

三角関数におけるアニメーション教材の開発と 実験授業による検証

福島高専・一般教科 西浦 孝治

Koji Nishiura, General Education, National Institute of Technology, Fukushima College

東邦大学・理学部 高遠 節夫

Setsuo Takato, Faculty of Science, Toho University

木更津高専・電子制御工学科 白井 邦人

Kunihito Usui, Control Engineering, National Institute of Technology, Kisarazu College

沼津高専・教養科 鈴木 正樹

Suzuki Masaki, Liberal Arts, National Institute of Technology, Numazu College

1 はじめに

本研究の目的は、後期中等教育、高等教育における数学における様々な教材を開発し、それらの教育効果を検証することである。これまでに領域と不等式、累次積分の積分順序の変更、ベクトル方程式などの分野の教材を作成し、実験授業を実施した ([1, 2, 3])。今回は三角関数の分野を取り上げた。三角関数は数学の基礎的な分野であり、専門課程においても必要不可欠である。その教育方法についての研究も多く行われている ([4])。三角関数において学生がつまずくところとして、次の2つが挙げられる。

- 鋭角の三角比から一般角の三角関数への拡張
直角三角形から離れることができない。
- 弧度法の定義
弧度法の角は π で表される角と理解している。そのために $\sin 1$ などに抵抗感をもつことがある。

そこで、一般角の三角関数の定義と弧度法の定義を理解、定着させるための教材を開発することを考えた。その方法として、アニメーションを用いた。三角関数の定義についてのアニメーションと弧度法の定義、三角関数の定義とグラフを関連づけるアニメーションを作成した。この教材によって三角関数の定義と弧度法の定義を視覚的に理解させる。

教材の教育効果を検証するために実験授業を実施した。対象は高専の2年生である。学生が解答する機器として、我々が独自に開発したクリッカーシステムを使った。また教材作成と実験結果の分析において、数学ソフトウェア KeTCindy を用いた。本稿では、アニメーション教材と実験授業の結果について述べる。

2 教材

2.1 アニメーション教材

教材の作成において, KeTCindy を用いた. KeTCindy は高遠らによって開発された数学ソフトウェアである [5]. KeTCindy によって, 2つの三角関数のアニメーション教材を作成した.

一つは三角関数の定義についてのアニメーションである. 次のことを理解, 定着させるための教材である.

- 単位円で考えると, $\sin x$ の値は y 座標であること
- 値域が $-1 \leq \sin x \leq 1$ であること

図 1 はその一部で, 17 カット中の 1 つのカットである.

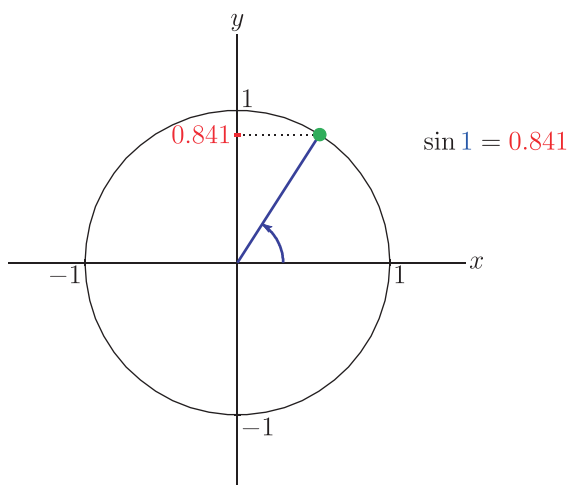


図 1: アニメーション教材 1

動径を一周させ, 角 x に対して, 図に $\sin x$ の値を表示し, 図の右側には x と $\sin x$ の値を表示していく. π を用いて表される角は, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3}{2}\pi$, 2π の 4 つのみを表示し, それ以外の角を多く表示した.

また, 弧度法の定義, 三角関数の定義とグラフを関連づけるアニメーション教材を作成した. 次のことを理解, 定着させるための教材である.

