

# ノイズを受けた大域結合振動子系の 同期転移

京都大学情報学研究科 米田亮介

Graduate School of Informatics, Kyoto University,  
Ryosuke Yoneda

## 1 はじめに

同期現象は2つ以上の物体が同じタイミングで運動する現象のことを言い、ホタルの発光 [1, 2]、カエルの合唱 [3]、ニューロンの発火 [4] など、自然界のさまざまなところで見られる。この現象を数学や物理の観点から定式化し、なぜ同期が起きるのかを理論的に明らかにする研究が古くからなされてきた。とりわけ、1975年に蔵本によって提唱された蔵本モデル [5] はモデルの簡潔さとその豊かな数学的構造から多くの注目を集めてきた [6-8]。蔵本モデルは円周上を運動する振動子の微分方程式で表される。各振動子は自然振動数を持ち、位相差を通して  $\sin$  関数で他の振動子と結合している。振動子間の結合の強さを上げていくと、振動子は非同期状態から同期状態への同期転移を起こすことが知られている。

転移現象を特徴づける臨界指数を計算すると、蔵本モデルにおいては自然振動数の従う確率密度関数の選び方によって異なる臨界指数が現れることがわかっている [9]。また、結合関数を一般の周期関数にした大域結合振動子系を考えると更に異なる臨界指数が得られることも報告されている [10]。応用上、結合振動子系にノイズを受けたものを考える研究 [11] も多いが、自然振動数の従う確率密度関数による依存性についてはまだ知られていない。そこで本報告書では、ノイズを受けた大域結合振動子系における同期転移の性質を調べた。はじめにノイズを受けない大域結合振動子系における同期転移の性質をかたんに述べたあと、結合関数として第2高調波までを含むものを考え、その連続極限が従う Fokker-Planck 方程式の定常解による自己無矛盾方程式を導出する。この方程式を臨界点周りで展開することで同期転移の性質を調べた。また、この結果を数値計算により確認した。

## 2 ノイズなしの場合

はじめにノイズが入っていない大域結合振動子系について簡単に述べる。モデルは次の微分方程式で表される。

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

ここで、 $\theta_i$  は  $i$  番目の振動子の位相で  $\theta_i \in [0, 2\pi) \simeq \mathbb{S}^1$  である。 $\omega_i$  は  $i$  番目の振動子の持つ自然振動数で、確率密度関数  $g(\omega)$  からランダムに選ばれる。 $K$  は振動子間の結合強度を表し、 $K = 0$  のときには相互作用はなく、各振動子は円周上を独立に角速度  $\omega_i$  で回る。以降では  $K > 0$  の相互作用がある場合を考える。 $\Gamma$  は周期  $2\pi$  の結合関数で、角振動子の位相差を通して結合している。本報告書では結合関数として

$$\Gamma(\theta) = \sin \theta + a \sin 2\theta \quad (2)$$

を取る。 $a = 0$  のときには結合関数は  $\sin$  関数であり、これは蔵本モデルに対応する。以下では  $a = 0$  と  $a \neq 0$  で定性的に異なる振る舞いを見せることを確認する。

大域結合振動子系において同期転移が起きることを見ていこう。振動子が同期することは次の秩序変数を用いて確認できる。

$$z_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{ik\theta_j} =: r_k e^{i\psi_k}, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

$k = 1$  の場合には  $r_1$  は複素平面の単位円周上を運動する振動子の重心の原点からの距離を表す。振動子が非同期状態にあるとき、振動子は円周上におおよそ一様に分布するので、振動子の重心は原点に十分近くなる。対応して  $r_1 \approx 0$  である。一方で振動子が完全に同期していて、円周上の一点に集中しているときには、振動子の重心は円周上に位置することになる。対応して  $r_1 = 1$  である。よって、 $r_1$  の値が 0 に近いときには非同期状態、1 に十分近いときには同期状態にそれぞれ対応することがわかる (図1を参照)。また、 $k = 2$  のときには位相を 2 倍にする効果があるので、振動子がちょうど  $\pi$  ずれたところに二極化している場合にも  $r_2 \approx 1$  となる。よって、 $r_2 > 0$  かつ  $r_1 \approx 0$  の場合には、振動子は円周上の 2 つの部分に位置することがわかる。

