

# 零次元準素イデアルのネター作用素の計算と応用 — 新たなる数式処理をめざして —

## Computing Noetherian differential operators of zero-dimensional primary ideals and their applications

東京理科大学理学部第一部応用数学科 鍋島克輔<sup>\*1</sup>

NABESHIMA, KATSUSUKE

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

新潟大学大学院自然科学研究科 田島慎一<sup>\*2</sup>

TAJIMA, SHINICHI

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY

### Abstract

An effective algorithm for computing Noetherian differential operators of zero-dimensional primary ideals is introduced. A primary ideal in a polynomial ring can be described by the variety it defines and a finite set of Noetherian operators, which are differential operators with polynomial coefficients. In zero-dimensional cases, effective computation techniques can be utilized to compute the Noetherian differential operators. Examples of the computation and the applications are also given.

## 1 序

本研究の最終目的は、ネター作用素と呼ばれるある種の偏微分作用素を用いて、多項式環のイデアルを表現し、計算機代数学（数式処理）の理論を書き換えることである。記号計算で用いられるイデアルの表現は、生成元（グレブナー基底の形）を使用していることが多い。しかしながら、生成元（またはグレブナー基底）だけですべてを表現しようとすると、膨大な計算をおこなった結果、得られる出力のサイズも大きいという弊害がある。この問題を解消すべく、イデアルの新たな表現法として、『素イデアル』と『ネター作用素』という2つの情報でイデアルを記述することを提唱し、計算機代数学をネター作用素の視点から書き換える。多大なるグレブナー基底依存とも言える状況から開放されることより、種々の代数算法の計算効率も改善されると予想される。

L. Ehrenpreis は、1960年代の一連の論文 [6, 7] において定数係数線形偏微分方程式系の一般論を構築した。ネター作用素を用いて multiplicity variety の概念を導入し、偏微分方程式系の特性多様体が重複度を持つような場合も一般的に扱うことのできる理論展開を行っている。残念ながら、このすばらしい L. Ehrenpreis の理論は数学の世界では、なぜだかわからないが大きな広がりを見せず、ネター作用素の概念も

<sup>\*1</sup> 〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3 E-mail: nabeshima@rs.tus.ac.jp

<sup>\*2</sup> 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 E-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

ほとんど忘れ去られているように思える。しかしながら、L. Ehrenpreis が導入したネター作用素の概念は、数学的に極めて本質的である。計算機代数の観点から、このネター作用素の概念と理論をさらに展開・応用することで現存するアルゴリズムの効率化、さらに新たなアルゴリズムの発見も期待することができる。田島は 2000 年代から (Grothendieck duality を計算機上で扱うことを模索する中で) ネター作用素に関する研究 [18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] を行い、Grothendieck local residues を求めるアルゴリズムに応用した ([15, 16])。近年、計算機代数の観点からネター作用素を扱った論文 [2, 3, 4, 5] が続々発表されており、ネター作用素が注目されつつある。

現在の計算機代数学 (数式処理) は、グレブナー基底理論の華やかな活躍と共に進歩してきたが、それゆえに、グレブナー基底理論に依存している部分が多岐にあり、グレブナー基底理論を意識しすぎた不自然な理論構成も見受けられるようにも思える。例えば、多項式環の準素イデアル分解がその 1 つである。準素イデアル分解は、代数幾何、可換環論、特異点論などの多くの数学分野において重要な概念であると共に、計算機代数学の威力が存分に示すことができるものである。長年にわたる準素イデアル分解計算の研究 [1, 8, 9, 17] により、現在、計算機と計算機代数学を用いれば、多くの問題の準素イデアル分解は計算可能であるが、準素イデアル分解アルゴリズムはグレブナー基底理論に多大に依存している。

準素イデアル分解アルゴリズムの出力は、イデアルを構成する準素イデアル成分であり、基本的には、各準素イデアルはグレブナー基底の形で出力される。それゆえ、準素イデアルの重複度が大きくなると計算量が大きくなると共に、出力されるグレブナー基底を構成する多項式の項数および個数も多くなる。これは、万能だと思われがちなグレブナー基底で『計算すること』と『表現すること』の 2 つが原因であり、グレブナー基底に依存し過ぎてきたことの弊害であると考えられる。グレブナー基底理論は汎用的でありすばらしいが、多くの問題において計算量とのせめぎ合いである。現在、グレブナー基底計算またはその表現を用いない新しい計算法の開発が真に渴望されている。

