なものとする．このとき

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\varphi([b_nt])}\mathbb{1}_{\{T^k\xi<\delta\}},\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\varphi([b_nt])}\mathbb{1}_{\{T^k\xi>1-\delta\}}:t\ge 0\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}\left(S_-^{(\alpha)}(t),\ S_+^{(\alpha)}(t):t\ge 0\right),$$
$$\text{in } D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2),$$

ここで $S_-^{(\alpha)}(t)$ と $S_+^{(\alpha)}(t)$ は i.i.d. な α-安定増加 Lévy 過程で $S_\pm^{(\alpha)}(1)\overset{\mathrm{d}}{=}S_\pm^{(\alpha)}$ なるもの．

(G) ξ を $[0,1]$-値の確率変数であって分布が絶対連続なものとする．このとき

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[nt]}\mathbb{1}_{\{T^k\xi<\delta\}},\ \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{[nt]}\mathbb{1}_{\{T^k\xi\in[\delta,1-\delta]\}},\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[nt]}\mathbb{1}_{\{T^k\xi>1-\delta\}}:t\geq 0\right)\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}\left(\int_0^t\mathbb{1}_{\{X^{(\alpha)}(s)<0\}}\mathrm{d}s,\ L^{(\alpha)}(t),\ \int_0^t\mathbb{1}_{\{X^{(\alpha)}(s)>0\}}\mathrm{d}s:t\geq 0\right),\quad \text{in } D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^3),\end{aligned}$$

ここで $X^{(\alpha)}(t)$ は $\mathbb{R}$ 上を走る原点出発・$(2-2\alpha)$ 次元の対称 Bessel 拡散過程を表し，$L^{(\alpha)}(t)$ は $X^{(\alpha)}(t)$ の原点局所時間であって Blumenthal–Getoor の意味で正規化されたものを表す：

$$L^{(\alpha)}(t)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{C^{(\alpha)}}{\varepsilon^{2-2\alpha}}\int_0^t\mathbb{1}_{\{|X^{(\alpha)}(s)|\leq\varepsilon\}}\mathrm{d}s,\quad C^{(\alpha)}=2^{1-\alpha}\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\quad (\Gamma(\cdot)\text{ はガンマ関数}).$$

注 4.2. 特別な場合として $\alpha=1/2$ のときは, 拡散過程 $X^{(1/2)}$ は通常の 1 次元 Brown 運動である.

注 4.3. $t>0$ とする． Barlow–Pitman–Yor [5] は次を示した：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{1}_{\{X^{(\alpha)}(s)<0\}}\mathrm{d}s,\ \frac{1}{t^\alpha}L^{(\alpha)}(t),\ \frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{1}_{\{X^{(\alpha)}(s)>0\}}\mathrm{d}s\right)\\ &\overset{\mathrm{d}}{=}\left(\frac{S_-^{(\alpha)}}{S_-^{(\alpha)}+S_+^{(\alpha)}},\ \frac{1}{(S_-^{(\alpha)}+S_+^{(\alpha)})^\alpha},\ \frac{S_+^{(\alpha)}}{S_-^{(\alpha)}+S_+^{(\alpha)}}\right),\quad \text{in } \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

[16, 17] も参照せよ．また

$$(L^{(\alpha)}(t):t\geq 0)\overset{\mathrm{d}}{=}\left(\left(S^{(\alpha)}\right)^{-1}(t):t\geq 0\right),\quad \text{in } C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),$$

である．したがって条件 (G) から直ちに条件 (C)，(D)，(E) が従うことが分かる．

注 4.4. 今まで述べてきた先行研究や主結果は，T が点対称的であるという仮定を課さずとも (適当な修正の下で) 成り立つ．その場合例えば条件 (G) の $X^{(\alpha)}$ に相当するものとして，次元 $(2-2\alpha)$ の非対称 Bessel 拡散過程が代わりに現れる．更に中立不動点が三点以上ある場合に，各中立不動点近傍およびそれらの補集合への滞在時間の分布極限を考えることができる．この場合マルチレイ上を走る非対称 Bessel 拡散過程の，各レイへの滞在時間や原点局所時間が関数型極限として現れる．

$[(A)\Rightarrow(F)]$ の証明の概略. $[\delta,1-\delta]$ を基点とする軌道の周遊が $[0,\delta)$, $(1-\delta,1]$ に滞在する時間 (以下，これを簡単のため「$0,1$ 近傍への周遊長」と呼ぶことにする) を考える．