振動子間の結合強度を大きくしていくと、非同期状態から同期状態へと移行することが予想される。 $N \rightarrow \infty$  の極限を考えると、秩序変数の結合強度依存性はある臨界点  $K_c$  が存在して

$$r_1 \sim (K - K_c)^\beta \quad (4)$$

とべき  $\beta$  で立ち上がる。この指数  $\beta$  は臨界指数 (critical exponent) の一つである。臨界指数は平衡統計力学の分野で良く研究されている。系の詳細な情

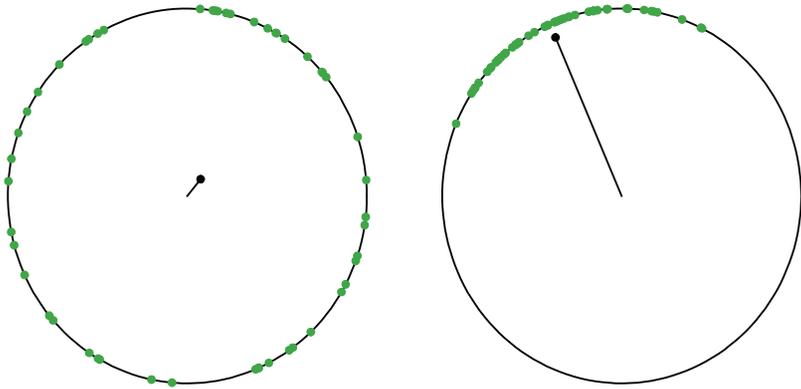


図 1: 非同期状態 (左図) と同期状態 (右図) の概略図。

報には依存せず、系の次元や対称性のみ依存することから臨界指数は普遍性 (universality) を持つとされている。大域結合振動子系は散逸系なので平衡統計力学の範疇で扱えるものではないが、平衡統計力学 (特に XY 模型) との類似性 [12] から臨界指数については理論的もしくは数値計算を用いて計算されている。以下で大域結合振動子系の臨界指数について見ていこう。振動子の持つ自然振動数が次の確率密度関数の族  $g_n(\omega)$  に依存するとする。

$$g_n(\omega) = \frac{n \sin[\pi/(2n)]}{\pi} \frac{\gamma^{2n-1}}{\omega^{2n} + \gamma^{2n}}. \quad (5)$$

$n = 1$  のときこの確率密度関数は Cauchy 分布 (もしくは Lorentz 分布) であり、 $g_n(\omega)$  はこの拡張である。すると、

- $a = 0$  の場合、このモデルは蔵本モデルになる。蔵本モデルの場合自然振動数分布のとり方によって臨界指数  $\beta$  の値が変わることが知られており、

$$\beta = \frac{1}{2n} \quad (6)$$

である [9]。この臨界指数は秩序変数  $r_1$  に関する自己無矛盾方程式から得られる。 $n$  依存性は  $g_n(\omega) \approx g_n(0) - C\omega^{2n} + \dots$  と Maclaurin 展開できることに由来する。

- $a < 0$  の場合、結合関数に  $\sin 2\theta$  が入るようになる。この場合にも非同期状態から同期状態への同期転移が起こり、臨界指数は

$$\beta = 1 \quad (7)$$

である [10]。

- $0 < a < 1$  の場合、非同期状態から同期状態への転移は生じるが、この転移はヒステリシスを伴うことがわかっている [10]。そのため、臨界指数は定義されない。

ここでは述べないが、 $a > 1$  においては  $\sin 2\theta$  の影響が強くなるので  $r_2$  が先に同期転移を起こす。このように、ノイズがない場合には大域結合振動子系は自然振動数の従う確率密度関数によって臨界指数が変動することがわかった。次にノイズが入った場合の大域結合振動子系を定義し、同期転移が起きる臨界点とその臨界指数を計算しよう。

### 3 ノイズが入った大域結合振動子系

ノイズを受けた大域結合振動子系として次のモデルを考える。

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_j - \theta_i) + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

式 (1) からの変更点はノイズ  $\xi_i(t)$  が追加された点である。このノイズは、

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t-t') \quad (9)$$

に従う白色ガウスノイズである。この微分方程式は秩序変数  $r_k$  を用いて簡略化できる。

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - Kr_1 \sin \theta_i - aKr_2 \sin 2\theta_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