本研究の目的は、ネター作用素を用いて計算機代数学の理論を書換え新たな計算法・枠組みを確立することである。例えば、上述した準素イデアル分解では、ネター作用素を用いて、準素イデアルを『それに伴う素イデアル』と『重複の仕方 (重複度)』という 2 つの情報に分けて表現することで、『計算量』と『その出力表現』の両方が共に改善されると考える。このとき、『重複の仕方 (重複度)』をネター作用素 (偏微分作用素) で表すようにする。2 つの情報で数学的対象を表現することより、グレブナー基底だけですべてを表現しようとする弊害が解消される。これは、整数を  $2274169625 = 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13^5$  と素因数分解することによって整数を理解することと同様の考えであり、この素因数分解にある情報は素数とその『指数』という 2 つのタイプの違った情報である。ネター作用素を用いることは、物事を理解する上で本質的で自然なことであると共に計算においても優位性がある。

本稿では、零次元イデアルに限定し考え、零次元準素イデアルのネター作用素を求める計算アルゴリズムを導出すると共に応用を紹介する。ここで得られた計算法は論文 [10, 11, 12, 13] で紹介した代数的局所コホモロジー類計算アルゴリズムと本質的に同じである。原点 1 点に台を持つような場合の代数的局所コホモロジー類は論文 [10, 11, 12, 13] で紹介した方法で扱うことができ、しかしながら、原点以外の場合は想定してないので扱えない。本稿で紹介するネター作用素計算アルゴリズムは、原点以外の場合にも有効である。例えば、原点以外の孤立特異点の場合、その孤立特異点の『重複の度合いや仕方』をネター作用素で記述することができ、その特異点を解析することができる。

最後に、本稿で得た結果の応用として、イデアルの基本的な演算をネター作用素を用いてどのように行うかも論じる。

## 2 ネター作用素

ここでは、ネター作用素について簡潔に述べる。(詳しくは [18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] を参照.)

有理数全体  $\mathbb{Q}$  のなす体を  $K$  で表す.  $n$  個の変数を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とし, 変数  $x_i$  で偏微分するという操作を  $\partial_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}$  で表す ( $1 \leq i \leq n$ ).  $n$  個の変数の省略形を  $x := \{x_1, \dots, x_n\}$  とする. このとき,  $i \neq j$  で  $x_i x_j = x_j x_i$ ,  $x_i \partial_j = \partial_j x_i$ ,  $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$  が成り立ち,  $i = j$  でライプニッツの公式より  $\partial_{x_i} x_i = x_i \partial_{x_i} + 1$  が成り立つ.  $K$  係数の  $n$  変数多項式全体のなす環  $K[x_1, \dots, x_n]$  を  $K[x]$  とし, 係数を  $K[x]$  とする偏微分作用素環を

$$D_X := \left\{ \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} h_\beta(x) \partial^\beta \mid h_\beta(x) \in K[x] \right\}$$

とする. ただし,  $\partial^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$  である. 本稿では,  $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$  をメインのシンボルとして主に扱う.

### 定理 1

準素イデアルを  $Q \subset K[x]$  とし, 素イデアル  $\sqrt{Q}$  を  $\mathfrak{p}$  とする (すなわち,  $Q$  は  $\mathfrak{p}$ -primary ideal である). このとき,  $h \in Q$  ならば,  $P_1(h), P_2(h), \dots, P_\ell(h) \in \mathfrak{p}$  となる  $P_1, \dots, P_\ell \in D_X$  が存在し, 逆も成り立つ.

### 定義 2

定理 1 を満たす多項式係数偏微分作用素をイデアル  $Q$  のネーター作用素 (Noether operator) と呼ぶ.

### 命題 3

零次元準素イデアルを  $Q \subset K[x]$  とし,  $\sqrt{Q} = \mathfrak{p}$  とする. このとき,  $Q$  のネーター作用素の集合は  $D_X$  で体  $K[x]/\mathfrak{p}$  上の有限次元ベクトル空間となる.

