

## ユーザーガイド：2次元非圧縮流体のCOT表現

京都教育大学 数学科 横山 知郎

TOMOO YOKOYAMA

KYOTO UNIVERSITY OF EDUCATION, DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ABSTRACT. この論文では、穴の空いた平面上の2次元非圧縮流体のトポロジーを記述するCOT表現 (partially Cyclic Ordered Tree representation) の求め方を解説する。特に、COT表現は一般的な流体のトポロジーを有限情報で完全に記述する新しい記法である。

## 1. 準備

この論文は、参考文献にある論文 [4, 7] の理論に基づいて、坂上-横山によって構成された平面上の流れの文字化理論の適用方法について解説する。ここで、流れの文字化理論とは、流れのトポロジーを有限情報である有限文字列を使って表現する理論のことである。厳密な主張や定義については、上記の論文を参考にされたい。また、この文字化理論の応用例については、論文 [3] を参考にされたい。ただし、必要最低限の定義を付録に載せた。さらに、Hamiltonian をCOT表現に変換するアルゴリズムが実装 (psiclone) されており [6]、流れの文字化理論のCOT表現 (の縮約) として現れるすべての語を生成するアルゴリズムも実装されている [8]。また、COT表現や文字表現は様々な変種があるので、この論文では直観的に一番わかりやすいと思われる表現の一つを紹介する。特に、この表現は、語を生成するアルゴリズムの実装に適するように、横山-横山 [10] によって改良されたものであり、計算機上で実装しやすい表現になっている<sup>1</sup>。

1.1. 定義と事実. この論文において、流れとは、有限個の境界 (穴) が存在するような平面上の非圧縮な流れとする<sup>2</sup>。

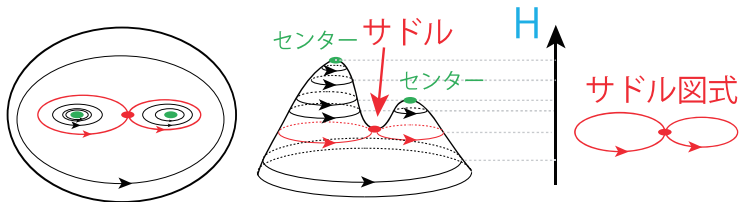


図 1. 流れ, 高さ函数による流れの表示, そのサドル図式

これらの流れについて、以下の事実が知られている [2, 7]:

- “ほとんど”の流れは摂動を加えても変化しない。
- “ほとんど”の流れのトポロジーは有限情報で記述できる。
- “ほとんど”の不安定な流れのトポロジーは有限情報で記述できる。

初めの主張を言い換えると、「十分短い時間において、一般に観測される流れのトポロジーは変化しない」ということである。そこで、現実の流体現象を扱う第一歩として、以後は、摂動を加えても変化しない流れのみを扱うことにする。すなわち、トポロジーが変化するような例外的な流れを考えないことにする。もちろん、摂

<sup>1</sup>この論文で紹介する流れの文字化理論は、非圧縮な流れに限定されているが、圧縮性のある流れの文字化理論の基礎理論はすでに構成されており、圧縮性のある一般の流れの分類理論は現在構築され、そのCOT表現も構成されている [5]。

<sup>2</sup>有限個の境界と有限個の特異点を持つ平面上または球面上の非圧縮流はHamiltonian流になることが知られている (cf. [11, Lemma 6.12][12])。そのため、これらの流れの軌道は、ある高さ函数の等高線に含まれる (図 1 参照)。さらに、平面上の非圧縮流だけでなく、コンパクト曲面上の一般のHamilton流についてのCOT表現も構成されている [10]



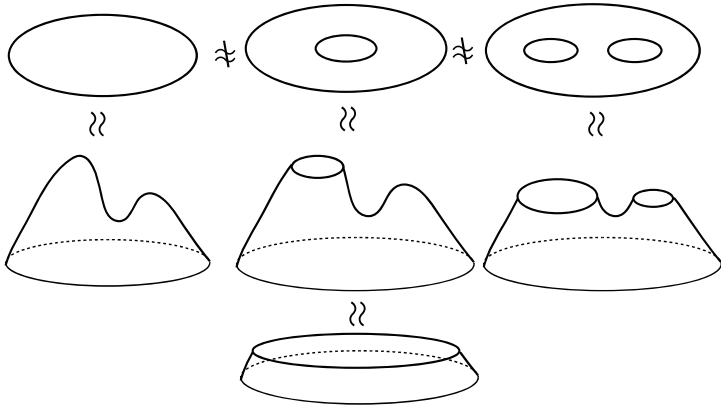


図 4. 円板  $\not\approx$  円環  $\not\approx$  パンツ

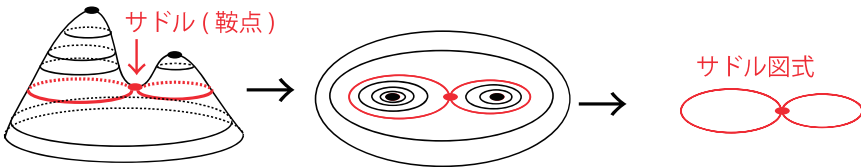


図 5. 山の等高線とその地図とそのサドル図式

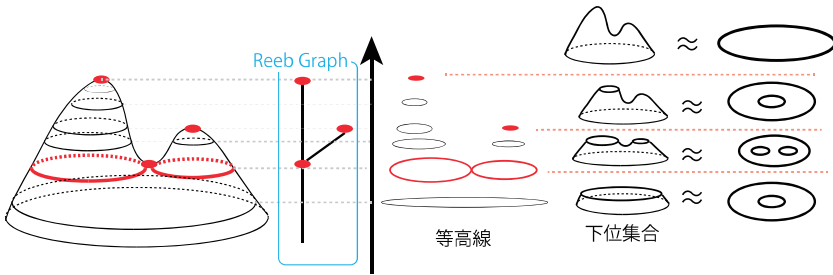


図 6. 山の等高線とその下位集合

(さらに、サドル図式の双対グラフは Reeb グラフと呼ばれる。この Reeb グラフは、流れの COT 表現のグラフ構造と対応がある ([10] 参照)。) 以下の事実、一般的な流体のトポロジーを有限情報で完全に記述するための基礎となる。

**Theorem 1.1** ([2, 7]). 有限個の境界 (穴) が存在するような平面上の非圧縮な流れは、サドル図式とセンターの和集合によって、流れの構造が完全に記述される。

以下、サドル図式とセンターの和集合を、簡単のために、単にサドル図式と呼ぶことにする。

1.3. 流れの構成要素.

