

高周波振動現象と力学系

行木孝夫*

Department of Mathematics, Hokkaido University

津田一郎

Chubu University Academy of Emerging Sciences

横山大吾

Graduate School of Science, Hokkaido University

概要

てんかん発作における高周波振動現象をモデル化した力学系に関し、安定な軌道とカオス的な軌道が共存するパラメータ領域が存在すること、パラメータの摂動によつての軌道の安定性が大きく変化することをリアプノフ指数の数値計算によつて示した。

1 てんかん発作と高周波振動現象のモデル

てんかん発作においては、てんかん焦点に発するおける高周波域の異常な振動現象が全体に波及する高周波振動現象の存在が知られている。この発作時高周波振動現象を非線形時系列解析によつて特徴付けた結果は [1] に報告した。モデルとしての離散力学系は (1) に示す通りである。

$$T(x) = x + c + r \sin^2(\pi\sqrt{x}) \pmod{1} \quad (1)$$

モデル (1) は次のように発見した [1]。頭蓋内留置電極により広域周波数帯域記録されたてんかん発作時の脳波波形に、パワースペクトルの特異的なピークを与える周波数帯が存在する (図 1)。原波形から自己相関を除去するために時系列 1step での差分をとる (図 2 左)。

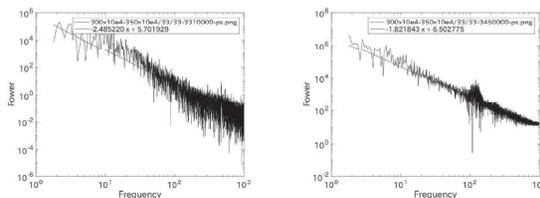


図 1: 非発作時 (左) および非発作時 (右) のパワースペクトル。ともにサンプリング周波数 2,000Hz で 5 秒間の脳波原波形に関するパワースペクトル。

*nami@math.sci.hokudai.ac.jp

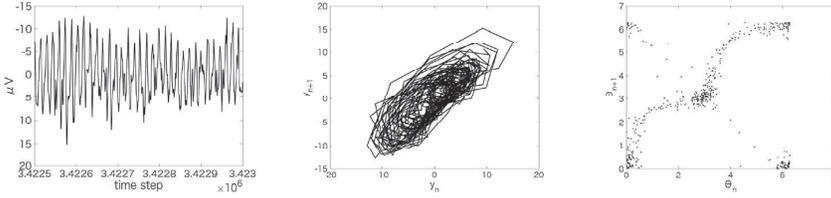


図 2: 左: 発作時高周波振動の差分波形, 中: 埋め込み結果, 右: 位相成分の埋め込み結果

この差分波形に関する時間遅れ 1, 埋め込み次元 1 の遅延座標表示を作成することで, 200step 程度のトラス的な挙動を発見した (図 2 中)。この挙動の位相成分の挙動 (図 2 右) から周期性を考慮して初等関数によって近似したモデルが力学系 (1) である。離散力学系 (1) のグラフは図 3 左に示した。図 2 右に現れる埋め込み結果は位相成分のダイナミクスであり, 本来 $[0, 2\pi)$ で値をとる力学系である。周期性を考慮して $[0, \pi)$ に縮約し, さらに空間を単位区間へ変換することで (1) を得ている。

力学系 (1) はパラメータの取り方によって拡大性をもつ領域, 縮小的な領域, 間欠性をもつ領域が共存しうる力学系であり, 様々な現象を実現しうる豊かな構造を持つと考えられる。図 2 に現れる差分波形の振動現象は, 力学系 (1) のパラメータを決定することで, 位相成分を準周期的なダイナミクスによって記述できることが示される ([1])。この結果は, 異なる 5 患者の脳波データにおいて得られており, 特殊なものではないと考えられる。

一方, 脳活動においては (1) に現れるパラメータが刻々と変化することが予想される。このようにパラメータが変化する状況を解析するため, 本稿では位相成分をそのまま保持した力学系 (2) の解析を問題とした。

$$T(x) = \begin{cases} x + c + r_1 \sin^2(\pi\sqrt{2x}) \pmod{1} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x + c + r_2 \sin^2(\pi\sqrt{2x-1}) \pmod{1} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