- 弧度法の角が半径 1 の扇形の弧の長さであること
- 単位円で考えると, $\sin x$ の値は y 座標であること
- $y = \sin x$ のグラフの概形

図2はその一部で、 $x = 2$ のときの48カット中の5つのカットである。

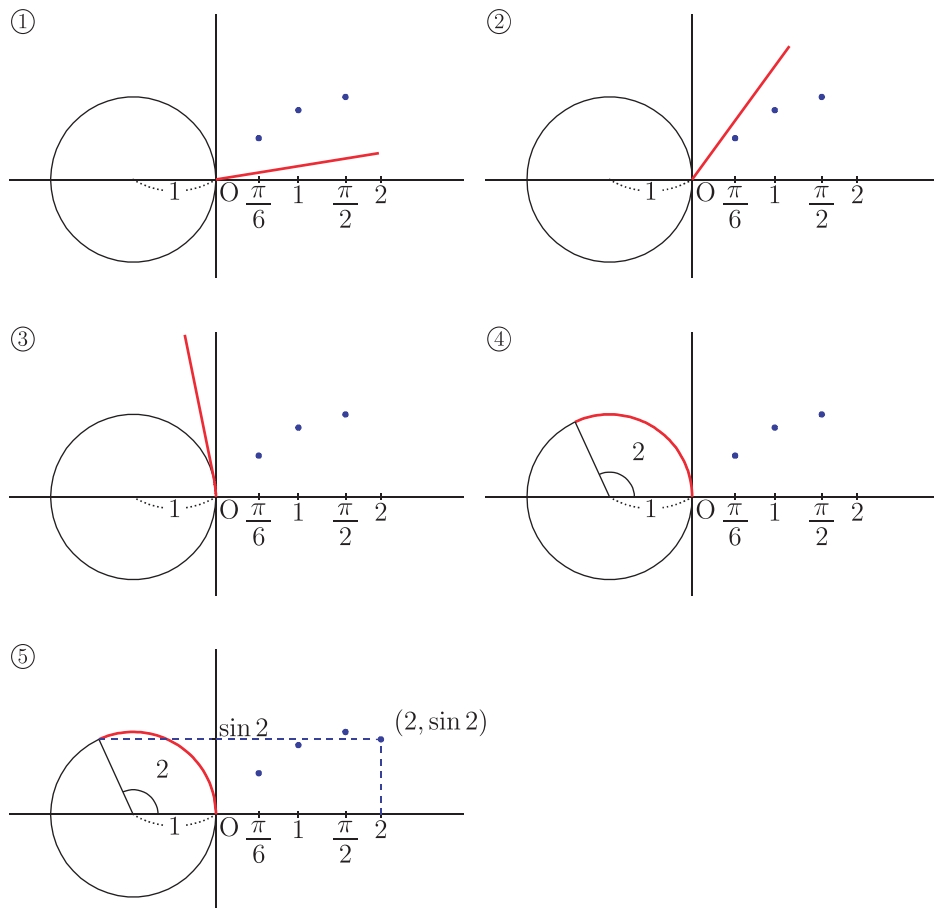


図 2: アニメーション教材 2

それぞれの角 x に対して、次のように図が動いていく。

1. 2 ラジアンを表す長さ 2 の線分が移動する。(①, ②)
2. 線分の一部が曲線となり、単位円に巻き付いていく。(③)
3. 長さ 2 の曲線を円弧とする扇形の中心角が 2 ラジアンであることを示す。(④)
4. 円弧の端点の y 座標が $\sin 2$ であることを示し、点 $(2, \sin 2)$ をプロットする。(⑤)

$x = \frac{\pi}{6}, 1, \frac{\pi}{2}, 2, \frac{3}{4}\pi, 3, \pi, \frac{7}{6}\pi, 4, \frac{3}{2}\pi$ について同様の動きをして、最後にこれらの点を結んで、 $y = \sin x$ のグラフをかく。

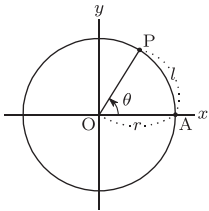
この2つのアニメーションを含むスライド教材を作成した。弧度法の定義、三角関数の定義とグラフを音声をつけて解説するものである。