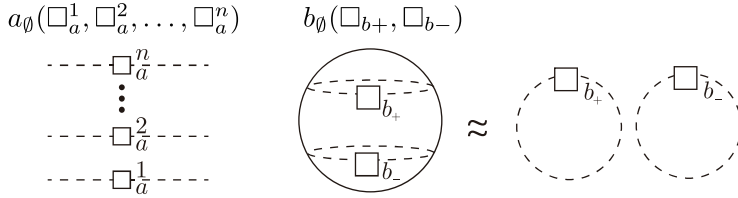


図 7. 平面上または球面上の空なサドル図式に対応するルート構造: 左  $a_\emptyset$ , 右  $b_\emptyset$ .

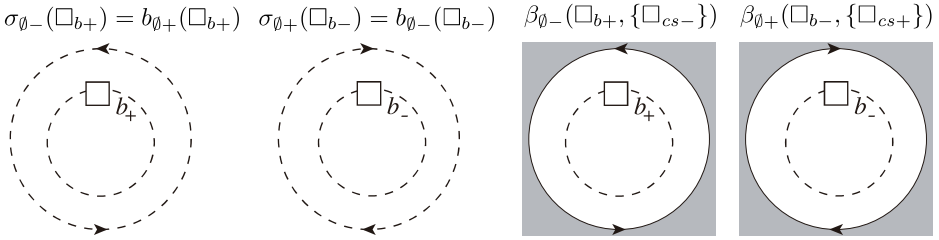


図 8. 有界円板上の空なサドル図式に対応するルート構造: 左  $\sigma_{\emptyset\pm}$ , 右  $\beta_{\emptyset\pm}$ .

(0) 平面上の一樣流と球面上の回転流は空なサドル図式に対応する。一方、これらを区別するために、 $a_\emptyset$  と  $b_\emptyset$  によって区別する (図 7 参照)。これら 2 つの空なサドル図式  $a_\emptyset$  と  $b_\emptyset$  に流れの要素を付け加えることによって、任意の流れを表現する記述 (COT 表現) を以下で紹介する:

(1) ルートに対応する以下の記号を導入する:

平面上の空なサドル図式 (図 7) を以下の記号で表す:  $a_\emptyset(\square_{as})$

球面上の空なサドル図式 (図 7) を以下の記号で表す:  $b_\emptyset(\square_{b+}, \square_{b-})$

特に、開円板上や閉円板上の流れは応用上重要であるので、以下の記号を導入する:

開円板上の空なサドル図式 (図 7) を以下のように定める:  $\sigma_{\emptyset\pm}(\square_{b\mp}) = b_{\emptyset\mp}(\square_{b\mp}) := b_\emptyset(\sigma_{\pm}, \square_{b\mp})$

閉円板上の空なサドル図式 (図 7) を以下のように定める:  $\beta_{\emptyset\pm}(\square_{b\mp}, \{\square_{cs\pm}\}) := b_\emptyset(\beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}\}, \square_{b-})$

ただし、 $()$  は全順序,  $\{\}$  は円順序を表す。

(2) ボックスには以下の種類がある:  $\square_{as}, \square_{b-}, \square_{b+}, \square_{cs-}, \square_{cs+}$

(3) 代入に対する規則は以下である:

$\square_{as}$  には、非負整数個の  $a_-(\square_{b-}), a_+(\square_{b+}), a_2(\square_{cs+}, \square_{cs-})$  が代入される<sup>4</sup>

$\square_{b-}$  には、正の整数個の  $b_+(\square_{b-}, \square_{b+}), b_-\{\square_{b-}, \square_{b-}\}, \beta_-\{\square_{cs-}\}, \sigma_-$  が代入される

$\square_{b+}$  には、正の整数個の  $b_+\{\square_{b+}, \square_{b+}\}, b_+(\square_{b+}, \square_{b-}), \beta_+\{\square_{cs+}\}, \sigma_+$  が代入される

$\square_{cs-}$  には、非負整数個の  $c_+(\square_+, \square_{cs-})$  が代入される<sup>5</sup>

$\square_{cs+}$  には、非負整数個の  $c_-(\square_-, \square_{cs+})$  が代入される<sup>6</sup>

略記法として、 $\sigma_{\pm}$  を省略することもある。例えば、 $b_{++}(\sigma_+, \sigma_+)$  を  $b_{++}$  と書く。また、 $a_\emptyset(\square_a^1, \square_a^2, \dots, \square_a^n)$  を  $\square_a^1 \cdot \square_a^2 \cdot \dots \cdot \square_a^n$  と書くことがある。例えば、 $a_\emptyset(a_+, a_2, a_-(b_{--}))$  を  $a_+ \cdot a_2 \cdot a_-(b_{--})$  と書く。

<sup>4</sup> $\square_{as}$  は非負整数個の  $\square_a$  を表したのとも思える。

<sup>5</sup> $\square_{cs-}$  は非負整数個の  $\square_c$  を表したのとも思える。

<sup>6</sup> $\square_{cs+}$  は非負整数個の  $\square_{c+}$  を表したのとも思える。

1.4. 代入による流れの構成. (構造安定な) 流れのサドル図式は, 空なサドル図式  $a_0, b_0, b_{0\pm}, \beta_{0\pm}$  から始めて, 以下の 13 の操作に対応する記号を対応するボックス  $\square_{a\pm}, \square_{b\pm}, \square_{c\pm}, \square_{cs\pm}$  に代入することで, 構成される (図 9 参照):

