Chogoshvili-Pontrjagin の主張について

島根大学・学術研究院理工学系　松橋　英市
Eiichi MATSUHASHI
Department of Mathematics,
Shimane University

島根大学大学院・自然科学研究科　大島　慶之
Yoshiyuki OSHIMA
Graduate School of Natural Science and Technology,
Shimane University

盛岡大学・文学部　冨江　雅也
Masaya TOMIE
Faculty of Humanities,
Morioka University

1　はじめに

本稿において，空間はすべて可分距離空間であるとし，写像は連続であるとする．空間 (Z, d) と $A, B \subset Z$ に対して，A が B から取り外し可能であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $f : A \to Z$ が存在し $f(A) \cap B = \emptyset$ かつ任意の $x \in A$ に対して $d(f(x), x) < \varepsilon$ をみたすときにいう．取り外し可能でないとき，取り外し不可能であるという．$\mathbb{R}^m$ の n 次元アフィン部分空間のことを n 次元アフィン平面という．(本稿においては，平面という用語が必ずしも 2 次元空間や $(n-1)$ 次元空間を表すわけではないことに注意.) $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ を $\mathbb{R}^m$ の標準基底としたとき，$L \subset \mathbb{R}^m$ が n 次元座標アフィン平面であるとは，ある $\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}$ と $p \in \mathbb{R}^m$ に対して $L = p + \mathrm{span}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n})$ と表せるときにいう．$\mathbb{R}^m$ の部分集合 A が余次元 n であるとは，その次元が $m - n$ であるときにいう．コンパクト連結距離空間のことを連続体という．連続体は，それが

２つの真に小さい部分連続体の和として表せないとき，分解不可能であるという．コンパクト距離空間は，その任意の部分連続体が分解不可能であるとき，遺伝的分解不可能であるという．写像 $f : X \to Y$ が埋め込みであるとは，$f : X \to f(X)$ が位相同型写像であるときにいう．

1937 年，Chogoshvili は次のような主張をした．

主張 1.1 (Chogoshvili の主張, [3], 1937)**.** $m \geqq 1$ とする．任意の n 次元 $(0 \leqq n \leqq m)$ コンパクト空間 $X \subset \mathbb{R}^m$ に対して，余次元 n のあるアフィン平面 $L \subset \mathbb{R}^m$ が存在し，X は L から取り外し不可能となる．

さらに Pontrjagin により，主張 1.1 におけるアフィン平面は斜めに傾いていないものでとれる，と指摘された．

主張 1.2 (Chogoshvili-Pontrjagin の主張，[3]，1937)**.** $m \geqq 1$ とする．任意の n 次元 $(0 \leqq n \leqq m)$ コンパクト空間 $X \subset \mathbb{R}^m$ に対して，余次元 n のある座標アフィン平面 $L \subset \mathbb{R}^m$ が存在し，X は L から取り外し不可能となる．

Chogoshvili は次元の特徴付けに関連した問題として，本来はいずれの場合においても X を $\mathbb{R}^m$ の任意の部分集合として主張したが，1953 年，Sitnikov が X がコンパクトでない場合に主張 1.1 が成り立たない例を構築した ([17])．一方で X がコンパクトの場合については，主張 1.2 は長年にわたって正しいものと思われていた．(特に，$m \leqq 3$ の場合については実際に正しかった．) しかし 1980 年代後半，Daverman, Dranishnikov, Pol がそれぞれ独立に Chogoshvili の証明にはギャップがあることに気付いた．そして 1993 年には，Sternfeld により主張 1.2 が一般には正しくないことが示された．

定理 1.3 (Sternfeld, [19], 1993)**.** $n \geqq 2$ とする．このとき，遺伝的分解不可能な任意の n 次元コンパクト空間 X に対して，ある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^m$, $m = \binom{2n-1}{n}(4n-1)$, が存在し，$E(X)$ は $\mathbb{R}^m$ における余次元 2 の任意の座標アフィン平面から取り外し可能となる．

つまり，これは 2 次元以上のかなり特殊な空間であれば，それは主張 1.2 にしたがわないことを述べているのだが，1998 年，さらに驚くべきことに，Levin および

Sternfeld は 3 次元以上の任意のコンパクト空間が主張 1.2 にしたがわないことを示した．

定理 1.4 (Levin-Sternfeld, [12], 1998)**.** $n \geqq 3$ とする．このとき，任意の n 次元コンパクト空間 X に対して，ある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^m$, $m = \binom{3n-2}{2n-1}(12n-7)$, が存在し，$E(X)$ は $\mathbb{R}^m$ における余次元 3 の任意の座標アフィン平面から取り外し可能となる．