この標識によって各振動子は平均場と結合する形で表現できる。以下の計算は  $\psi_k \neq 0$  の場合でも同じ結果が得られるが、簡単のために  $\psi_k = 0$  と置いた。

ノイズが入った場合の大域結合振動子系における同期転移を確認するために、 $N \rightarrow \infty$  の極限を考える。式 (8) はこの極限で Fokker-Planck 方程式で表される。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(V[F]F) = D \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad (11)$$

$$V[F] = \omega - Kr_1 \sin \theta - aKr_2 \sin 2\theta. \quad (12)$$

ここで、 $F(\theta, \omega, t)$  は時刻  $t$  における  $(\theta, \omega)$  の確率密度関数を表す。秩序変数  $r_k$  は

$$r_k = \int_{\mathbb{R}} d\omega \int_{\mathbb{S}^1} d\theta e^{ik\theta} F(\theta, \omega, t) \quad (13)$$

で表される。また  $\omega$  は確率密度関数  $g(\omega)$  に従うので、

$$\int_{\mathbb{S}^1} d\theta F(\theta, \omega, t) = g(\omega) \quad (14)$$

が成り立つ。次のセクションで Fokker-Planck 方程式の定常解を用いて臨界指数を計算する。

## 4 自己無矛盾方程式

Fokker–Planck 方程式 (11) の定常解  $F_{\text{st}}(\theta, \omega)$  は

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (V[F_{\text{st}}]F_{\text{st}}) = D \frac{\partial^2 F_{\text{st}}}{\partial \theta^2} \quad (15)$$

を満たす。これは手で解くことができ、

$$F_{\text{st}}(\theta, \omega) = g(\omega) \frac{e^{\varphi(\theta, \omega)} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' e^{-\varphi(\theta', \omega)}}{\int_0^{2\pi} d\phi e^{\varphi(\phi, \omega)} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\theta' e^{-\varphi(\theta', \omega)}}, \quad (16)$$

$$\varphi(\theta, \omega) = \frac{1}{D} \int_0^{\theta} d\theta' V[F](\theta', \omega) = \frac{\omega\theta}{D} - \frac{Kr_1}{D}(1 - \cos\theta) - \frac{aKr_2}{2D}(1 - \cos 2\theta) \quad (17)$$

と求まる。ただし  $r_1, r_2$  は未知変数で、 $F_{\text{st}}$  に依存することに注意する。

$F_{\text{st}}$  を用いて  $r_1, r_2$  を計算すると、

$$r_k = \int_{\mathbb{R}} d\omega \int_{\mathbb{S}^1} d\theta e^{ik\theta} F_{\text{st}}(\theta, \omega, t), \quad k = 1, 2 \quad (18)$$

である。 $F_{\text{st}}$  は  $r_1, r_2$  に依存するので、これは  $r_k$  に関する自己無矛盾方程式になっている。

臨界点近傍では  $r_1, r_2$  は十分に 0 に近いとしよう。このもとで式 (18) を  $r_k = 0$  周りで Taylor 展開をする。 $g_n(\omega)$  を積分核とする  $q_{s,k}$  を

$$q_{s,k} = \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{D^{2s} g_n(\omega)}{[\omega^2 + k^2 D^2]^s} \quad (19)$$

と定義しよう。すると、

$$r_1 = \frac{Kq_{1,1}}{2D} r_1 + \frac{aK^2 q_{1,2}}{2D^2} r_1 r_2 + \frac{K^3}{4D^3} (q_{1,1} - q_{1,2} - q_{2,1}) r_1^3 + \dots, \quad (20)$$

$$r_2 = \frac{aKq_{1,2}}{D} r_2 + \frac{K^2}{4D^2} (q_{1,1} - 2q_{1,2}) r_1^2 - \frac{aK^3}{48D^3} (5q_{1,1} - 32q_{1,2} + 27q_{1,3}) r_1^2 r_2 + \dots \quad (21)$$