本稿では, 命題 3 で述べた体  $K[x]/\mathfrak{p}$  上の基底を  $Q$  のネーター作用素基底と呼び  $NB_Q$  で表すようにする.

### 注意 1

古典的な Ehrenpreis のネーター作用素の概念は双対性と深く係わっている. Ehrenpreis のネーター作用素の本質を捉えるには, まず双対の世界でネーター作用素に相当する概念を新たに導入し, その双対として Ehrenpreis のネーター作用素を定義し直すのが数学的に自然である.

文献 [22] では, Grothendieck 双対性, 局所コホモロジーとホロノミー  $D$ -加群の言葉を用いて, 双対の世界でネーター作用素に相当する概念を導入し, その双対として古典的なネーター作用素を理解できることを述べている. この文献は入手困難である. [23, 24, 25] を参照されたい.

### 例 1

零次元準素イデアル  $Q = \langle 64x^6 - 144x^4 + 108x^2 - 27, 16x^4 - 24x^2 + 2xy + x + 9, 4y^2 + 4y + 1 \rangle$  を考える. このとき,  $\sqrt{Q} = \langle 2y + 1, 4x^2 - 3 \rangle$  であり, ネーター作用素基底は  $NB_Q = \{-64x\partial_y + \partial_x^2, \partial_x, 1\}$  となる. ( $NB_Q$  の計算法は次節で述べる.)

準素イデアルは素イデアルが重複しているものと捉えることができ, ネーター作用素基底は, その重複の度合いを表していると解釈することができる.

### 記法 1

準素イデアル  $Q$  は, それに伴う素イデアル  $\mathfrak{p}$  とネーター作用素基底  $NB_Q$  で表現できるので, このとき  $Q$  を  $\text{Noether}(\mathfrak{p}, NB_Q)$  で表わすようにする.

本稿では,  $Q$  と  $\text{Noether}(\mathfrak{p}, NB_Q)$  を同一視し,  $\text{Noether}(\mathfrak{p}, NB_Q)$  の表現で準素イデアル  $Q$  と捉える. 準素イデアルに付随する素イデアル  $\mathfrak{p}$  を求める (2021 年現在のところ) 世界一効率的の良いアルゴリズムは [1] により紹介されていると共に計算機代数システム Risa/Asir [14] に実装されている. 本稿では, 準素イデアルに付随する素イデアル  $\mathfrak{p}$  は高速に求めることができるとし, ネーター作用素基底  $NB_Q$  を効率的に計算するアルゴリズムを紹介する.

### 3 ネター作用素基底の計算

零次元イデアルを  $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subset K[x]$  とし,  $Q$  を  $I$  の 1 つの準素イデアル成分とする. また,  $\mathfrak{p} = \sqrt{Q}$  とし,  $\text{NB}_Q \subset D_X$  を  $Q$  のネター作用素基底とする. このとき, 次の条件が成り立つ.

#### 命題 4

偏微分作用素  $P \in \text{NB}_Q$  は次の条件を満たす.

- (i)  $P(f_i) \in \mathfrak{p}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .
- (ii) 交換子積  $[P, x_i] := Px_i - x_iP$  とすると,  $[P, x_i] \in \text{Span}_{K[x]/\mathfrak{p}}(\text{NB}_Q)$  となる.

$I$  の準素イデアル分解を

$$I = \bigcap_{i=1}^r Q_i$$

とする. ただし,  $Q_i$  は準素イデアルである. 準素イデアル分解よりも,  $\sqrt{I}$  の素イデアル分解

$$\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i, \text{ただし, } \sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i$$

を求める方が計算コストが小さい ([1]), ここでは各素イデアル  $\mathfrak{p}_i$  は求められているとする. このとき,

$$I = \bigcap_{i=1}^r \text{Noether}(\mathfrak{p}_i, \text{NB}_{Q_i})$$

となる,  $\text{NB}_{Q_i}$  を計算する方法を紹介する. (注意:  $Q_i$  自体の基底は  $K[x]$  では求めないで,  $Q_i = \text{Noether}(\mathfrak{p}_i, \text{NB}_{Q_i})$  となる,  $\text{NB}_{Q_i} \subset D_X$  を求める.)