Levin や Sternfeld はコンパクト空間を高次元空間に埋め込んで，その空間上で座標アフィン平面から取り外すことを考えたが，それに対して Dranishnikov は，1997 年，任意の $m \geqq 4$ と任意の $2 \leqq k \leqq m-2$ に対して，$\mathbb{R}^m$ のなかで主張 1.1 の反例となる k 次元コンパクト空間を構成している ([5])．主張 1.1，主張 1.2 は一般には正しくないことを述べてきたが，一方で，$n = 0, 1, m-1, m$ のときは主張 1.2 が成り立つことが知られている ([11])．

さきほど述べたように，Levin および Sternfeld は 3 次元以上の任意のコンパクト空間が主張 1.2 にしたがわないことを示したが，空間 X の次元 n に対して，埋め込み先の Euclid 空間の次元 m がかなり高いものとなっている（例えば，$n = 3$ のとき，$m = 609$）．本稿では，定理 1.3，定理 1.4 のその数値的な無駄を減らし改良した結果について報告する．

2　準備

定義 2.1 (デンドライト)**.** 局所連結な連続体で単純閉曲線を含まないものをデンドライトという．

集合 S に対して，その濃度を $|S|$ であらわす，また，空間 X と $A \subset X$ に対して，X における A の内部を $\mathrm{Int}_X A$，X における A の閉包を $\mathrm{Cl}_X A$，X における A の境界を $\mathrm{Bd}_X A$ で表す．

定義 2.2 (切断点，分岐点，端点)**.** D をデンドライトとする．$c \in D$ が D の切断点であるとは，$D \setminus \{c\}$ が連結でないときにいう．D の切断点全体の集合を $\mathrm{Cut}\ D$ で表す．一般の連結空間 X に対しても切断点の定義は同じものとする．また切断点全体の集合

も同じく Cut X と表す．

$b \in D$ が D の分岐点であるとは，b のある開近傍 $U \subset D$ が存在して，開集合 $V \subset D$ で $b \in V \subset U$ となるものに対して $|\mathrm{Bd}_D V| > 2$ が成り立つときにいう．D の分岐点は D の切断点である．D の分岐点全体の集合を Br D で表す．

$e \in D$ が D の端点であるとは，e の任意の開近傍 $U \subset D$ に対して，ある開集合 $V \subset D$ が存在して，$e \in V \subset U$ かつ $|\mathrm{Bd}_D V| = 1$ をみたすときにいう．D の端点全体の集合を $\mathrm{E}(D)$ で表す．

定義 2.3 (関数空間)**.** 空でないコンパクト距離空間 X と，距離空間 (Y, ρ) に対して，

$C(X, Y) = \{f \mid f : X \to Y$ は連続写像 $\}$

とする．また，

$\sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}\ (f, g \in C(X, Y))$

を考えると，これは $C(X, Y)$ 上の距離であり，上限距離という．$C(X, Y)$ には上限距離を導入する．各 $E \subset X$, $F \subset Y$ に対して，

$B_{E,F}(X, Y) = \left\{f \in C(X, Y) \mid f(E) \cap F = \emptyset\right\}$

とする．

定義 2.4. Y を距離空間, $F \subset Y$ を閉集合とする．このとき，$B_{[0,1]^n, F}([0,1]^n, Y)$ が $C([0,1]^n, Y)$ で稠密ならば F を Y の Z_n-集合という．また，F' が Y の Z_n-集合の可算和であるとき，F' を Y の σZ_n-集合という．

命題 2.5. X をコンパクト距離空間とし，(Y, ρ) を距離空間とし，E, F をそれぞれ X, Y の閉集合とする．このとき，$B_{E,F}(X, Y) \subset C(X, Y)$ は開集合．

系 2.6. X をコンパクト距離空間とし，Y を距離空間とし，E, F をそれぞれ X, Y の F_σ-集合とする．このとき，$B_{E,F}(X, Y) \subset C(X, Y)$ は G_δ-集合．

Y を完備とするとき $C(X, Y)$ も完備となるので，Baire のカテゴリー定理より，次がわかる．

系 2.7. $n \geqq 0$ とし，Y を完備 ANR とする．このとき，閉集合 $E \subset Y$ が Z_n-集合であることは，任意の n 次元コンパクト空間 X に対して，$B_{X,E}(X, Y) \subset C(X, Y)$ が稠密開集合であることと同値である．また，F_σ-集合 $F \subset Y$ が σZ_n-集合であること