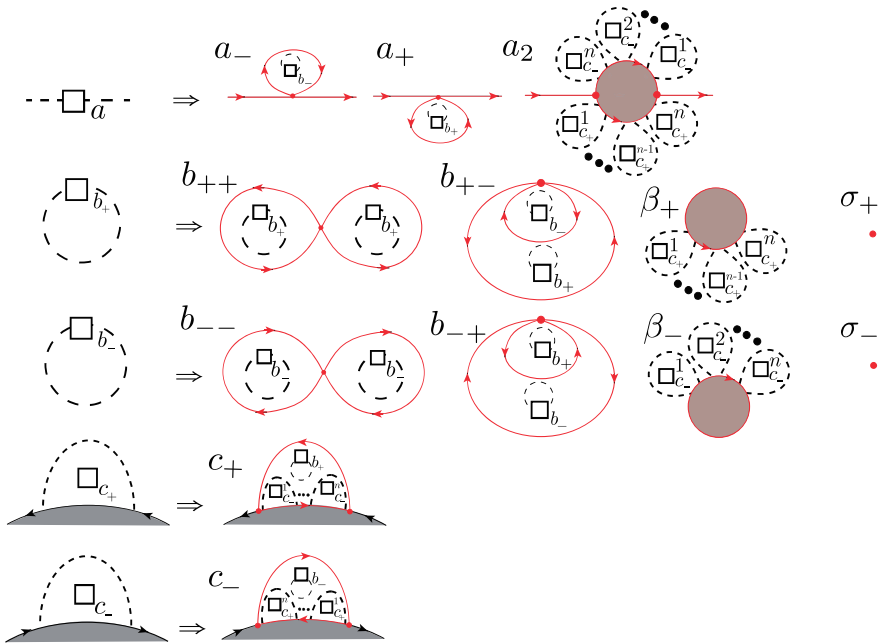


図 9. 流れのすべての構成要素

1.  $a_-$ : 無限から来て無限に遠ざかっていく軌道に, サドルと時計周りのホモクリニック軌道を付け加えた和集合.
2.  $a_+$ : 無限から来て無限に遠ざかっていく軌道に, サドルと反時計周りのホモクリニック軌道を付け加えた和集合.
3.  $b_-$ : 時計周りの周期軌道に, サドルと時計周りのホモクリニック軌道を付け加えた和集合.
4.  $b_+$ : 時計周りの周期軌道に, サドルと反時計周りのホモクリニック軌道を付け加えた和集合.
5.  $b_{++}$ : 反時計周りの周期軌道に, サドルと反時計周りのホモクリニック軌道を付け加えた和集合.
6.  $b_{+-}$ : 反時計周りの周期軌道に, サドルと時計周りのホモクリニック軌道を付け加えた和集合.
7.  $a_2$ : 無限から来て無限に遠ざかっていく軌道に, 境界と境界サドルとヘテロクリニック軌道を付け加えた和集合.
8.  $\beta_-$ : 時計周りの境界.
9.  $\beta_+$ : 反時計周りの境界.
10.  $c_-$ : 境界サドルが存在する境界に, 境界サドルと時計周りのホモクリニック軌道を付け加えた和集合.
11.  $c_+$ : 境界サドルが存在する境界に, 境界サドルと反時計周りのホモクリニック軌道を付け加えた和集合.
12.  $\sigma_-$ : 時計周りのセンター.
13.  $\sigma_+$ : 反時計周りのセンター.

## 2. さまざまな場合の COT 表現

以下では, さまざまな応用に適用するためのユーザーガイドとして, 上記で述べた一般の COT 表現の特殊な場合について述べる.

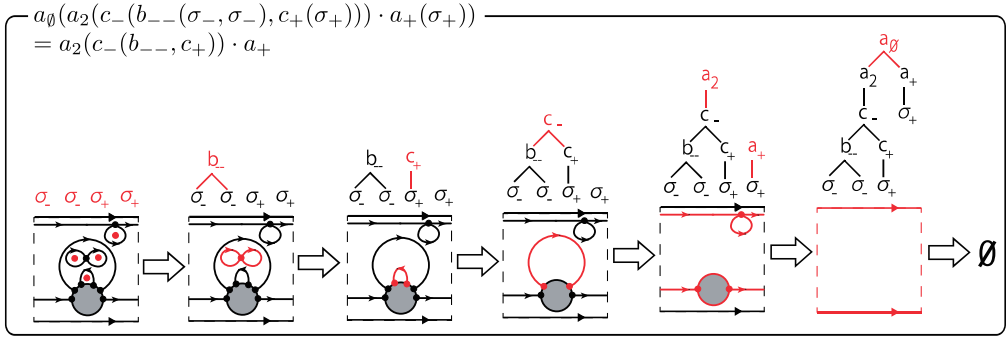


図 10. 流れの COT 表現の構成法の適用例

2.1. 有界な開円板上の COT 表現 (i.e. 図 8 の左の 2 つの図の場合). 有界な単連結開領域上の流れの COT 表現は以下で定義される:

- (1) ルートに対応する記号は以下である:  $b_{\emptyset-}(\square_{b-})$   $b_{\emptyset+}(\square_{b+})$
- (2) ボックスには以下の種類がある:  $\square_{b-}, \square_{b+}$
- (3) 代入に対する規則は以下である:
  - $\square_{b-}$  には, 正の整数個の  $b_{-+}(\square_{b-}, \square_{b+}), b_{--}\{\square_{b-}, \square_{b-}\}, \beta_{-}\{\square_{cs-}\}, \sigma_{-}$  が代入される
  - $\square_{b+}$  には, 正の整数個の  $b_{++}\{\square_{b+}, \square_{b+}\}, b_{+-}(\square_{b+}, \square_{b-}), \beta_{+}\{\square_{cs+}\}, \sigma_{+}$  が代入される

2.2. 有界な開円板上の COT 表現 (i.e. 図 8 の右の 2 つの図の場合). 有界な単連結閉領域上の流れの COT 表現は以下で定義される:

- (1) ルートに対応する記号は以下である:  $\beta_{\emptyset+}(\square_{b-}, \{\square_{cs+}\}), \beta_{\emptyset-}(\square_{b+}, \{\square_{cs-}\})$
- (2) ボックスには以下の種類がある:  $\square_{b-}, \square_{b+}, \square_{cs-}, \square_{cs+}$
- (3) 代入に対する規則は以下である:
  - $\square_{b-}$  には, 正の整数個の  $b_{-+}(\square_{b-}, \square_{b+}), b_{--}\{\square_{b-}, \square_{b-}\}, \beta_{-}\{\square_{cs-}\}, \sigma_{-}$  が代入される
  - $\square_{b+}$  には, 正の整数個の  $b_{++}\{\square_{b+}, \square_{b+}\}, b_{+-}(\square_{b+}, \square_{b-}), \beta_{+}\{\square_{cs+}\}, \sigma_{+}$  が代入される
  - $\square_{cs-}$  には, 非負整数個の  $c_{+}(\square_{+}, \square_{cs-})$  が代入される
  - $\square_{cs+}$  には, 非負整数個の  $c_{-}(\square_{-}, \square_{cs+})$  が代入される

2.3. (穴のない) 平面上の COT 表現 (i.e. 図 7 の左図の場合). 非有界な単連結領域上の流れの COT 表現は以下で定義される:

- (1) ルートに対応する以下の記号を導入する:  $a_{\emptyset}(\square_{as})$
- (2) ボックスには以下の種類がある:  $\square_{as}, \square_{b-}, \square_{b+}$
- (3) 代入に対する規則は以下である:
  - $\square_{as}$  には, 非負整数個の  $a_{-}(\square_{b-}), a_{+}(\square_{b+}), a_2(\square_{cs+}, \square_{cs-})$  が代入される
  - $\square_{b-}$  には, 正の整数個の  $b_{-+}(\square_{b-}, \square_{b+}), b_{--}\{\square_{b-}, \square_{b-}\}, \beta_{-}\{\square_{cs-}\}, \sigma_{-}$  が代入される
  - $\square_{b+}$  には, 正の整数個の  $b_{++}\{\square_{b+}, \square_{b+}\}, b_{+-}(\square_{b+}, \square_{b-}), \beta_{+}\{\square_{cs+}\}, \sigma_{+}$  が代入される

### 3. 流体の表現への変換方法

3.1. COT 表現. COT 表現とは流れのトポロジーを正確に記述できる表現である. 具体的には, 流れのトポロジーは, 円順序と半順序を持ったラベル付き木と表され, これを文字列化したものが COT 表現である. 以下が COT 表現の構成方法である (図 10 参照):

- 1. 流れ  $U$  を入力とする.
- 2. 流れのサドル関式  $S_U$  だけを取り出す
- 3. 以下で定める流れのラベル付き木  $T_U = (V_U, E_U)$  を出力する:
  - 3.1. 各  $T_U$  の葉は, センター ( $\sigma_{\pm}$ ), または, 境界サドルを持たない周期境界 ( $\beta_{\pm}$ ) である.