力学系 (2) のグラフは図 3 (右) の通りである。この図には前述の通り拡大性を持つ領域, 縮小性を持つ領域, 間欠性を持つ領域が全て共存するパラメータを示した。非線形項が増えており, 対応するパラメータが r_1, r_2 の個になる。非線形項が増えることで変化する軌道の性質が問題となる。

本稿では, 力学系 (2) の性質, 特にパラメータ r_1, r_2 に関する軌道の安定性を主に数値計算によって解析した結果の一部を示す。

2 軌道の安定性

離散力学系の軌道の安定性はリアプノフ指数

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |T'(T^k(x_0))| \quad (3)$$

の符号によって判定できる。 $|T'(x)| > 1$ であれば x の近傍で軌道は乖離し, $|T'(x)| < 1$ であれば漸近する。従って, リアプノフ指数が正であれば平均的に $|T'(T^k(x_0))| > 1$ となり, 初期値 x_0 近傍の

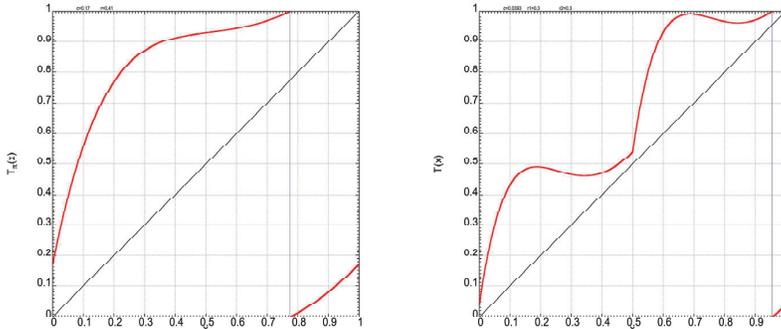


図 3: 左：(1) の定める力学系のグラフ。右：(2) の定める力学系のグラフ

異なる初期値から出発する軌道は乖離する。リアプノフ指数が負であれば平均的に $|T'(T^k(x_0))| < 1$ となって x_0 の近傍を初期値とする軌道は x_0 を初期値とする軌道に漸近する。リアプノフ指数が正となる初期値が区間として存在するとき（ルベーグ測度が正となる時）カオスの軌道とよぶ。

このリアプノフ指数を用いて初期値に対する軌道の安定性を数値的に解析する。力学系を初等関数で与えているから数値解析は難しくない。まずパラメータ r_1, r_2 が等しい場合の安定性を特徴付ける。 $r_1 = r_2$ であるから力学系 (1) と同値であり、これと対比して r_1, r_2 が異なる場合に軌道の安定性が変化する様相を解析する。

図 4 にリアプノフ指数をヒートマップ表示した。横軸にパラメータ $r = r_1 = r_2$ をとり、 $c = 0.0393$ を [1] に従って固定した。 c の値は、実際の脳波波形から得られる力学系として最小自乗法でパラメータを決定した結果である。 c はサークルマップの回転数を決める役割をもつ定数であり、高周波振動の周波数に対応する。

多くの r において軌道の安定性は初期値に依存せず、領域 $0.276 < r < 0.278$ では一部を除きリアプノフ指数が正となっている。 $0.278 < r < 0.28$ で安定軌道と不安定軌道が共存する r の領域が存在する。初期値 0.3 では $0.278 < r$ でもリアプノフ指数は正となり、初期値 0.7 では $0.278 < r$ 付近でリアプノフ指数が負に変化する。リアプノフ指数が正の軌道は区間の和集合として存在し、カオス的な軌道となっている。拡大性を持つ領域の滞在頻度の高い軌道である。リアプノフ指数が負の軌道は安定周期点として存在する。

続いて、 c を同じ値として安定軌道と不安定軌道の共存するパラメータ $r_1 = 0.2785$ を固定し、 r_2 を変化させ軌道の安定性の変化をリアプノフ指数によって観察する。

図 5 に $r_1 \neq r_2$ の場合におけるリアプノフ指数をヒートマップ表示した。 r_1, r_2 が等しい場合と異なり、 r_2 の領域を $0.276 < r_2 < 0.278$ と設定した場合にリアプノフ指数が初期値によらずほぼ負となっている。また、 $0.278 < r_2$ では、初期値を 0.2 近傍にとればリアプノフ指数は負のまま安定な軌道が存在する一方、初期値 0.3 近傍のように不安定な軌道が出現する初期値の領域も広く存在し、カオス的な軌道となっている。両者の共存する構造は $r_1 = r_2$ の場合と同様であるが、パラメータ r_2 に関する軌道の構造が大きく変化していることが予想される。