は，任意の n 次元コンパクト空間 X に対して，$B_{X,F}(X,Y) \subset C(X,Y)$ が稠密 G_δ-集合であることと同値である．

命題 2.8. $n \geqq 0$ とし，X をコンパクト空間とし，そして，E を X における n 次元 F_σ-集合とする．Y を完備 ANR とし，F を Y における σZ_n-集合とする．このとき，$B_{E,F}(X,Y) \subset C(X,Y)$ は稠密 G_δ-集合である．

次の定理から，σZ_n-集合と σZ_m-集合の直積がどのようなものになるかわかる．

定理 2.9. $n, m \geqq 0$ とし，X, Y を完備 ANR とする．また，E を X の σZ_n-集合とし，F を Y の σZ_m-集合とする．このとき，$E \times F$ は $X \times Y$ における σZ_{n+m+1}-集合である．よって，任意の $(n+m+1)$ 次元コンパクト空間 M に対して，$B_{M,E\times F}(M, X\times Y) \subset C(M, X\times Y)$ は稠密 G_δ-集合である．

命題 2.10. (X,d) を空間とし，$E \subset X$ とする．このとき，E が X における Z_0-集合であることは，E が X の疎な閉集合であることと同値である．

定理 2.9 と命題 2.10 より，次の系を得る．

系 2.11. $n \geqq 0$ とし，$\{Y_i\}_{i=1}^{n+1}$ を完備 ANR の族とする．各 $1 \leqq i \leqq n+1$ に対して，E_i を Y_i の疎な閉集合の可算和とする．このとき，$\prod_{i=1}^{n+1} E_i$ は $\prod_{i=1}^{n+1} Y_i$ における σZ_n-集合である．よって，任意の n 次元コンパクト空間 X に対して，$B_{X,\prod_{i=1}^{n+1} E_i}(X, \prod_{i=1}^{n+1} Y_i) \subset C(X, \prod_{i=1}^{n+1} Y_i)$ は稠密 G_δ-集合である．特に，$\prod_{i=1}^{n+1} Y_i$ における 1 点集合は $\prod_{i=1}^{n+1} Y_i$ における Z_n-集合である．

3 Levin および Sternfeld の結果の精密化

本章では，次の安定値の議論を用いて主張 1.2 を考える．

定義 3.1 (安定値)**.** X をコンパクト空間，Y を空間とし，$g : X \to Y$ とする．このとき，$y \in Y$ が g の安定値であるとは，g に十分近い任意の $h : X \to Y$ に対して，$y \in h(X)$ をみたすときにいう．

補題 3.2. $m \geqq 1$ とし，$X \subset \mathbb{R}^m$ をコンパクト空間とする．また，$n = 0, 1, \ldots, m$ と

する．このとき，次の 2 条件は同値である．

(1) 余次元 n のある（座標）アフィン平面 $L \subset \mathbb{R}^m$ が存在し，X は L から取り外し不可能となる．

(2) ある n 次元（座標）アフィン平面 $L' \subset \mathbb{R}^m$ が存在し，$P|_X$ が安定値をもつ．ただし，$P : \mathbb{R}^m \to L'$ は直交射影とする．

この補題により，主張 1.1 と主張 1.2 はそれぞれ次と同値であることがわかる．

主張 3.3 (Chogoshvili の主張)**.** $m \geqq 1$ とする．任意の n 次元 $(0 \leqq n \leqq m)$ コンパクト空間 $X \subset \mathbb{R}^m$ に対して，ある n 次元アフィン平面 $L' \subset \mathbb{R}^m$ が存在し，$P|_X$ が安定値をもつ．ただし，$P : \mathbb{R}^m \to L'$ は直交射影とする．

主張 3.4 (Chogoshvili-Pontrjagin の主張)**.** $m \geqq 1$ とする.任意の n 次元 $(0 \leqq n \leqq m)$ コンパクト空間 $X \subset \mathbb{R}^m$ に対して，ある n 次元座標アフィン平面 $L' \subset \mathbb{R}^m$ が存在し，$P|_X$ が安定値をもつ．ただし，$P : \mathbb{R}^m \to L'$ は直交射影とする．

$L' \subset \mathbb{R}^m$ が座標アフィン平面のときは，直交射影 $P : \mathbb{R}^m \to L'$ のことを単に射影とよぶこともある．