が得られる。 $r_1, r_2$  がそれぞれ 0 から立ち上がる点  $K$  を  $K_c^{(1)}, K_c^{(2)}$  と置くと、これは式 (20)、(21) の線形部分の係数比較を行うことで

$$K_c^{(1)} = \frac{2D}{q_{1,1}}, \quad K_c^{(2)} = \frac{D}{aq_{1,2}} \quad (22)$$

と求まる。本研究では  $r_1$  が先に立ち上がる場合について考えるので、 $K_c^{(1)} < K_c^{(2)}$  が必要である。よって、以下では  $a$  について

$$a < \frac{q_{1,1}}{2q_{1,2}} \quad (23)$$

という条件を課しておく。すると、臨界点  $K_c^{(1)}$  近傍においては次元を解析することで  $O(r_1^2) = O(r_2)$  がわかる。式 (21) より

$$r_2 \approx \frac{1}{q_{1,1}} \frac{q_{1,1} - 2q_{1,2}}{q_{1,1} - 2aq_{1,2}} r_1^2 \quad (24)$$

と求まるので、これを式 (20) に代入することで、

$$0 = \left( \frac{K}{K_c^{(1)}} - 1 \right) r_1 + c_3 r_1^3 + \dots, \quad (25)$$

$$c_3 = \frac{2[q_{1,1}(q_{1,1} - q_{1,2} - q_{2,1}) - aq_{1,2}(q_{1,1} - 2q_{2,1})]}{q_{1,1}^3(q_{1,1} - 2aq_{1,2})} \quad (26)$$

が計算できる。これは標準的なピッチフォーク分岐と同様の解析をすることで分岐の様子を確認することができる。すなわち、

- $c_3 < 0$  のときにはピッチフォーク分岐が起きて、

$$r_1 \sim (K - K_c^{(1)})^{1/2} \quad (27)$$

と求まる。

- $c_3 > 0$  のときには亜臨界ピッチフォーク分岐が起きる。そのため臨界指数は定義されず、秩序変数は不連続転移を起こす。

となる。 $c_3$  の符号は完全に  $a$  の値によって定まり、その境界  $a_0$  は

$$a_0 = \frac{q_{1,1}(q_{1,1} - q_{1,2} - q_{2,1})}{q_{1,2}(q_{1,1} - 2q_{2,1})} \quad (28)$$

である。これらをまとめると、

- $a < a_0$  の場合、同期転移が起き、臨界指数  $\beta$  は  $\beta = 1/2$  と求まる。
- $a_0 < a < q_{1,1}/(2q_{1,2})$  の場合、不連続転移が起き、 $\beta$  は定義されない。

この結果は、ノイズが入っていない場合の臨界指数の値と本質的違うことがわかる。ノイズが入っていない場合には自然振動数が従う確率密度関数や  $a$  の値によって臨界指数が大きく異なることを見たが、ノイズが入った場合には臨界指数は  $1/2$  を取ることしかありえないことがわかる。次のセクションでは実際に数値計算を行い、理論の検証を行う。

## 5 Cauchy 分布の場合

このセクションでは数値計算を行い、前セクションで得られた結果を確認する。自然振動数が従う確率密度関数は式 (5) で与えられたが、特に  $n = 1$  の Cauchy 分布の場合について考える。

はじめに  $n = 1$  における積分核の計算を行う。

$$q_{1,1} = \frac{D}{D + \gamma}, \quad q_{1,2} = \frac{D}{2(2D + \gamma)}, \quad (29)$$

$$q_{2,1} = \frac{D(2D + \gamma)}{2(D + \gamma)^2}, \quad q_{2,2} = \frac{D(4D + \gamma)}{16(2D + \gamma)^2} \quad (30)$$

である。よって、

$$a_0 = \frac{D}{D + \gamma}, \quad K_c^{(1)} = 2(D + \gamma) \quad (31)$$

であり、 $a < a_0$  のとき、臨界点  $K = K_c^{(1)}$  周りで臨界指数  $1/2$  で秩序変数  $r_1$  が立ち上がることが期待される。 $a_0 < a < \frac{2D + \gamma}{D + \gamma}$  においては不連続転移が起きる。これはヒステリシスを見ることによって確認できる。ここでは細かい計算は述べないが、 $a = a_0$  においては式 (20) を更に高次まで展開することで  $\beta = 1/4$  が得られることもわかる。