2.2 アニメーションの教育効果を検証するための教材

アニメーションの教育効果を検証するための教材を作成した。4題の大問から構成されている教材であり，実験授業で用いた。図3はその中の弧度法に関する2題の問題である。

P1 弧度法 1

原点 O を中心とする半径 r の円を考え， $A(r, 0)$ とおく． OA を始線として角 θ をとったときの動径を OP とする。



問題 1 半径 r の円の周の長さは である。

(1-1) $2\pi r$ (1-2) πr
 (1-3) πr^2 (1-4) 2π

問題 2 半径 r の円で，角が 36° の場合の弧 AP の長さは である。

(2-1) πr (2-2) $\frac{\pi r}{5}$ (2-3) $\frac{\pi r}{10}$ (2-4) $\frac{\pi r}{20}$

問題 3 角 θ の単位をラジアンとする．弧 AP の長さを l とおくととき， という等式が成り立つ。

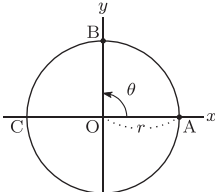
(3-1) $\theta = l$ (3-2) $\theta = rl$ (3-3) $l = r\theta$ (3-4) $r = l\theta$

問題 4 角 36° をラジアンで表すと である。

(4-1) $\frac{\pi}{3}$ (4-2) $\frac{\pi}{4}$ (4-3) $\frac{\pi}{5}$ (4-4) $\frac{\pi}{10}$

P2 弧度法 2

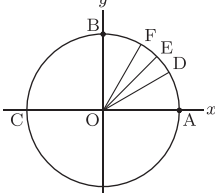
原点 O を中心とする半径 r の円上に点 $B(0, r)$ と点 $C(-r, 0)$ をとる。



問題 1 OB の表す角 θ をラジアンで表すと である。

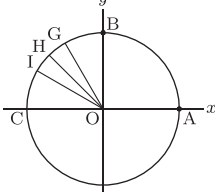
(1-1) π (1-2) $\frac{\pi}{2}$
 (1-3) $\frac{\pi}{3}$ (1-4) $\frac{\pi}{4}$

問題 2 図の点 D, E, F はそれぞれ角 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ のときの動径の端点である． OP の表す角が 1 (ラジアン) のとき， P は の間にある。



(2-1) A と D (2-2) D と E
 (2-3) E と F (2-4) F と B

問題 3 図の点 G, H, I はそれぞれ角 $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ のときの動径の端点である． OQ の表す角が 3 (ラジアン) のとき， Q は の間にある。



(3-1) B と G (3-2) G と H
 (3-3) H と I (3-4) I と C

図 3: 弧度法の問題

図 4 は三角関数の定義に関する 2 題の問題である.

P3 三角関数 1

問題 1 $\sin 30^\circ =$ である.

(1-1) $\frac{1}{2}$ (1-2) $-\frac{1}{2}$ (1-3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1-4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

問題 2 $\sin \frac{\pi}{3} =$ である.

(2-1) $\frac{1}{2}$ (2-2) $-\frac{1}{2}$ (2-3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2-4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

問題 3 $\sin \frac{5\pi}{6} =$ である.

(3-1) $\frac{1}{2}$ (3-2) $-\frac{1}{2}$ (3-3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3-4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

問題 4 $\cos \frac{5\pi}{6} =$ である.

(4-1) $\frac{1}{2}$ (4-2) $-\frac{1}{2}$ (4-3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4-4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

P4 三角関数 2

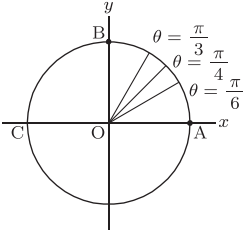
問題 1 $\sin 1$ は不等式 を満たす.

(1-1) $0 < \sin 1 < \frac{1}{2}$

(1-2) $\frac{1}{2} < \sin 1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$

(1-3) $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1-4) $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 1 < 1$



問題 2 $\sin 3$ の値は の間にある.