定義 3.5. $n \geqq 0$ とし, X を n 次元コンパクト空間とする. このとき, X が Chogoshvili の主張（Chogoshvili-Pontrjagin の主張）にしたがうとは,任意の埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^m$ に対して，ある n 次元アフィン平面（n 次元座標アフィン平面）L が存在し，$P|_{E(X)}$ が安定値をもつときにいう．ただし，$P : \mathbb{R}^m \to L$ は直交射影とする．

定義 3.6 (写像の分解)**.** X, Y をコンパクト空間，Z を空間とし，$h : X \to Z$ とする．このとき，ある $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が存在し $h = g \circ f$ をみたすならば，h は Y を経由して分解されるという．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Chogoshvili-Pontrjagin の主張が一般には正しくないことを示すためには，ある高次元 Euclid 空間への埋め込み $E(X) \subset \mathbb{R}^m$ を考えたとき，任意の n 次元座標アフィ

ン平面 $L' \subset \mathbb{R}^m$ に対して $P|_{E(X)} : E(X) \to L'$ が安定値をもたないことを示せばよい．さらに系 2.11 より，$P|_{E(X)} : E(X) \to L'$ を $(n-1)$ 次元以下の空間を経由して分解できれば十分である．

$$\begin{tikzcd} E(X) \arrow[rr, "P|_{E(X)}"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] & & L' \ (\dim = n) \\ & \dim \leqq n-1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

このことをふまえて，Levin および Sternfeld の結果をより正確に述べると次のようになる．

定理 3.7 (Sternfeld, 1993)**.** $n \geqq 2$ とし，X を遺伝的分解不可能な n 次元コンパクト空間とする．このとき，ある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^m$, $m = \binom{2n-1}{n}(4n-1)$，が存在し，任意の 2 次元座標アフィン平面 $L' \subset \mathbb{R}^m$ に対して直交射影 $P : \mathbb{R}^m \to L'$ を考えると，$P|_{E(X)} : E(X) \to L'$ が 1 次元以下の空間を経由して分解される．

$$\begin{tikzcd} E(X) \arrow[rr, "P|_{E(X)}"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] & & L' \ (\dim = 2) \\ & \dim \leqq 1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

定理 3.8 (Levin-Sternfeld, 1998)**.** $n \geqq 3$ とし，X を n 次元コンパクト空間とする．このとき，ある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^m$, $m = \binom{3n-2}{2n-1}(12n-7)$，が存在し，任意の 3 次元座標アフィン平面 $L' \subset \mathbb{R}^m$ に対して直交射影 $P : \mathbb{R}^m \to L'$ を考えると，$P|_{E(X)} : E(X) \to L'$ が 2 次元以下の空間を経由して分解される．

$$\begin{tikzcd} E(X) \arrow[rr, "P|_{E(X)}"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] & & L' \ (\dim = 3) \\ & \dim \leqq 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

上記二つの定理を改良する．

本章で用いる表記，用語で，まだ述べていないものを列挙する．

• 写像 f に対して，その終域を $\operatorname{codom} f$ で表す．

• 1 次元空間の直積 $X = \prod_{i \in A} X_i$ と $A', A'' \subset A$ に対して，$|A'| = n$ であるならば，射影 $P' : X \to \prod_{i \in A'} X_i$ は n 次元であるという．また，$A' \cap A'' = \emptyset$ のとき，射影 $P' : X \to \prod_{i \in A'} X_i$ と $P'' : X \to \prod_{i \in A''} X_i$ は交わりを持たないという．

• デンドライト D がスーパーデンドライトであるとは，$\mathrm{E}(D) \subset D$ が稠密であるときにいう．

便宜上，X が空間のとき，X^0 と X^{-1} は 1 点集合であるとする．また，$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ が空間の族のとき，$\prod_{i=1}^{0} X_i$ と $\prod_{i=1}^{-1} X_i$ は 1 点集合であるとする．

n, p, k, S を $n \geqq 2$, $0 \leqq p \leqq n-2$, $0 \leqq k \leqq n-p-1$, $S \geqq (n-p-1)(p+2)+1$ をみたす非負整数とする．このとき，$C(n,p,k,S), A(n,p,k,S), B(n,p,k,S), M(n,p,S)$, $N(n,p,S), M'(n,p,S), N'(n,p,S) \in \mathbb{N}$ を次のように定める：