3.2. 以下の (1)-(3) の操作をできる限り繰り返すことによって,  $T_U$  が生成される:

- (1) センター ( $\sigma_{\pm}$ ), または, 境界サドルを持たない周期境界 ( $\beta_{\pm}$ ) を最内部として, これらの構造を抜く.
- (2) 最内部が内部のない構造  $a_{\pm}, b_{\pm\pm}, b_{\pm\mp}, c_{\pm}$  の場合, これらの構造を抜き,  $T_U$  の頂点とする.
- (3) 最内部に, 境界サドルを持たない周期境界 ( $\beta_{\pm}$ ), または,  $a_2$  の構造を持つ場合は, これらの構造を抜き,  $T_U$  の頂点とする.

#### 4. 穴あき平面上の流れの一般の遷移

穴あき平面上の流れの一般の遷移は以下によって完全に記述できる<sup>7</sup>.

**Theorem 4.1.** 有限個の穴あき平面上の非圧縮流の一般の遷移は以下である:

$$\begin{aligned}
& a_{\pm\pm}, a_{\pm\mp}, a_{22}, a_{\pm 2}, a_{2\pm} : \square_a^1 \cdot \square_a^2 \rightarrow \square_a^2 \cdot \square_a^1 \\
& a_{(+ -)}, a_{(- +)} : a_-(\square_{b-}^1) \cdot a_+(\square_{b+}^2) \rightarrow a_-(\square_{b-}^2) \cdot a_+(\square_{b+}^1) \\
& a_{2(\mp\pm)} : a_{\mp}(\square_{b\mp}^1) \cdot a_2(\square_{cs\pm}^2 \cdot c_{\pm}(\square_{b\pm}^3, \square_{cs\mp}^6) \cdot \square_{cs\pm}^5, \square_{cs\mp}^4) \rightarrow \\
& \quad a_2(\square_{cs\pm}^2, \square_{cs\mp}^6 \cdot c_{\mp}(\square_{b\mp}^1, \square_{cs\pm}^5) \cdot \square_{cs\mp}^4) \cdot a_{\pm}(\square_{b\pm}^3) \\
& a_{\pm(\pm)} : a_{\pm}(\square_{a\pm}^1) \cdot a_{\pm}(\square_{b\pm}^2) \rightarrow a_{\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b\pm}^1, \square_{b\pm}^2\}) \\
& a_{-(+)} : a_-(\square_{b-}^1) \cdot a_+(\square_{b+}^2) \rightarrow a_-(b_{-+}(\square_{b-}^1, \square_{b+}^2)) \\
& a_{+(-)} : a_-(\square_{b-}^1) \cdot a_+(\square_{b+}^2) \rightarrow a_+(b_{+-}(\square_{b+}^2, \square_{b-}^1)) \\
& a_{+(2)} : a_2(\square_{cs+}^1, \square_{cs-}^2) \cdot a_+(\square_{b+}^3) \rightarrow a_+(\beta_+\{\square_{cs+}^1 \cdot c_+(\square_{b+}^3, \square_{cs-}^2)\}) \\
& a_{-(2)} : a_-(\square_{b-}^1) \cdot a_2(\square_{cs+}^2, \square_{cs-}^3) \rightarrow a_-(\beta_-\{c_-(\square_{b-}^1, \square_{cs+}^2) \cdot \square_{cs-}^3\}) \\
& a_2(c_{+(+)}) : a_+(\square_{b+}^1) \cdot a_2(\square_{cs+}^5 \cdot c_+(\square_{b+}^2, \square_{cs-}^3) \cdot \square_{cs+}^4, \square_{cs-}^6) \rightarrow \\
& \quad a_2(\square_{cs+}^5 \cdot c_+(b_{++}\{\square_{b+}^1, \square_{b+}^2\}, \square_{cs-}^3) \cdot \square_{cs+}^4, \square_{cs-}^6) \\
& a_2(c_{-(-)}) : a_2(\square_{cs+}^1, \square_{cs-}^2 \cdot c_-(\square_{b-}^5, \square_{cs+}^4) \cdot \square_{cs-}^3) \cdot a_-(\square_{b-}^6) \rightarrow \\
& \quad a_2(\square_{cs+}^1, \square_{cs-}^2 \cdot c_-(b_{--}\{\square_{b-}^5, \square_{b-}^6\}, \square_{cs+}^4) \cdot \square_{cs-}^3) \\
& a_2(c_{+(-)}) : a_-(\square_{b-}^1) \cdot a_2(\square_{cs+}^5 \cdot c_+(\square_{b+}^2, \square_{cs-}^3) \cdot \square_{cs+}^4, \square_{cs-}^6) \rightarrow \\
& \quad a_2(\square_{cs+}^5 \cdot c_+(b_{+-}(\square_{b+}^2, \square_{b-}^1), \square_{cs-}^3) \cdot \square_{cs+}^4, \square_{cs-}^6) \\
& a_2(c_{-+}) : a_2(\square_{cs+}^1, \square_{cs-}^2 \cdot c_-(\square_{b-}^5, \square_{cs+}^4) \cdot \square_{cs-}^3) \cdot a_+(\square_{b+}^6) \rightarrow \\
& \quad a_2(\square_{cs+}^1, \square_{cs-}^2 \cdot c_-(b_{-+}(\square_{b-}^5, \square_{b+}^6), \square_{cs+}^4) \cdot \square_{cs-}^3) \\
& a_2(c_{+(2)}) : a_2(\square_{cs+}^1, \square_{cs-}^2) \cdot a_2(\square_{cs+}^6 \cdot c_+(\square_{b+}^3, \square_{cs-}^4) \cdot \square_{cs+}^5, \square_{cs-}^7) \rightarrow \\
& \quad a_2(\square_{cs+}^6 \cdot c_+(\beta_+\{\square_{cs+}^1 \cdot c_+(\square_{b+}^3, \square_{cs-}^2)\}, \square_{cs-}^4) \cdot \square_{cs-}^5, \square_{cs+}^7) \\
& a_2(c_{-(2)}) : a_2(\square_{cs+}^1, \square_{cs-}^2 \cdot c_-(\square_{b-}^5, \square_{cs+}^4) \cdot \square_{cs-}^3) \cdot a_2(\square_{cs+}^6, \square_{cs-}^7) \rightarrow \\
& \quad a_2(\square_{cs+}^1, \square_{cs-}^2 \cdot c_-(\beta_-\{c_-(\square_{b-}^5, \square_{cs+}^4) \cdot \square_{cs-}^7, \square_{cs+}^4\}, \square_{cs+}^6) \cdot \square_{cs-}^3) \\
& b_{\pm\pm\pm} : b_{\pm\pm}\{\square_{b\pm}^1, b_{\pm\pm}\{\square_{b\pm}^2, \square_{b\pm}^3\}\} \rightarrow b_{\pm\pm}\{b_{\pm\pm}\{\square_{b\pm}^1, \square_{b\pm}^2\}, \square_{b\pm}^3\} \\
& b_{\pm\pm(\mp)} : b_{\pm\pm}\{\square_{b\pm}^1, b_{\pm\mp}(\square_{b\pm}^2, \square_{b\mp}^3)\} \rightarrow b_{\pm\mp}(b_{\pm\pm}\{\square_{b\pm}^1, \square_{b\pm}^2\}, \square_{b\mp}^3) \\
& b_{\pm(\mp\mp)} : b_{\pm\mp}(b_{\pm\mp}(\square_{b\pm}^2, \square_{b\mp}^3), \square_{b\mp}^1) \rightarrow b_{\pm\mp}(b_{\pm\mp}(\square_{b\pm}^2, \square_{b\mp}^1), \square_{b\mp}^3) \\
& b_{\pm(\mp(\mp))} : b_{\pm\mp}(b_{\pm\mp}(\square_{b\pm}^3, \square_{b\mp}^2), \square_{b\mp}^1) \rightarrow b_{\pm\mp}(\square_{b\pm}^3, b_{\mp\mp}\{\square_{b\mp}^1, \square_{b\mp}^2\}) \\
& b_{\pm(\mp(\pm))} : b_{\pm\mp}(\square_{b\pm}^3, b_{\mp\pm}(\square_{b\mp}^2, \square_{b\pm}^1)) \rightarrow b_{\pm\mp}(b_{\pm\pm}\{\square_{b\pm}^1, \square_{b\pm}^3\}, \square_{b\mp}^2) \\
& b_{\pm\pm(2)} : b_{\pm\pm}\{\beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}^1 \cdot c_{\pm}(\square_{b\pm}^3, \square_{cs\mp}^2)\}, \square_{b\pm}^4\} \rightarrow \\
& \quad \beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}^1 \cdot c_{\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b\pm}^3, \square_{b\pm}^4\}, \square_{cs\mp}^2)\}
\end{aligned}$$