シンボル  $\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}$  からなる項に項順序を設定し, その項たちにおいて, 項順序が小さい先頭項を持つ偏微分作用素から順次, 命題 4 の (i), (ii) が成り立つかどうかをチェックし,  $Q_i$  のネター作用素基底を求める. このとき, 係数は  $K[x]/\mathfrak{p}_i$  で考える (厳密には,  $\mathfrak{p}_i$  のグレブナー基底でノーマルフォームを計算する). アルゴリズムの疑似コードを記述する前に計算の具体例を述べる.

$f = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3, g = x^2 + y^2 - 1$  とし  $I = \langle f, g \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y]$  について考える. このとき, 素イデアル分解

$$\sqrt{I} = \langle x, y - 1 \rangle \cap \langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle$$

は, 準素イデアル分解より速く求めることができる. 準素イデアル分解は

$$I = Q_1 \cap Q_2$$

となるので,  $\sqrt{Q_1} = \mathfrak{p}_1 = \langle x, y - 1 \rangle, \sqrt{Q_2} = \mathfrak{p}_2 = \langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle$  とする. 以下,  $(Q_1$  と  $Q_2$  の生成元はわからないが)  $Q_1$  と  $Q_2$  のネター作用素基底をそれぞれ求める.  $\partial_x, \partial_y$  からなる単項の集合に全次数辞書式項順序  $\partial_x \succ \partial_y$  を設定する.

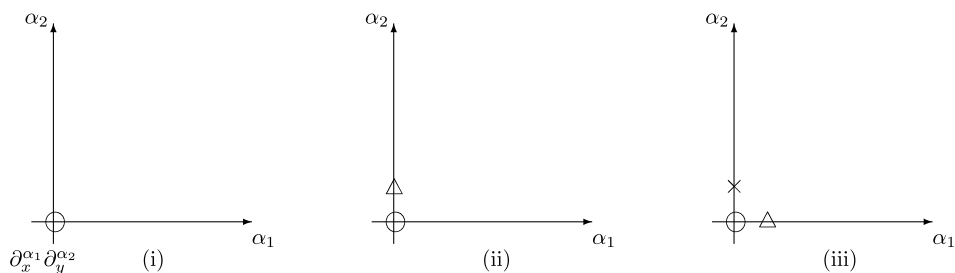
- (1)  $Q_1$  のネター作用素基底を求める. このとき, 対応する素イデアルは  $\mathfrak{p}_1 = \langle x, y - 1 \rangle$  である.  $\text{NB} = \emptyset$  とし, 計算を始める.

- (i) 項順序が一番小さいものは1である。1は明らかに命題4を満たすので、 $Q$ のネター作用素である。よって、NBを更新する。NB := NB  $\cup$  {1} = {1}.
- (ii) 次に項順序が小さい項は $\partial_y$ である。(定数項はすでに基底の一部になることが(i)で分かっているので) $\partial_y$ がネター作用素になるかどうかをチェックする。

$$\partial_y(f) = 4x^2y + 3x^2 + 4y^3 - 3y^2 \notin \mathfrak{p}_1$$

となるので、命題4の(i)を満たさないので $\partial_y$ はネター作用素ではない。

下図では候補の状態には $\triangle$ とし、ネター作用素となる元の前頭項の場合には $\circ$ とし、チェックを実行したがネター作用素とならないことが分かった元の前頭項を $\times$ で示した。



- (iii) 次に小さい項は $\partial_x$ であるので、 $\partial_x$ が先頭項となる元

$$P = \partial_x + a\partial_y$$

を考える。ただし、 $a$ は未定係数である。

$$\begin{aligned} [P, x] &= 1 \in \text{Span}_{K[x,y]/\mathfrak{p}_1}(\text{NB}), & [P, y] &= a, \\ P(f) &\equiv a \pmod{\mathfrak{p}_1}, & P(g) &\equiv 2a \pmod{\mathfrak{p}_1}, \end{aligned}$$