$$C(n,p,k,S) = \binom{S-n+p+1}{k}\binom{n-p-1}{k},$$

$$A(n,p,k,S) = (S-n+p+1-k)(p+2)+3k-1,$$

$$B(n,p,k,S) = (S-n+p+1-k)(p+2)+2k-1,$$

$$M(n,p,S) = \sum_{k=0}^{n-p-1} C(n,p,k,S)(2A(n,p,k,S)+1),$$

$$N(n,p,S) = \sum_{k=0}^{n-p-1} C(n,p,k,S)(2B(n,p,k,S)+1),$$

$$M'(n,p,S) = \sum_{k=0}^{n-p-1} C(n,p,k,S)(A(n,p,k,S)+1),$$

$$N'(n,p,S) = \sum_{k=0}^{n-p-1} C(n,p,k,S)(B(n,p,k,S)+1).$$

本章を通して，$\{D_{k,j,i}\}_{(k,j,i)\in\mathbb{N}^3}$ をスーパーデンドライトの族とする．また，任意の $(k,j,i)\in\mathbb{N}^3$ に対して，$\mathbb{R}_{k,j,i}=\mathbb{R}$ とする．

次の結果は，定理 3.8 の改良版である．

定理 3.9 (Matsuhashi-Oshima-Tomie, [13], submitted)**.** $n\geqq 3,\ 1\leqq p\leqq n-2,\ S\geqq (n-p-1)(p+2)+1,\ 1\leqq q\leqq max\{j\in\mathbb{N}\mid j\leqq \dfrac{S-1}{n-p-1}\}$ とし，X を n 次元コンパクト空間とする．任意の $0\leqq k\leqq n-p-1$ と，任意の $1\leqq j\leqq C(n,p,k,S)$ に対して，$-1\leqq r_j^k\leqq A(n,p,k,S)$ とする．$\mathbb{M}=\prod_{k=0}^{n-p-1}(\prod_{j=1}^{C(n,p,k,S)}(\prod_{i=1}^{A(n,p,k,S)-r_j^k}D_{k,j,i}\times\prod_{i=1}^{2r_j^k+1}\mathbb{R}_{k,j,i}))$ とする．このとき，ある埋め込み $E:X\to\mathbb{M}$ が存在し，$\mathbb{M}$ の任意の q 次元射影 P に対して，$P|_{E(X)}:E(X)\to\mathrm{codom}\ P$ は $(p+1)$ 次元以下のコンパクト空間を経由して分解される．

$$\begin{tikzcd}
E(X) \arrow[rr, "P|_{E(X)}"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & & \mathrm{codom}\ P\ (\dim = q) \\
& \dim\leqq p+1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

系 2.7, 2.11 と，定理 3.9 より，次の系を得る．

系 3.10. $n\geqq 3,\ 1\leqq p\leqq n-2,\ S\geqq (n-p-1)(p+2)+1$ とし，任意の $0\leqq k\leqq n-p-1$ と，任意の $1\leqq j\leqq C(n,p,k,S)$ に対して，$-1\leqq r_j^k\leqq A(n,p,k,S)$ とする．$\mathbb{M}=\prod_{k=0}^{n-p-1}(\prod_{j=1}^{C(n,p,k,S)}(\prod_{i=1}^{A(n,p,k,S)-r_j^k}D_{k,j,i}\times\prod_{i=1}^{2r_j^k+1}\mathbb{R}_{k,j,i}))$ とする．このとき，任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E:X\to\mathbb{M}$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbb{M}$ のどの 2 つも交わりを持たない $(p+2)$ 次元射影の集合であり，各 $\lambda\in\Lambda$ に対して A_λ が $\mathrm{codom}\ P_\lambda$ における σZ_{p+1}-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$\mathbb{M}$ の任意の $(p+2)$ 次元射影 P と，任意の $z\in\ \mathrm{codom}\ P$ に対して，$E(X)$ は $P^{-1}(z)$ から取り外し可能となる．

系 3.10 において，任意の $0\leqq k\leqq n-p-1$ と，任意の $1\leqq j\leqq C(n,p,k,S)$ に対して，$r_j^k=A(n,p,k,S)$ とする．このとき，次の系を得る．

系 3.11. $n\geqq 3,\ 1\leqq p\leqq n-2,\ S\geqq (n-p-1)(p+2)+1$ とする．このとき，

任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^{M(n,p,S)}$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbb{R}^{M(n,p,S)}$ のどの 2 つも交わりを持たない $(p+2)$ 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が $\mathrm{codom}\ P_\lambda$ における σZ_{p+1}-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$E(X)$ は $\mathbb{R}^{M(n,p,S)}$ における余次元 $(p+2)$ の任意の座標アフィン平面から取り外し可能となる．