<sup>7</sup>これらの全ての遷移図は [10] に載っているので, 詳しい情報は, そちらを参照されたい

$$\begin{aligned}
b_{\pm\{\mp,2\}} &: b_{\pm\mp}(\beta_{\pm}\{c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^2, \square_{cs\mp}^3) \cdot \square_{cs\pm}^4\}, \square_{b_{-+}}^1) \rightarrow \\
&\quad \beta_{\pm}\{c_{\pm}(b_{\pm\mp}(\square_{b_{\pm}}^2, \square_{b_{-+}}^1), \square_{cs\mp}^3) \cdot \square_{cs\pm}^4\} \\
b_{\pm(\mp(2))} &: b_{\pm\mp}(\square_{b_{\pm}}^4, \beta_{\mp}\{c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^1, \square_{cs\pm}^2) \cdot \square_{cs\mp}^3\}) \rightarrow \\
&\quad b_{\pm\mp}(\beta_{\pm}\{c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^4, \square_{cs\mp}^3) \cdot \square_{cs\pm}^2\}, \square_{b_{\mp}}^1) \\
b_{\pm\{22\}} &: \beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}^1 \cdot c_{\pm}(\beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}^3 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^5, \square_{cs\mp}^4)\}, \square_{cs\mp}^2)\} \rightarrow \\
&\quad \beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}^3 \cdot c_{\pm}(\beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}^1 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^5, \square_{cs\mp}^2)\}, \square_{cs\mp}^4)\} \\
c_{\pm}(c_{\mp(\mp)}) &: c_{\pm}(b_{\pm\mp}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{b_{\mp}}^2), \square_{cs\mp}^6 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^4, \square_{cs\pm}^5) \cdot \square_{cs\mp}^3) \rightarrow \\
&\quad c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs\mp}^6 \cdot c_{\mp}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}^2, \square_{b_{\mp}}^4\}, \square_{cs\pm}^5) \cdot \square_{cs\mp}^3) \\
c_{\pm}(c_{\mp(\pm)}) &: c_{\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}^1, \square_{b_{\pm}}^2\}, \square_{cs\mp}^6 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^4, \square_{cs\pm}^5) \cdot \square_{cs\mp}^3) \rightarrow \\
&\quad c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs\mp}^6 \cdot c_{\mp}(b_{\mp\pm}(\square_{b_{\mp}}^4, \square_{b_{\pm}}^2), \square_{cs\pm}^5) \cdot \square_{cs\mp}^3) \\
c_{\pm}(c_{\mp(2)}) &: c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs\mp}^7 \cdot c_{\mp}(\beta_{\mp}\{\square_{cs\mp}^2 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^5, \square_{cs\pm}^3)\}, \square_{cs\pm}^6) \cdot \square_{cs\mp}^4) \rightarrow \\
&\quad c_{\pm}(\beta_{\pm}\{c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs\mp}^2) \cdot \square_{cs\pm}^3\}, \square_{cs\mp}^7 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^5, \square_{cs\pm}^6) \cdot \square_{cs\mp}^4) \\
b_{(\pm\mp\pm)} &: b_{\pm\mp}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}^1, \square_{b_{\pm}}^3\}, \square_{b_{\mp}}^2) \rightarrow b_{\pm\mp}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}^1, \square_{b_{\pm}}^3\}, \square_{b_{\mp}}^2) \\
a_2(c_{+-+}) &: a_{-}(\square_{b_{-+}}^1) \cdot a_2(\square_{cs+}^8 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^5, \square_{cs-}^6) \cdot \square_{cs+}^2 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^3, \square_{cs-}^4) \cdot \square_{cs+}^7, \square_{cs-}^9) \rightarrow \\
&\quad a_2(\square_{cs+}^8 \cdot c_{+}(b_{++}\{\square_{b_{+}}^3, \square_{b_{+}}^5\}, \square_{cs-}^6 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^1, \square_{cs+}^2) \cdot \square_{cs-}^4) \cdot \square_{cs+}^7, \square_{cs-}^9) \\
a_2(c_{-+-}) &: a_2(\square_{cs+}^9, \square_{cs-}^7 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^3, \square_{cs+}^4) \cdot \square_{cs-}^2 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^5, \square_{cs+}^6) \cdot \square_{cs-}^8) \cdot a_{+}(\square_{b_{+}}^1) \rightarrow \\
&\quad a_2(\square_{cs+}^9, \square_{cs-}^7 \cdot c_{-}(b_{--}\{\square_{b_{-}}^3, \square_{b_{-}}^5\}, \square_{cs+}^4 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs-}^2) \cdot \square_{cs+}^6) \cdot \square_{cs-}^8) \\
\beta_{\pm}(c_{(\pm\mp\pm)}) &: b_{\pm\mp}(\beta_{\pm}\{c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs\mp}^2) \cdot \square_{cs\mp}^3 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^4, \square_{cs\mp}^5) \cdot \square_{cs\pm}^6, \square_{b_{\mp}}^7\} \rightarrow \\
&\quad \beta_{\pm}\{c_{\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}^1, \square_{b_{\pm}}^4\}, \square_{cs\mp}^2 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^7, \square_{cs\pm}^3) \cdot \square_{cs\mp}^5) \cdot \square_{cs\pm}^6\} \\
c_{\mp}(c_{(\mp\pm\mp)}) &: c_{\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}^1, \square_{b_{\pm}}^2\}, \square_{cs\mp}^9 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^7, \square_{cs\pm}^8) \cdot \square_{cs\mp}^6 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^4, \square_{cs\pm}^5) \cdot \square_{cs\mp}^3) \rightarrow \\
&\quad c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs\mp}^9 \cdot c_{\mp}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}^4, \square_{b_{\mp}}^7\}, \square_{cs\mp}^8 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^2, \square_{cs\mp}^6) \cdot \square_{cs\pm}^5) \cdot \square_{cs\mp}^3) \\
a_{2n2} &: a_2(\square_{cs+}^0, \square_{cs-}^{2n+1} \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2n'}, \square_{cs+}^{2n}) \cdot \dots \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{4'}, \square_{cs+}^4) \cdot \square_{cs-}^3) \\
&\quad \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2'}, \square_{cs+}^2) \cdot \square_{cs-}^1) \cdot a_2(\square_{cs+}^{0''} \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs-}^{1''}) \cdot \square_{cs+}^{2''} \\
&\quad \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{3'}, \square_{cs-}^{3''}) \cdot \dots \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{2n-1'}, \square_{cs-}^{2n-1''}) \cdot \square_{cs+}^{2n''}, \square_{cs-}^{2n+1''}) \rightarrow \\
&\quad a_2(\square_{cs+}^{0'} \cdot \square_{cs-}^{1''} \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2'}, \square_{cs+}^{2''}) \cdot \square_{cs-}^{3''} \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{4'}, \square_{cs+}^{4''}) \cdot \dots \\