(2-1) 1 と $\sin \frac{5\pi}{8}$

(2-2) $\sin \frac{5\pi}{8}$ と $\sin \frac{3\pi}{4}$

(2-3) $\sin \frac{3\pi}{4}$ と $\sin \frac{7\pi}{8}$

(2-4) $\sin \frac{7\pi}{8}$ と 0

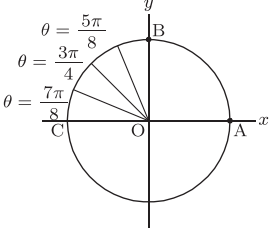


図 4: 三角関数の定義の問題

この教材 (問題 P) は学生がアニメーション教材で学習する前に用いた. また学習後に用いる教材として, 問題 P の類似問題から構成される教材 (問題 T) も作成した. 問題 P と問題 T は紙媒体の教材である.

3 実験授業

アニメーションの教育効果を検証するために実験授業を実施した。学生が回答する機器として、白井らが開発した認知検出クリッカー Cognitive Detection Clicker（以下、CDC）を用いた。CDCには、問題番号を回答する4つのボタンと答えを回答する4つのボタンがある（図5）。ボタンの選択番号と回答時間の記録はCSVファイルとして保存される。

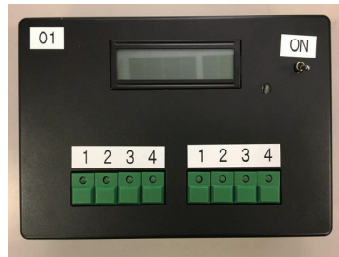


図 5: CDC

実験授業は下記のように実施した。はじめに学生を学力が同程度になるように2つのグループに分けた。グループAはアニメーションを含まないスライド教材で学習し、グループBはアニメーションを含むスライド教材で学習した。三角関数は1年生のときにすでに学習している。

- 実施日：2020年2月14日
- 場所：木更津高専
- 対象：木更津高専2年生38名
グループA 18名，グループB 20名
- 別教室で実施
- スライド教材は教室前方のスクリーンに映す。
- 実験授業の進行
 1. 実験授業の目的と方法の説明
 2. CDCによる回答の練習
 3. 事前テスト 問題P（8分）
 4. スライド教材で学習（約10分）
 5. 確認テスト 問題T（8分）
 6. アンケート

CDCの操作は、問題番号と解答番号を押すだけで簡単である。学生はすぐに使いこなすことができる。問題Pと問題Tの解答時間は、1問につき2分間である。1枚の紙に1つの問題があり、2分経過後にページをめくるように指示した。また、2分間の解答時間内であれば、CDCを使った解答は何回でも訂正することができる。これらのデータは訂正する前の解答、解答時刻を含めてすべて記録される。スライド教材は教室前方のスクリーンに映し、音声はスピーカーを使って流した。アンケートの回答もCDCを用いた。

4 検証結果

CDCによって学生が回答した問題番号、解答番号および解答した時刻は親機のコンピュータにCSVデータとして送られる。これらのデータをKeTCindyで取り込み処理した。

はじめにグループA（アニメーションなし）とグループB（アニメーションあり）の正解数の平均を求めた。表1はその結果である。問題1から問題4までの問題数はそれぞれ4, 3, 4, 2である。

表1: 正解数の平均

問題	グループA		グループB	
	問題P	問題T	問題P	問題T
1	2.44	3.06	2.79	3.16
2	1.56	2.00	1.21	1.89
3	3.28	3.44	2.95	3.47
4	0.78	0.89	0.79	1.21

スライド教材で学習する前の問題Pと学習した後の問題Tを比較すると、どちらのグループも各問題で正解数の平均が増加している。特にグループBの問題2と問題4の増加の割合が大きい。正解率が最も高かった問題は問題3であり、73.8%から86.8%である。一方、最も低かった問題は、問題4であり、39.0%から60.5%である。

KeTCindyで処理したデータをさらにKeTCindyを用いて、解答の時系列のグラフとして表した。図6はP3とT3、およびP4とT4のグラフである。横軸は時間軸である。縦軸は上からグループAの学生1から18、グループBの学生1から20である。グラフの中の数字は小問番号を表し、青線は正解、赤線は不正解を表している。図6において、スライド教材を用いた学習前後のP3とT3を比較すると、解答時間に大きな差を見ることはできない。問題3の解答の特徴は早い時間から解答を始めていることである。これは問題3が三角関数の値を求める標準的な問題であるからだと考えられる。またP4と