系 3.12. $n \geqq 3$ とする．このとき，任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^{M(n,1,3n-5)}$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbb{R}^{M(n,1,3n-5)}$ のどの 2 つも交わりを持たない 3 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が $\mathrm{codom}\ P_\lambda$ における σZ_2-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$E(X)$ は $\mathbb{R}^{M(n,1,3n-5)}$ における余次元 3 の任意の座標アフィン平面から取り外し可能となる．

注意 3.13. 任意の $n \geqq 3$ に対して，$\binom{3n-2}{2n-1}(12n-7) = M(n+1,1,3(n+1)-5) > M(n,1,3n-5)$ となる．

系 3.11 において，$p = n-2$ かつ $S = n+1$ とする．このとき，次の系を得る．

系 3.14. $n \geqq 3$ とする．このとき，任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^{2n^3+5n-1}$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbb{R}^{2n^3+5n-1}$ のどの 2 つも交わりを持たない n 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が $\mathrm{codom}\ P_\lambda$ における σZ_{n-1}-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$E(X)$ は $\mathbb{R}^{2n^3+5n-1}$ における余次元 n の任意の座標アフィン平面から取り外し可能となる．

系 3.10 において，任意の $0 \leqq k \leqq n-p-1$ と，任意の $1 \leqq j \leqq C(n,p,k,S)$ に対して，$r_j^k = -1$ とする．このとき，次の系を得る．

系 3.15. $n \geqq 3$, $1 \leqq p \leqq n-2$, $S \geqq (n-p-1)(p+2)+1$ とする．各 $1 \leqq i \leqq M'(n,p,S)$ に対して，D_i をスーパーデンドライトとする．このとき，任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \prod_{i=1}^{M'(n,p,S)} D_i$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\prod_{i=1}^{M'(n,p,S)} D_i$ のどの 2 つも交わりを持たない $(p+2)$ 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が $\mathrm{codom}\ P_\lambda$ における σZ_{p+1}-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$\prod_{i=1}^{M'(n,p,S)} D_i$ の任意の $(p+2)$ 次元射影 P と，任意の $z \in \mathrm{codom}\ P$ に対して，$E(X)$ は $P^{-1}(z)$ から取り外し可能と

なる．

次は，定理 3.7 の改良版である．定理 3.9 をいくらか手直しすることで得られる．

定理 3.16 (Matsuhashi-Oshima-Tomie, [13], submitted)**.** $n \geqq 2,\ 0 \leqq p \leqq n-2,\ S \geqq (n-p-1)(p+2)+1,\ 1 \leqq q \leqq max\{j \in \mathbb{N} \mid j \leqq \dfrac{S-1}{n-p-1}\}$ とし，X を遺伝的分解不可能な n 次元コンパクト空間とする．任意の $0 \leqq k \leqq n-p-1$ と，任意の $1 \leqq j \leqq C(n,p,k,S)$ に対して，$-1 \leqq r_j^k \leqq B(n,p,k,S)$ とする．$\mathbb{M} = \prod_{k=0}^{n-p-1}(\prod_{j=1}^{C(n,p,k,S)}(\prod_{i=1}^{B(n,p,k,S)-r_j^k} D_{k,j,i} \times \prod_{i=1}^{2r_j^k+1} \mathbb{R}_{k,j,i}))$ とする．このとき，ある埋め込み $E : X \to \mathbb{M}$ が存在し，$\mathbb{M}$ の任意の q 次元射影 P に対して，$P|_{E(X)} : E(X) \to \mathrm{codom}\ P$ は $(p+1)$ 次元以下のコンパクト空間を経由して分解される．

$$\begin{tikzcd} E(X) \arrow[rr, "P|_{E(X)}"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{codom}\ P\ (\dim = q) \\ & \dim \leqq p+1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

系 2.7, 2.11 と，定理 3.16 より，次の系を得る．

系 3.17. $n \geqq 2,\ 0 \leqq p \leqq n-2,\ S \geqq (n-p-1)(p+2)+1$ とし，任意の $0 \leqq k \leqq n-p-1$ と，任意の $1 \leqq j \leqq C(n,p,k,S)$ に対して，$-1 \leqq r_j^k \leqq B(n,p,k,S)$ とする．$\mathbb{M} = \prod_{k=0}^{n-p-1}(\prod_{j=1}^{C(n,p,k,S)}(\prod_{i=1}^{B(n,p,k,S)-r_j^k} D_{k,j,i} \times \prod_{i=1}^{2r_j^k+1} \mathbb{R}_{k,j,i}))$ とする．このとき，遺伝的分解不可能な任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \mathbb{M}$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $\mathbb{M}$ のどの 2 つも交わりを持たない $(p+2)$ 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が codom P_λ における σZ_{p+1}-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$\mathbb{M}$ の任意の $(p+2)$ 次元射影 P と，任意の $z \in$ codom P に対して，$E(X)$ は $P^{-1}(z)$ から取り外し可能となる．