&\quad \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2n'}, \square_{cs+}^{2n''}) \cdot \square_{cs-}^{2n+1''}) \cdot a_2(\square_{cs+}^{2n} \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{2n-1'}, \square_{cs-}^{2n-1}) \\
&\quad \cdot \dots \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{3'}, \square_{cs-}^3) \cdot \square_{cs+}^2 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{1'}, \square_{cs-}^1) \cdot \square_{cs+}^0, \square_{cs-}^{2n+1}) \\
\beta_{\pm}(c_{\pm(2n)}) &: \beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}^0 \cdot c_{\pm}(\beta_{\pm}\{\square_{cs\pm}^{0'} \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs-}^{1''}) \cdot \square_{cs\pm}^2 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^3, \square_{cs-}^{3''}) \cdot \\
&\quad \dots \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^{2n-1'}, \square_{cs-}^{2n-1''})\}, \square_{cs-}^{2n-1} \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^{2n-2'}, \square_{cs\pm}^2) \cdot \dots \cdot \square_{cs-}^3) \\
&\quad \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^{2'}, \square_{cs\pm}^2) \cdot \square_{cs-}^1\} \rightarrow \\
&\quad \beta_{\mp}\{\square_{cs-}^{2n-1'} \cdot c_{\mp}(\beta_{\mp}\{\square_{cs-}^0 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^{2n-2'}, \square_{cs\pm}^{2n-2}) \cdot \dots \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^{3'}, \square_{cs\pm}^3) \\
&\quad \cdot \square_{cs-}^2 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^1, \square_{cs\pm}^1)\}, \square_{cs\pm}^{1''} \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^{2'}, \square_{cs-}^{2''}) \cdot \square_{cs\pm}^{3''} \cdot \dots \\
&\quad \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^{2n-2'}, \square_{cs-}^{2n-2''}) \cdot \square_{cs\pm}^{2n-1''}\} \\
c_{\pm}(c_{\mp(2n)}) &: c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^{0'}, \square_{cs\mp}^0 \cdot c_{\mp}(\beta_{\mp}\{c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^{2n-1'}, \square_{cs\pm}^{2n-1''}) \cdot \square_{cs\mp}^{2n-2''} \cdot \dots \cdot \square_{cs\mp}^{2''} \cdot \\
&\quad c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^{1'}, \square_{cs\pm}^{1''}) \cdot \square_{cs\mp}^{0''}\}, \square_{cs\pm}^1 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^{2'}, \square_{cs\mp}^2) \cdot \dots \\
&\quad \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^{2n-2'}, \square_{cs\mp}^{2n-2}) \cdot \square_{cs\pm}^{2n-1}) \cdot \square_{cs\mp}^{2n}) \rightarrow
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& c_{\pm}(\beta_{\pm}\{c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^0, \square_{cs_{\mp}}^0) \cdot \square_{cs_{\pm}}^{2n-1''} \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^{2n-2'}, \square_{cs_{\mp}}^{2n-2''}) \cdot \dots \\
& \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^{2'}, \square_{cs_{\mp}}^{2''}) \cdot \square_{cs_{\pm}}^{1''}\}, \square_{cs_{\mp}}^0 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^1, \square_{cs_{\pm}}^1) \cdot \square_{cs_{\mp}}^2 \cdot \dots \\
& \cdot \square_{cs_{\mp}}^{2n-2} \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^{2n-1'}, \square_{cs_{\pm}}^{2n-1}) \cdot \square_{cs_{\mp}}^2) \\
a_2(c_{-(2n)}) : & a_2(\square_{cs_{+}}^{2n+1}, \square_{cs_{-}}^{2n} \cdot c_{-}(\beta_{-}\{\square_{b_{-}}^0 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^1, \square_{cs_{+}}^1) \cdot \square_{cs_{-}}^{2''} \\
& \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{3'}, \square_{cs_{+}}^{3''}) \cdot \dots \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2n-1'}, \square_{cs_{+}}^{2n-1''})\}, \square_{cs_{+}}^{2n-1} \\
& \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{2n-2'}, \square_{cs_{-}}^{2n-2}) \cdot \dots \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{2'}, \square_{cs_{-}}^2) \cdot \square_{cs_{+}}^1 \cdot \square_{cs_{-}}^0) \rightarrow \\
& a_2(\square_{cs_{+}}^{2n+1}, \square_{cs_{-}}^{2n} \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2n-1'}, \square_{cs_{+}}^{2n-1}) \cdot \dots \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{3'}, \square_{cs_{+}}^3) \\
& \cdot \square_{cs_{-}}^2 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^1, \square_{cs_{+}}^1) \cdot \square_{cs_{-}}^0) \cdot a_2(\square_{cs_{+}}^{1''} \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^2, \square_{cs_{-}}^2) \\
& \cdot \square_{cs_{+}}^{3''} \cdot \dots \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{2n-2'}, \square_{cs_{-}}^{2n-2''}) \cdot \square_{cs_{+}}^{2n-1''}, \square_{cs_{-}}^0) \\
a_2(c_{+(2n)}) : & a_2(\square_{cs_{+}}^0 \cdot c_{+}(\beta_{+}\{\square_{cs_{+}}^{2n+1} \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{2n-1'}, \square_{cs_{-}}^{2n-1}) \cdot \dots \\
& \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{3'}, \square_{cs_{-}}^3) \cdot \square_{cs_{+}}^2 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^1)\}, \square_{cs_{-}}^{1''} \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^2, \square_{cs_{+}}^{2''}) \cdot \\
& \dots \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2n-2'}, \square_{cs_{+}}^{2n-2''}) \cdot \square_{cs_{-}}^{2n-1''}) \cdot \square_{cs_{+}}^{2n}, \square_{cs_{-}}^0) \rightarrow \\
& a_2(\square_{cs_{+}}^{2n+1}, \square_{cs_{-}}^{2n-1} \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2n-2'}, \square_{cs_{+}}^{2n-2}) \cdot \dots \cdot \square_{cs_{-}}^3 \\
& \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^{2'}, \square_{cs_{+}}^2) \cdot \square_{cs_{-}}^1) \cdot a_2(\square_{cs_{+}}^0 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^{1''}) \cdot \square_{cs_{+}}^{2''} \\
& \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{3'}, \square_{cs_{-}}^{3''}) \cdot \dots \cdot \square_{cs_{+}}^{2n-2''} \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^{2n-1'}, \square_{cs_{-}}^{2n-1''}) \cdot \square_{cs_{+}}^{2n}, \square_{cs_{-}}^0) \\
a_0(\Lambda_{\pm}) : & a_2(\square_{cs_{\pm}}^1, \lambda) \rightarrow a_{\pm}(\beta_{\pm}\{\square_{cs_{\pm}}^1\}) \\
a_2(\Lambda_{+}) : & a_2(\square_{cs_{+}}^3 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \lambda) \cdot \square_{cs_{+}}^2, \square_{cs_{-}}^4) \rightarrow a_{+}(\square_{b_{+}}^1) \cdot a_2(\square_{cs_{+}}^3 \cdot \square_{cs_{+}}^2, \square_{cs_{-}}^4) \\