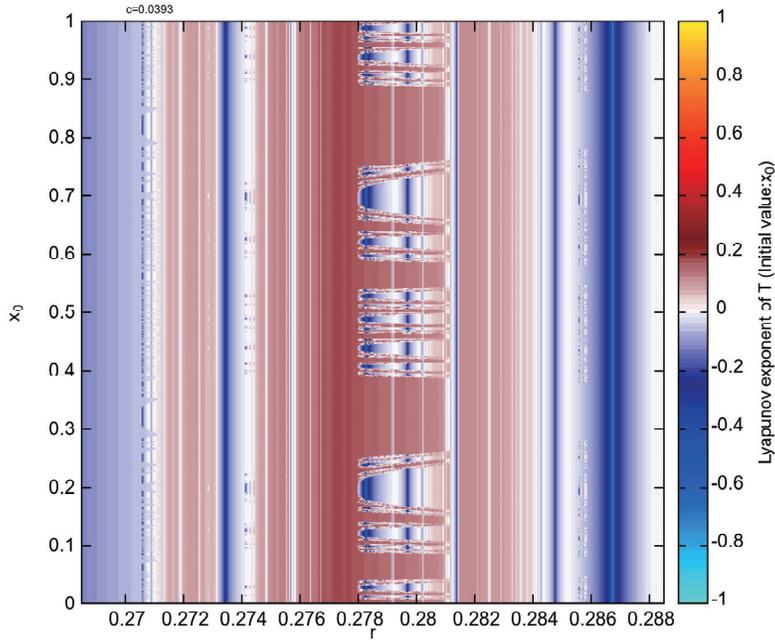


図 4: $r = r_1 = r_2$ の場合におけるリアプノフ指数の初期値およびパラメータ依存性

3 おわりに

てんかん発作における高周波振動現象から得られた力学系 2 の分岐現象を数値的に解析し、パラメータの微細な変動で軌道の構造が大きく変わる分岐現象を発見した。これらの軌道の構造は横山が修士論文 [2] に詳述し、本論文を準備中である。

参考文献

- [1] Takao Namiki, Ichiro Tsuda, Akio Ikeda, et. al., “Mathematical Structures for Epilepsy: High-Frequency Oscillation and Interictal Epileptic Slow (Red Slow)”, Neuroscience Research, 2019 (In Press).
- [2] 横山大吾 「てんかんの脳波データより得られた力学系の解析」北海道大学大学院理学院数学専攻修士論文 (2020.3)

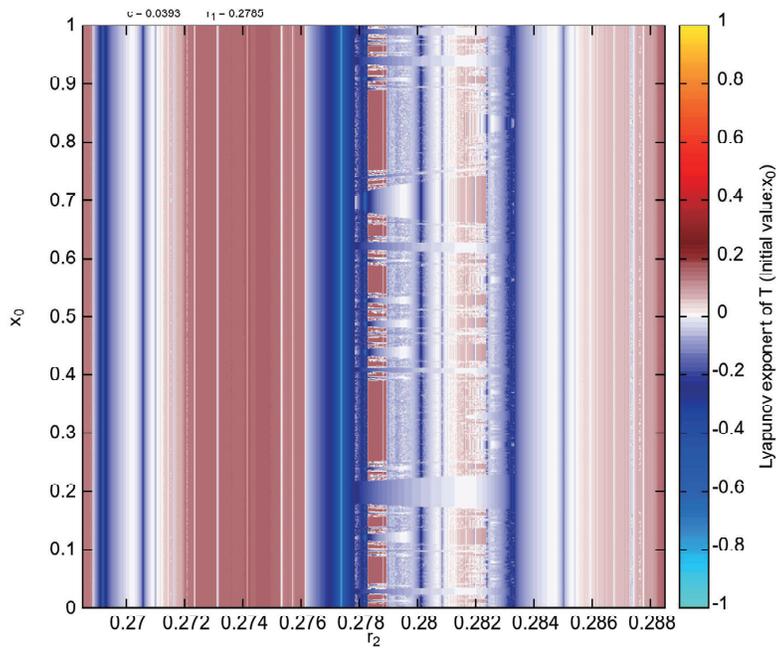


図 5: $r_1 \neq r_2$ の場合におけるリアプノフ指数の初期値およびパラメータ依存性