となるので、 $a=0$ のとき、命題4を満たすので、 $\partial_x$ はネター作用素である。よって、NBを更新するとNB := {1,  $\partial_x$ }となる。

- (iv) 次に小さい項は $\partial_x^2$ である。(  $\partial_y$ はネター作用素にならないので、 $\partial_x^\alpha \partial_y$  ( $\alpha \in \mathbb{N}$ ) という形の項は明らかに命題4(ii)を満たさないで考えない。)  $\partial_x^2$ が先頭項となる元

$$P = \partial_x^2 + a\partial_x\partial_y + b\partial_y^2 + c\partial_y$$

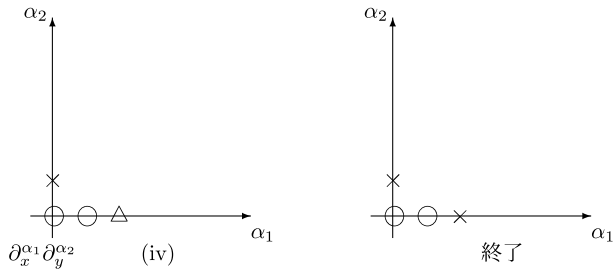
を考える。(この状況を解析すると命題4(ii)より、 $\partial_y^2$ は低階項にならないことがわかるので、 $b\partial_y^2$ を加えなくてもよい。ここでは細かい計算テクニックの議論を割愛するので、項順序が先頭項より小さいの加えたもの考える。)ただし、 $a, b, c, d$ は未定係数である。

$$[P, x] = 2\partial_x + a\partial_y, \quad [P, y] = a\partial_x + 2b\partial_y + c$$

より、 $\text{Span}_{K[x,y]/\mathfrak{p}_1}(\text{NB})$ に属するなら $a=b=0$ であることがわかる。また、

$$P(f) \equiv 6b + c + 10 \pmod{\mathfrak{p}_1}, \quad P(g) \equiv 2b + 2c + 2 \pmod{\mathfrak{p}_1}$$

であるので、命題4を満たすためには、 $6b + c + 10 = 0$ ,  $2b + 2c + 2 = 0$ でなければならない。すなわち、 $b = -\frac{9}{5}$ ,  $c = \frac{4}{5}$ である。 $0 \neq -\frac{9}{5}$ より、矛盾する。したがって、 $P$ はネター作用素の前頭項にならない。



次にネター作用素となる元先頭項の候補が存在しないことより，ここで  $Q_1$  のネター作用素基底の計算を終了する．

以上より， $Q_1$  のネター作用素基底は

$$\{1, \partial_x\}$$

である．

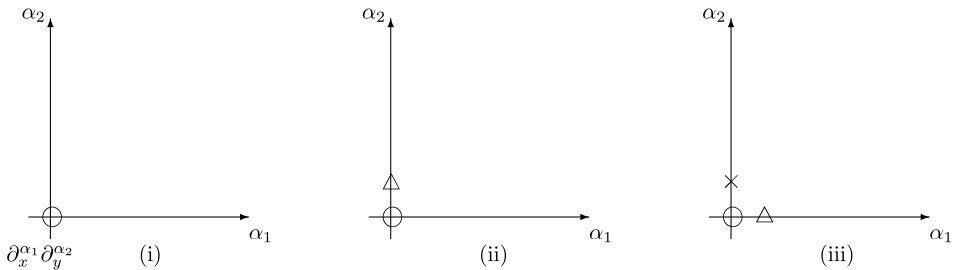
(2)  $Q_2$  のネター作用素基底を求める．このとき，対応する素イデアルは  $\mathfrak{p}_2 = \langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle$  である． $\text{NB} = \emptyset$  とし，(1) と同様に計算を始める．

(i) 項順序で一番小さいものは 1 である．1 は明らかに命題 4 を満たすので，ネター作用素である．よって， $\text{NB}$  を更新する． $\text{NB} := \text{NB} \cup \{1\} = \{1\}$ ．