T4についても解答時間に大きな差を見ることはできない。問題4の解答の特徴は、時間をかけて解答していることである。これは問題4がほとんどの学生にとって、初めて解く問題であるからだと考えられる。問題1と問題2のグラフも問題4のグラフに近い傾向があった。解答の時系列のグラフから学生が解答する全体の傾向を把握することができる。

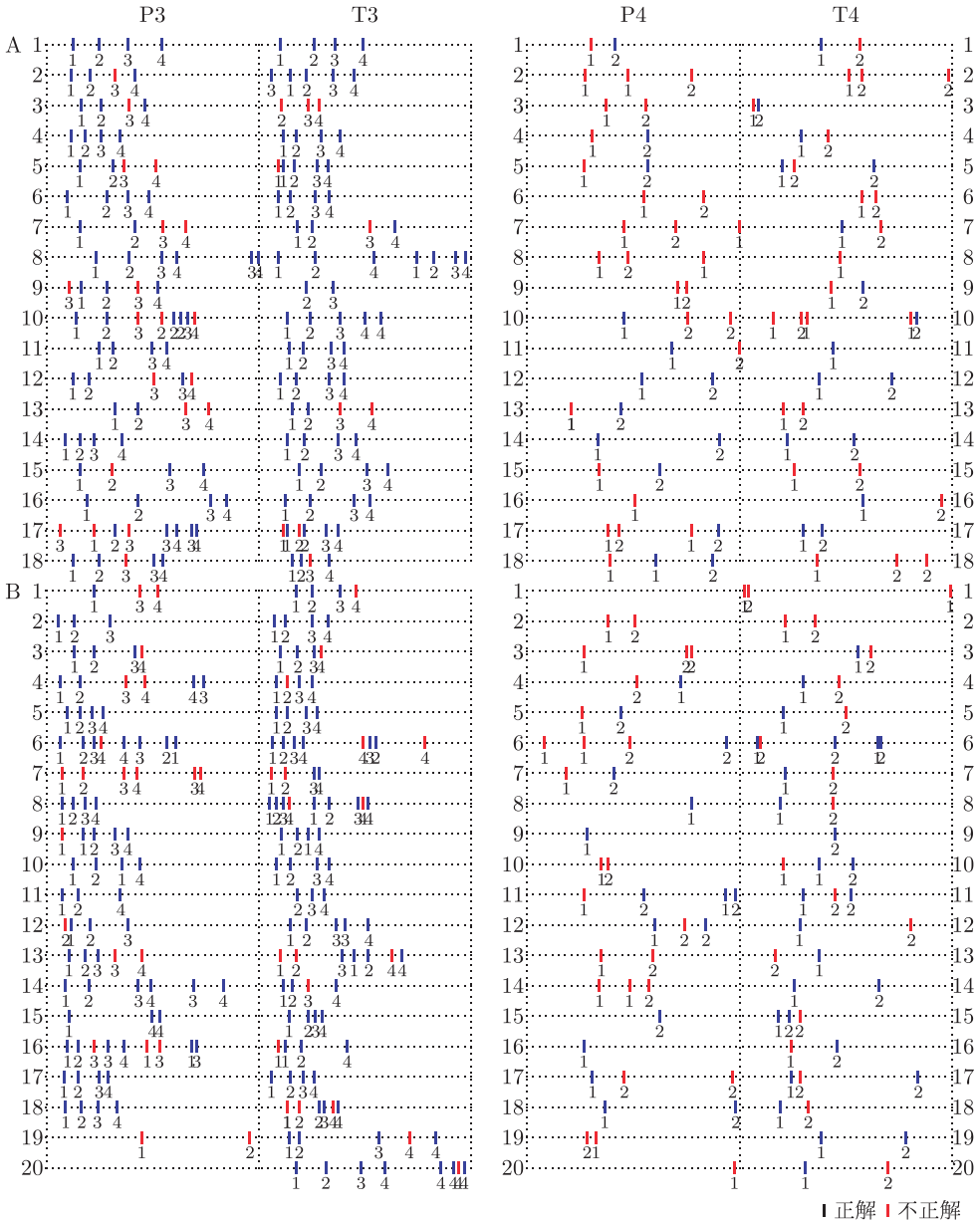


図 6: 解答の時系列のグラフ

次にグループ A とグループ B のスライド教材で学習する前後の正解数について、有意水準 5% で対応のある片側検定をした。表 2 はその検定結果である。

表 2: 学習前後の正解数についての検定

問題	グループ A				グループ B			
	t 値	p 値	平均差	有意差	t 値	p 値	平均差	有意差
T1 - P1	2.09	0.02621	0.61	あり	1.7	0.05304	0.5	なし
T2 - P2	1.36	0.09504	0.44	なし	2.57	0.00938	0.7	あり
T3 - P3	0.64	0.26411	0.17	なし	2.01	0.02956	0.7	あり
T4 - P4	0.57	0.28928	0.11	なし	2.27	0.01756	0.45	あり

グループ A では問題 1 に有意差があり、逆にグループ B では問題 2, 3, 4 に有意差があった。特にアニメーションとの関連が大きい問題 4 について、グループ B に有意差があったことが注目すべきところである。このことからアニメーションを含むスライド教材にある程度の効果があると考えられる。

実験授業の最後にアンケートを実施した。その中で、「スライドの解説はわかりやすかったですか。」という質問をした。表 4 はその回答結果である。

表 3: アンケート結果

回答	グループ A	グループ B
とてもわかりやすかった	5	1
わかりやすかった	9	7
わかりにくかった	2	12
とてもわかりにくかった	1	0
無回答	1	0
計	18	20

スライド教材全体に対する質問であるが、アニメーションを含むスライド教材で学習したグループ B の方が良くない結果となった。正解数については、グループ B はグループ A よりも学習後に改善したにもかかわらず、学生の印象は逆の結果となった。初めて見るアニメーションが高度な内容と捉えられたのかもしれない。自由記述のところでは、アニメーションに対する記述はすべて肯定的な回答であった。

5 まとめと今後の課題

数学ソフトウェアが進歩したことによって、様々な種類の教材を作成することができるようになった。教科書、参考書などを用いて学習することが基本となるが、アニメーションなどの動的な図形は、理解を深めるための助けになる。また気づきを誘発することにもなる。三角関数の定義、 $y = \sin x$ のグラフ、および弧度法の角を関連付けて理解させるためのアニメーション教材は、実験授業の結果から有効な教材となり得る。