a_2(\Lambda_{-}) : & a_2(\square_{cs_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^2 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^4, \lambda) \cdot \square_{cs_{-}}^3) \rightarrow a_2(\square_{cs_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^2 \cdot \square_{cs_{-}}^3) \cdot a_{-}(\square_{b_{-}}^4) \\
\beta_{\pm}(\Lambda_{\pm}) : & \beta_{\pm}\{\square_{cs_{\pm}}^1 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^2, \lambda)\} \rightarrow b_{\pm\pm}\{\beta_{\pm}\{\square_{cs_{\pm}}^1\}, \square_{b_{\pm}}^2\} \\
\beta_{\pm}(\Lambda_{\mp}) : & \beta_{\pm}\{c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^2, \square_{cs_{\mp}}^1)\} \rightarrow b_{\pm\mp}(\square_{b_{\pm}}^2, \square_{cs_{\mp}}^1) \\
c_{\pm}(\Lambda_{\pm}) : & c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs_{\mp}}^4 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^2, \lambda) \cdot \square_{cs_{\mp}}^3) \rightarrow c_{\pm}(b_{\pm\mp}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{b_{\mp}}^2), \square_{cs_{\mp}}^4 \cdot \square_{cs_{\mp}}^3) \\
c_{\pm\pm} : & c_{\pm\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}^2, \square_{b_{\pm}}^1\}, \square_{cs_{\mp}}^4 \cdot \square_{cs_{\mp}}^3) \rightarrow c_{\pm\pm}(\square_{b_{\pm}}^2, \square_{cs_{\mp}}^4) \cdot c_{\pm\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs_{\mp}}^3) \\
a_2(c_{+}(c_{-}^R)) : & a_2(\square_{cs_{+}}^6 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, c_{-}(\square_{b_{-}}^2, \square_{cs_{+}}^3) \cdot \square_{cs_{-}}^4) \cdot \square_{cs_{+}}^5, \square_{cs_{-}}^7) \rightarrow \\
& a_{-}(\square_{b_{-}}^2) \cdot a_2(\square_{cs_{+}}^6 \cdot \square_{cs_{+}}^3 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^4) \cdot \square_{cs_{+}}^5, \square_{cs_{-}}^7) \\
a_2(c_{+}(c_{-}^L)) : & a_2(\square_{cs_{+}}^5 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^4 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^2, \square_{cs_{+}}^3)) \cdot \square_{cs_{+}}^6, \square_{cs_{-}}^7) \rightarrow \\
& a_{-}(\square_{b_{-}}^2) \cdot a_2(\square_{cs_{+}}^5 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^4) \cdot \square_{cs_{+}}^3 \cdot \square_{cs_{+}}^6, \square_{cs_{-}}^7) \\
a_2(c_{-}(c_{+}^R)) : & a_2(\square_{cs_{+}}^7, \square_{cs_{-}}^6 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^2, \square_{cs_{+}}^5) \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^3, \square_{cs_{-}}^4)) \cdot \square_{cs_{-}}^1) \rightarrow \\
& a_2(\square_{cs_{+}}^7, \square_{cs_{-}}^6 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^2, \square_{cs_{+}}^5) \cdot \square_{cs_{-}}^4 \cdot \square_{cs_{-}}^1) \cdot a_{+}(\square_{b_{+}}^3) \\
a_2(c_{-}(c_{+}^L)) : & a_2(\square_{cs_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^2 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^7, c_{+}(\square_{b_{+}}^6, \square_{cs_{-}}^5) \cdot \square_{cs_{+}}^4) \cdot \square_{cs_{-}}^3) \rightarrow \\
& a_2(\square_{cs_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^2 \cdot \square_{cs_{-}}^5 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^7, \square_{cs_{+}}^4) \cdot \square_{cs_{-}}^3) \cdot a_{+}(\square_{b_{+}}^6) \\
\beta_{\pm}(c_{\pm}(c_{\mp}^L)) : & \beta_{\pm}\{\square_{cs_{\pm}}^1 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^5, \square_{cs_{\mp}}^2 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^4, \square_{cs_{\pm}}^3))\} \rightarrow \\
& b_{\pm\mp}(\beta_{\pm}\{\square_{cs_{\pm}}^1 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^5, \square_{cs_{\mp}}^2) \cdot \square_{cs_{\pm}}^3\}, \square_{b_{\mp}}^4) \\
\beta_{\pm}(c_{\pm}(c_{\mp}^R)) : & \beta_{\pm}\{\square_{cs_{\pm}}^1 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^5, c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^4, \square_{cs_{\pm}}^3) \cdot \square_{cs_{\mp}}^2)\} \rightarrow \\
& b_{\pm\mp}(\beta_{\pm}\{\square_{cs_{\pm}}^1 \cdot \square_{cs_{\pm}}^3 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^5, \square_{cs_{\mp}}^2)\}, \square_{b_{\mp}}^4) \\
c_{\pm}(c_{\mp}(c_{\pm}^R)) : & c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs_{\mp}}^7 \cdot c_{\mp}(\square_{cs_{\mp}}^3, c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^4, \square_{cs_{\mp}}^5) \cdot \square_{cs_{\pm}}^6) \cdot \square_{cs_{\pm}}^2) \rightarrow \\
& c_{\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}^1, \square_{b_{\pm}}^4\}, \square_{cs_{\mp}}^7 \cdot \square_{cs_{\mp}}^5 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^3, \square_{cs_{\pm}}^6) \cdot \square_{cs_{\mp}}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{\pm}(c_{\mp}(c_{\pm}^L)) : c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^1, \square_{cs_{\mp}}^7 \cdot c_{\mp}(\square_{cs_{\mp}}^3, \square_{cs_{\pm}}^6 \cdot c_{\pm}(\square_{b_{\pm}}^4, \square_{cs_{\mp}}^5)) \cdot \square_{cs_{\mp}}^2) \rightarrow \\
 c_{\pm}(b_{\pm\pm} \{ \square_{b_{\pm}}^4, \square_{b_{\pm}}^1 \}, \square_{cs_{\mp}}^7 \cdot c_{\mp}(\square_{b_{\mp}}^3, \square_{cs_{\pm}}^6) \cdot \square_{cs_{\mp}}^5 \cdot \square_{cs_{\mp}}^2) \\
 a_2(c_{+}^L) : a_2(\square_{cs_{+}}^3 \cdot c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^2), \square_{cs_{-}}^4) \rightarrow a_2(\square_{cs_{+}}^3, \square_{cs_{-}}^2 \cdot \square_{cs_{-}}^4) \cdot a_{+}(\square_{b_{+}}^1) \\
 a_2(c_{+}^R) : a_2(c_{+}(\square_{b_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^2) \cdot \square_{cs_{+}}^3, \square_{cs_{-}}^4) \rightarrow a_2(\square_{cs_{+}}^3, \square_{cs_{-}}^4 \cdot \square_{cs_{-}}^2) \cdot a_{+}(\square_{b_{+}}^1) \\
 a_2(c_{-}^R) : a_2(\square_{cs_{+}}^1, c_{-}(\square_{b_{-}}^4, \square_{cs_{+}}^3) \cdot \square_{cs_{-}}^2) \rightarrow a_{-}(\square_{b_{-}}^4) \cdot a_2(\square_{cs_{+}}^1 \cdot \square_{cs_{+}}^3, \square_{cs_{-}}^2) \\
 a_2(c_{-}^L) : a_2(\square_{cs_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^2 \cdot c_{-}(\square_{b_{-}}^4, \square_{cs_{+}}^3)) \rightarrow a_{-}(\square_{b_{-}}^4) \cdot a_2(\square_{cs_{+}}^3 \cdot \square_{cs_{+}}^1, \square_{cs_{-}}^2)
 \end{aligned}$$