T の $[\delta,1-\delta]$ への first return map を解析することで $0,1$ 近傍の周遊長がある意味で “漸近的に i.i.d.” であることが分かる．また周遊長の tail probability は正則変動である．そこで Tyran-Kamińska の関数型極限定理 [15, 14] を用いることで，$0,1$ 近傍への周遊長の和が適当なスケーリングで安定過程 $(S_-^{(\alpha)}(t),S_+^{(\alpha)}(t):t\geq 0)$ に分布収束することが示される． □

$[(F) \Rightarrow (G)]$ の証明の概略．Fujihara–Kawamura–Yano [6] (離散 Markov 過程の滞在時間に関する関数型極限定理) と同様に以下の手順で証明する．

まず，原点を基点とする $X^{(\alpha)}$ の周遊が負側，正側に滞在する時間を考えると，これは安定過程 $(S_-^{(\alpha)}(t), S_+^{(\alpha)}(t) : t \geq 0)$ と同分布である．したがって条件 (F) は，力学系の周遊長が $X^{(\alpha)}$ の周遊長に分布収束すること，と読み替えられる．

また，$X^{(\alpha)}$ の周遊長を用いて，$X^{(\alpha)}$ の負側滞在時間，原点局所時間，正側滞在時間を表現することができる (Williams の公式)．同様に力学系の $[0, \delta)$, $[\delta, 1-\delta]$, $(1-\delta, 1]$ への滞在時間を，周遊長を用いて表現することができる (Williams の公式の離散版)．

最後に，Williams の公式を通して「周遊長の収束」が「滞在時間の収束」を導くことを確かめる．このような手順で所望の結果を得ることができる．

□

参考文献

[1] J. Aaronson. On the ergodic theory of non-integrable functions and infinite measure spaces. *Israel J. Math.*, 27(2):163–173, 1977.

[2] J. Aaronson. The asymptotic distributional behaviour of transformations preserving infinite measures. *J. Analyse Math.*, 39:203–234, 1981.

[3] J. Aaronson. Random f-expansions. *Ann. Probab.*, 14(3):1037–1057, 1986.

[4] J. Aaronson, M. Thaler, and R. Zweimüller. Occupation times of sets of infinite measure for ergodic transformations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(4):959–976, 2005.

[5] M. Barlow, J. Pitman, and M. Yor. Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 294–314. Springer, Berlin, 1989.

[6] E. Fujihara, Y. Kawamura, and Y. Yano. Functional limit theorems for occupation times of Lamperti's stochastic processes in discrete time. *J. Math. Kyoto Univ.*, 47(2):429–440, 2007.

[7] P. Manneville. Intermittency, self-similarity and $1/f$ spectrum in dissipative dynamical systems. *J. Physique*, 41(11):1235–1243, 1980.

[8] T. Owada and G. Samorodnitsky. Functional central limit theorem for heavy tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows. *Ann. Probab.*, 43(1):240–285, 2015.

[9] Y. Pomeau and P. Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, 74(2):189–197, 1980.

[10] T. Sera. Functional limit theorem for occupation time processes of infinite ergodic transformations. preprint available at arXiv:1810.04571.

[11] T. Sera and K. Yano. Multiray generalization of the arcsine laws for occupation times of infinite ergodic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[12] M. Thaler. A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(4):1289–1312, 2002.

[13] M. Thaler and R. Zweimüller. Distributional limit theorems in infinite ergodic theory. *Probab. Theory Related Fields*, 135(1):15–52, 2006.

[14] M. Tyran-Kamińska. Convergence to Lévy stable processes under some weak dependence conditions. *Stochastic Process. Appl.*, 120(9):1629–1650, 2010.

[15] M. Tyran-Kamińska. Weak convergence to Lévy stable processes in dynamical systems. *Stoch. Dyn.*, 10(2):263–289, 2010.

[16] S. Watanabe. Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks. In *Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 157–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[17] Y. Yano. On the joint law of the occupation times for a diffusion process on multiray. *J. Theoret. Probab.*, 30(2):490–509, 2017.

[18] R. Zweimüller. Infinite measure preserving transformations with compact first regeneration. *J. Anal. Math.*, 103:93–131, 2007.