ただし、アニメーションを見せる前の段階での三角関数の教授方法を改善する必要がある。今後、このアニメーション教材を実際に高専1年生の三角関数の授業で用いて、学生の反応や理解度を検証することによって、さらに教材を改良する。また、Web上にアニメーション教材を置き、学生が自学自習するとき自由に使うことができるようにする。学生自身がアニメーションを操作し、途中で止め、また進めることによって、理解が深まると考えられる。

アニメーション教材とともに紙媒体の教材、スライド教材も開発する。現在、視線計測実験も行っている。学生が教材のどの部分を見ているのか、またどの部分を見ていないのかを把握することは極めて重要となる。実験授業と視線計測実験を並行して実施することによって、さらに教育効果の大きい教材を開発することができる。実験と検証を繰り返し実施し、学生の理解度が低い多くの分野で教材を開発していく。

6 謝辞

本研究は JSPS 科研費 19K03021 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] K. Nishiura, S. Ouchi, K. Usui, Analysis of the Use of Teaching Materials Generated by KeTCindy as an Aid to the Understanding of Mathematics, Lecture Notes in Computer Science 10407, Springer Verlag, pp.216–227, 2017.
- [2] 西浦孝治, 高遠節夫, KeTCindy による数学教材の作成とその教育効果の検証, 京都大学数理解析研究所講究録 2067, pp.177-182, 2018.
- [3] K. Nishiura, Analysis of the Usefulness of Teaching Materials Including Sound Created by KeTCindy, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 13(2), pp.145–155, 2019.
- [4] 岩本敏彦, 三角関数の指導について – 興味を持って理解を深める授業実践 –, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 17(1), pp.23–32, 2010.
- [5] M. Kaneko, S. Yamashita, K. Kitahara, Y. Maeda, Y. Nakamura, U. Kortenkamp, S. Takato: KeTCindy –Collaboration of Cinderella and KeTpic, The International Journal for Technology in Mathematics Education, 22-4, pp.179–185, 2015.