系 3.17 において，任意の $0 \leqq k \leqq n-p-1$ と，任意の $1 \leqq j \leqq C(n,p,k,S)$ に対して，$r_j^k = B(n,p,k,S)$ とする．このとき，次の系を得る．

系 3.18. $n \geqq 2,\ 0 \leqq p \leqq n-2,\ S \geqq (n-p-1)(p+2)+1$ とする．このとき，遺伝的分

解不可能な任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^{N(n,p,S)}$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbb{R}^{N(n,p,S)}$ のどの 2 つも交わりを持たない $(p+2)$ 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が codom P_λ における σZ_{p+1}-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$E(X)$ は $\mathbb{R}^{N(n,p,S)}$ における余次元 $(p+2)$ の任意の座標アフィン平面から取り外し可能となる．

系 3.19. $n \geqq 2$ とする．このとき，遺伝的分解不可能な任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^{N(n,0,2n-1)}$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbb{R}^{N(n,0,2n-1)}$ のどの 2 つも交わりを持たない 2 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が codom P_λ における σZ_1-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$E(X)$ は $\mathbb{R}^{N(n,0,2n-1)}$ における余次元 2 の任意の座標アフィン平面から取り外し可能となる．

注意 3.20. 任意の $n \geqq 2$ に対して，$\binom{2n-1}{n}(4n-1) = N(n,0,2n-1)$ となる．

系 3.18 において，$p = n-2$ かつ $S = n+1$ とする．このとき，次の系を得る．

系 3.21. $n \geqq 2$ とする．このとき，遺伝的分解不可能な任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \mathbb{R}^{2n^3+3n-1}$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbb{R}^{2n^3+3n-1}$ のどの 2 つも交わりを持たない n 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が codom P_λ における σZ_{n-1}-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$E(X)$ は $\mathbb{R}^{2n^3+3n-1}$ における余次元 n の任意の座標アフィン平面から取り外し可能となる．

系 3.17 において，任意の $0 \leqq k \leqq n-p-1$ と，任意の $1 \leqq j \leqq C(n,p,k,S)$ に対して，$r_j^k = -1$ とする．このとき，次の系を得る．

系 3.22. $n \geqq 2$, $0 \leqq p \leqq n-2$, $S \geqq (n-p-1)(p+2)+1$ とする.各 $1 \leqq i \leqq N'(n,p,S)$ に対して，D_i をスーパーデンドライトとする．このとき，遺伝的分解不可能な任意の n 次元コンパクト空間 X に対してある埋め込み $E : X \to \prod_{i=1}^{N'(n,p,S)} D_i$ が存在し，$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\prod_{i=1}^{N'(n,p,S)} D_i$ のどの 2 つも交わりを持たない $(p+2)$ 次元射影の集合であり，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が codom P_λ における σZ_{p+1}-集合のとき，$E(X)$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ から取り外し可能となる．特に，$\prod_{i=1}^{N'(n,p,S)} D_i$ の任意の $(p+2)$ 次

元射影 P と，任意の $z \in$ codom P に対して，$E(X)$ は $P^{-1}(z)$ から取り外し可能となる．

4 Chogoshvili-Pontrjagin の主張にしたがう 2 次元空間

前の章で確認したように，3 次元以上のすべてのコンパクト空間は Chogoshvili-Pontrjagin の主張にしたがわず，また，2 次元コンパクト空間でも遺伝的分解不可能性という奇異な性質をもつものは Chogoshvili-Pontrjagin の主張にしたがわないのであった．このとき，「では，きれいな 2 次元空間の場合はどうなるのか．」と疑問に思うかもしれない．そこで本章では，2 次元コンパクト空間が Chogoshvili-Pontrjagin の主張にしたがうような条件について考える．

定義 4.1 (単連接空間)**.** 連結空間 X が単連接であるとは，連結な閉集合 $A, B \subset X$ が $X = A \cup B$ をみたすならば，かならず $A \cap B$ も連結となるときにいう．

定義 4.2 (ライト写像)**.** 全射 $f : X \to Y$ がライト写像であるとは，任意の $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ が完全不連結であるときにいう．