以下に数値計算の設定をまとめる。 $D = \gamma = 1$  を取る。このとき、臨界点は  $K_c = 4$  であり、 $a < 0.5$  では同期転移が起これり、 $0.5 < a < 1.5$  では不連続転移が起きる。 $\sin 2\theta$  の係数  $a$  について、 $a = -1.0, 0.3, 1.3$  を取る。また、振動子数は  $N = 10^5$  に設定する。式 (8) はノイズを受けた微分方程式なので、オイラー丸山法を用いて数値計算をする。各  $K$  について時間刻み幅は  $\delta t = 0.01$  で時刻  $t = 100$  までの計算を行い、時刻  $t = 80$  から  $t = 100$  までの時間平均をとって秩序変数  $r_1$  を記録した。各  $a$  に対して  $\omega_i, \theta_i$  の初期値を 5 回取り替えた。この結果が図2である。5つのサンプル平均を青線でプロットしているが、 $a = -1.0, 0.3$  では  $K = 4$  付近から連続転移が起きていることが確認できる。また、 $a = 1.3$  では不連続転移が起きていることも見られる。

## 6 結論

本報告書では、ノイズを受けた大域結合振動子系について考えた。振動子が無限に存在する連続極限を取り、その定常解を求めることで、秩序変数に関する自己無矛盾方程式を求めた。この自己無矛盾方程式を臨界点周りで解析することで同期転移が起きる場合の臨界指数  $\beta$  を求めることに成功した。ノイズを受けない大域結合振動子系とは異なり、臨界指数  $\beta$  は自然振動数が従う確率密度関数には依存しない値を取ることを確認した。特に自然振動数が従う確率密度関数が Cauchy 分布の場合の相図を図3に示す。

式 (8) において、ノイズは白色ガウスノイズであることを仮定した。近年、このノイズを Cauchy ノイズに拡張したモデルが考えられている [13, 14]。Cauchy ノイズを受けた大域結合振動子系の Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} (V[F]F) + \frac{\sigma}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| \hat{F}_k e^{-ik\theta} = 0 \quad (32)$$

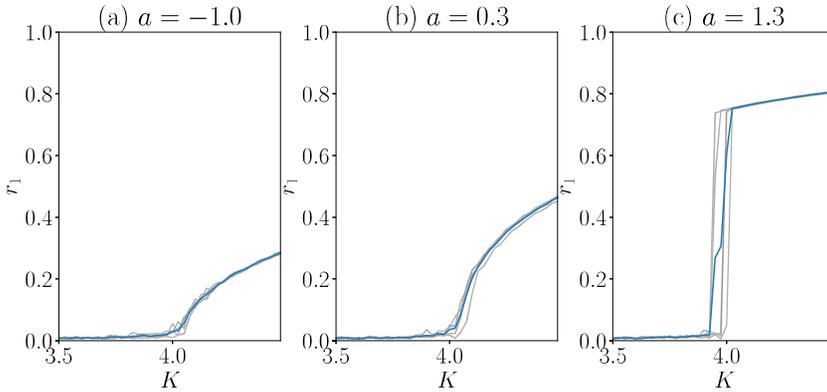


図 2: ノイズを受けた大域結合振動子系の数値計算結果。振動子数を  $N = 10^5$  とした。  $a = -1.0, 0.3, 1.3$  に対して 5 つのサンプルを取り、その秩序変数  $r_1$  の  $K$  依存性を灰色の線でプロットした。また、そのサンプル平均を青色の線でプロットした。  $a = -1.0, 0.3$  では連続転移が、  $a = 1.3$  では不連続転移が起きることが確認できる。

で与えられる。 $\sigma$  は Cauchy ノイズのスケールを表す量である。 $\hat{F}_k$  は時刻  $t$  における確率密度関数  $F(\theta, \omega, t)$  を  $\theta$  方向に Fourier 級数展開したときの  $k$  モードの係数である。文献 [13, 14] では、式 (32) は Ott–Antonsen 縮約を用いて有限自由度の力学系に落とし込めることが報告されている。このように、一般のノイズを受けた大域結合振動子系における同期転移の理論研究や、現実のモデルへの適用をする研究が今後更に発展することが期待される。