付録 A. 流れに関する用語

軌道とは、流れによって動く点の集まりである。流れの特異点(よどみ点)とは速さがゼロの点のことである。言い換えると、特異点は流れの中で止まっている点のことである。流線図とは、特異点とそれらをつなぐ軌道と境界(境界)の和集合である。流れの摂動とは、流れを十分小さく変化させることである。

ホモクリニック軌道とは、サドルから出発して、同じサドルに戻ってくる軌道である。ヘテロクリニック軌道とは、異なるサドルを繋ぐ軌道である。

センターとマルチサドルとは図 11 のように定義される。また、以下の事実が知られている。

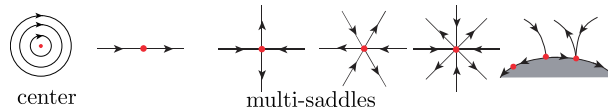


図 11. センターとマルチサドル

**Theorem A.1.** 有限個しか特異点を持たないコンパクト曲面上の非圧縮な流れの特異点はセンターかマルチサドルである<sup>8</sup>。

REFERENCES

- [1] M.Cobo, C. Gutierrez, J. Llibre, *Flows without wandering points on compact connected surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 9, 4569–4580.
- [2] Ma, Tian; Wang, Shouhong, *Geometric theory of incompressible vector fields with applications to fluid dynamics* Mathematical Surveys and Monographs, 119. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. x+234 pp. ISBN: 0-8218-3693-5.
- [3] T. Sakajo, Y. Sawamura and T. Yokoyama, *Unique encoding for streamline topologies of incompressible and inviscid flows in multiply connected domains*. Fluid Dynamics Research 46 (2014) 031411.
- [4] T. Sakajo, T. Yokoyama, *Transitions between streamline topologies of structurally stable Hamiltonian flows in multiply connected domains*, Physica D, 307 (2015) pp. 22–41.
- [5] T. Sakajo, T. Yokoyama, *Combinatorial discrete representations of topological orbit structures for flows of finite type*, preprint, arXiv:2010.13434.
- [6] 宇田智紀, 横山知郎, 坂上貴之, *パーシステントホモロジーとレーブグラフを用いた 2 次元ハミルトンベクトル場の流線位相構造の自動抽出アルゴリズム*, 日本応用数理論文誌 29.2 (2019): 187–224.
- [7] T. Yokoyama, T. Sakajo, *Word representation of streamline topology for structurally stable vortex flows in multiply connected domains*. Proc. Roy. Soc. A 469 (2013) (doi: 10.1098/rspa.2012.0558).
- [8] 横山 哲郎, 横山 知郎 *ハミルトン曲面流に対応する語の列挙アルゴリズム*, 電子情報通信学会論文誌 D Vol.J100-D No.10 pp.892–894.
- [9] T. Yokoyama, T. Yokoyama, *Complete Transition Diagrams of Generic Hamiltonian Flows with a Few Heteroclinic Orbits*, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications (2020).
- [10] T. Yokoyama, T. Yokoyama, *COT representations of 2D Hamiltonian flows and their computable applications*, preprint, [https://researchmap.jp/tyokoyama/published\\_papers/31310451/attachment\\_file.pdf](https://researchmap.jp/tyokoyama/published_papers/31310451/attachment_file.pdf).
- [11] T. Yokoyama, *Separation axioms and topological invariant of surface flows with arbitrarily many singular points*, preprint.
- [12] T. Yokoyama, *Hamiltonian flows of weakly finite type on unbounded surfaces*, preprint.

Email address: tomoo@kyokyo-u.ac.jp

<sup>8</sup>より一般に、Non-wandering flow について、この結果は知られている [1]