次の結果は，[4, Theorem 2.1] の $\mathbb{R}$ を D_i に置き換えて得られる改良版である．

定理 4.3 (Matsuhashi-Oshima-Tomie, [13], submitted)**.** $n \geqq 2$ とする．(X, d) を単連接で局所連結な連続体とする．X は非退化連続体 S で $|\mathrm{Cut}\ S| \leqq \aleph_0$ をみたすものを含むとする．K をコンパクト空間とし，$\varphi : X \to K$ を $\varphi|_S$ が単射となる写像とする．$\{D_i\}_{i=1}^n$ をデンドライトの族とし，$\psi : K \to \prod_{i=1}^n D_i$ をライト写像とする．このとき，$f = \psi \circ \varphi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ に対して，ある $1 \leqq i < j \leqq n$ が存在し，$(f_i, f_j) : X \to D_i \times D_j$ が安定値をもつ．

本章の最後に，[4, Theorem 2.1] を用いたシンプルな例を紹介する．

例 4.4. 2 次元閉球体 B^2 が Chogoshvili-Pontrjagin の主張にしたがうことを示す．任意の埋め込み $E(B^2) \subset \mathbb{R}^m$ を考える．$E(B^2)$ は単連接で局所連結な非退化連続体である．また，$|\mathrm{Cut}\ E(B^2)| = 0$ である．$\varphi = \mathrm{id}_{E(B^2)}$，$\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}|_{E(B^2)}$ とすると，[4, Theorem 2.1] より，$P|_{E(B^2)}$ が安定値をもつことがわかる．ただし，$P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$ は

射影とする．よって，B^2 は Chogoshvili-Pontrjagin の主張にしたがう．

参考文献

[1] F. D. Ancel, T. Dobrowolski, *On the Sternfeld-Levin counterexamples to a conjecture of Chogoshvili-Pontrjagin*, Topology Appl., 80 (1997), no.1-2, 7-19.

[2] T. Banakh, K. Trushchak, *Z_n-sets and the disjoint n-cells property in products of ANR's*, Mat. Stud., 13 (2000), no.1, 74-78.

[3] G. Chogoshvili, *On a theorem in the theory of dimensionality*, Compositio Math., 5 (1937), 292-298.

[4] T. Dobrowolski, M. Levin and L. Rubin, *Certain 2-stable embeddings*, Topology Appl., 80 (1997), no.1-2, 81-90.

[5] A. N. Dranishnikov, *On Chogoshvili's conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), no.7, 2155-2160.

[6] R. Engelking. *Theory of dimensions finite and infinite*, Heldermann Verlag, 1995.

[7] W. Hurewicz, *ber Abbildungen vonendlichdimensionalen Rumen auf Teilmengen Cartesischer Rume*, Sgb. Preuss. Akad., 34 (1933), 754-768.

[8] J. Krasinkiewicz, *On mappings with hereditarily indecomposable fibers*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 44 (1996), no.2, 147-156.

[9] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, PWN, Warszawa, 1968.

[10] M. Levin, *Bing maps and finite dimensional maps*, Fund. Math., 151 (1996), no.1, 47-52.

[11] M. Levin, Y. Sternfeld, *Mappings which are stable with respect to the property* $\dim f(X) \geqq k$, Topology. Appl., 52 (1993), no.3, 241-265.

[12] M. Levin, Y. Sternfeld, *Atomic maps and the Chogoshvili-Pontrjagin claim*, Trans. Amer. Math. Soc., 350 (1998), no.11, 4623-4632.

[13] E. Matsuhashi, Y. Oshima and M. Tomie, *The Chogoshvili-*

Pontrjagin Claim and Dendrites, submitted.

[14] J. van Mill, *The Infinite – Dimensional Topology of Function Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[15] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory : An introduction*, Pure Appl. Math. Ser., vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1992.

[16] B. A. Pasynkov, *On the geometry of continuous mappings of finite dimensional metrizable compacta*, Proc. Steklov Inst. Math. 212 (1996), 138-162.

[17] K. Sitnikov, *Example of a two dimensional set in three dimensional Euclidean space allowing arbitrarily small deformations into a one dimensional polyhedron and a certain new characteristic of the dimension of sets in Euclidean spaces*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 88 (1953), 21-24.

[18] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol.1, Second Edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[19] Y. Sternfeld, *Stability and dimension–a counterexample to a conjecture of Chogoshvili*, Trans. Amer. Math. Soc., 340 (1993), no.1, 243-251.

[20] Y. Sternfeld, *Mappings in dendrites and dimension*, Houston J. Math. 19 (1993), no.3, 483-497.