## References

- [1] H. M. Smith, “Synchronous flashing of fireflies”, *Science* **82**, 151 (1935).
- [2] J. Buck and E. Buck, “Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies”, *Science* **159**, 1319 (1968).
- [3] I. Aihara, T. Mizumoto, T. Otsuka, H. Awano, K. Nagira, H. G. Okuno, and K. Aihara, “Spatio-temporal dynamics in collective frog choruses examined by mathematical modeling and field observations”, *Scientific Reports* **4**, 3891 (2014).
- [4] R. Cossart, D. Aronov, and R. Yuste, “Attractor dynamics of network UP states in the neocortex”, *Nature* **423**, 283 (2003).
- [5] Y. Kuramoto, in *International symposium on mathematical problems in theoretical physics* (Springer-Verlag), pp. 420–422.

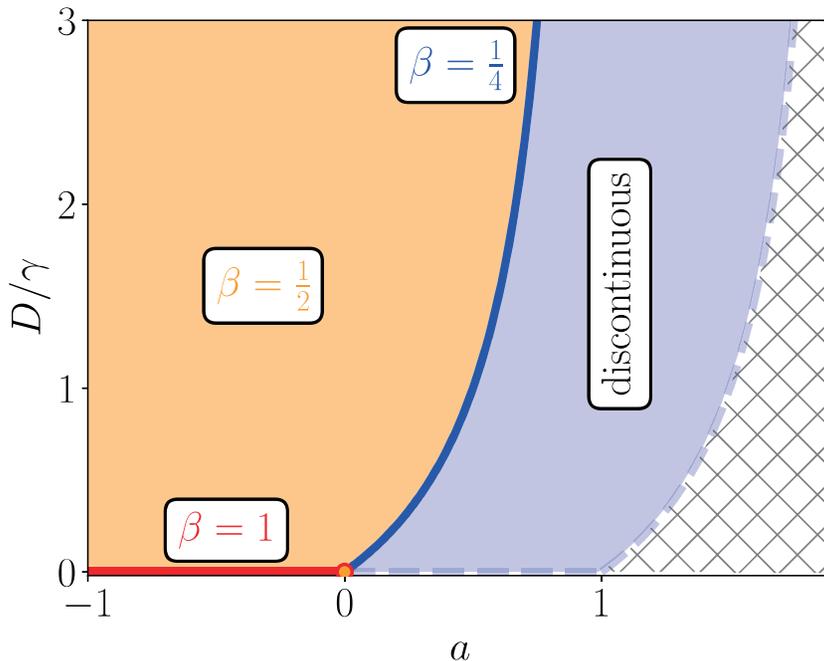


図 3: 自然振動数の従う確率密度関数が Cauchy 分布の場合の同期転移に関する相図。 $D/\gamma = 0$  の部分がノイズがない大域結合振動系に対応する。斜線部は  $r_2$  が先に同期する領域になる。

- [6] S. H. Strogatz, “From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **143**, 1 (2000).
- [7] E. Ott and T. M. Antonsen, “Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **18**, 037113 (2008).
- [8] H. Chiba, “A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite-dimensional Kuramoto model”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **35**, 762 (2013).
- [9] H. Daido, “Susceptibility of large populations of coupled oscillators”, *Physical Review E* **91**, 10.1103/physreve.91.012925 (2015).
- [10] H. Chiba and I. Nishikawa, “Center manifold reduction for large populations of globally coupled phase oscillators”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **21**, 043103 (2011).
- [11] H. Sakaguchi, “Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields”, *Progress of Theoretical Physics* **79**, 39 (1988).

- [12] T. Uezu, T. Kimoto, S. Kiyokawa, and M. Okada, “Correspondence between phase oscillator network and classical XY model with the same infinite-range interaction in statics”, *Journal of the Physical Society of Japan* **84**, 033001 (2015).
- [13] T. Tanaka, “Low-dimensional dynamics of phase oscillators driven by cauchy noise”, *Physical Review E* **102**, 10.1103/physreve.102.042220 (2020).
- [14] R. Tönjes and A. Pikovsky, “Low-dimensional description for ensembles of identical phase oscillators subject to cauchy noise”, *Physical Review E* **102**, 10.1103/physreve.102.052315 (2020).