(ii) 次に項順序が小さい項は  $\partial_y$  である． $\partial_y$  がネター作用素になるかどうかをチェックする．

$$\partial_y(g) = 2 \pmod{\mathfrak{p}_2}$$

となるので， $\partial_y(g) \notin \mathfrak{p}_2$  である．命題 4 を満たさないので  $\partial_y$  はネター作用素ではない．



(iii) 次に小さい項は  $\partial_x$  であるので， $\partial_x$  が先頭項となる元

$$P = \partial_x + a\partial_y$$

を考える．ここでは  $a$  は未定係数である．

$$\begin{aligned} [P, x] &= 1 \in \text{Span}_{K[x, y]/\mathfrak{p}_2}(\text{NB}), & [P, y] &= a \\ P(f) &\equiv x - \frac{1}{2}a \pmod{\mathfrak{p}_2}, & P(g) &\equiv 2z - a \pmod{\mathfrak{p}_2} \end{aligned}$$

となるので,  $a = 2x$  のとき, 命題 4 を満たすので,  $\partial_x + 2x\partial_y$  はネター作用素である. よって, NB を  $NB := \{1, \partial_x + 2x\partial_y\}$  と更新する.

(iv) 次に小さい項は  $\partial_x^2$  である.  $\partial_x^2$  が先頭項となる元

$$P = \partial_x^2 + a\partial_x\partial_y + b\partial_y^2 + c\partial_y$$

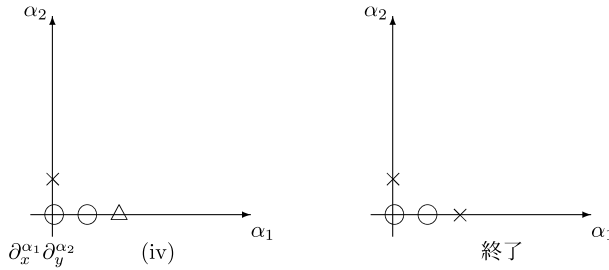
を考える. ただし,  $a, b, c, d$  は未定係数である.

$$[P, x] = 2\partial_x + a\partial_y, \quad [P, y] = a\partial_x + 2b\partial_y + c$$

$$P(f) \equiv 2b - c + 2 \pmod{\mathfrak{p}_2}, \quad P(g) \equiv 16bx^2 + 4cx^3 + 48x^2 + 8ax + 24b - 5c - 8 \pmod{\mathfrak{p}_2}$$

となる. 命題 4 を満たす  $a, b, c, d$  は存在しないことが計算することでわかる. したがって,  $P$  はネター作用素の先頭項にならない.

次に, ネター作用素となる元の前頭項の候補が存在しないことより, ここで  $Q_2$  のネター作用素基底の計算を終了する.



以上より,  $Q_2$  のネター作用素基底は

$$\{1, \partial_x + 2x\partial_y\}$$

である.

零次元イデアルのネター作用素基底を求めるアルゴリズムをまとめると次である.

---

#### アルゴリズム 1 (ネター作用素の計算)

---

入力:  $I = \langle f_1, \dots, f_\ell \rangle \subset K[x]$ : 零次元イデアル.

出力:  $\{\mathfrak{p}_i, NB_i \mid \mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_i}, NB_i \text{ は } Q_i \text{ のネター作用素基底}, I = \bigcap_{i=1}^{\ell} Q_i \text{ (準素イデアル分解)}, 1 \leq i \leq \ell\}$

**BEGIN**

$\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m$  を計算する;

$L \leftarrow \emptyset$ ;

**for each**  $i = 1$  **to**  $\ell$  **do**

Flag  $\leftarrow 1$ ;

$T \leftarrow \{1\}$ ;

$NB_i \leftarrow \{1\}$ ;

$F \leftarrow \emptyset$ ;

**while** Flag  $\neq 0$  **do**

```

if  $T$  の元では、任意の  $F$  の元で割り切れない最小の項  $\partial^\alpha$  が存在する then
   $P \leftarrow \partial^\alpha + \sum_{\partial^\alpha \succ \partial^\tau} c_\tau \partial^\tau$ ; /* ( $c_\tau$  は未定係数) */
  命題 4 の条件より  $c^\tau$  を決定する.
  if  $c^\tau$  が存在する then
     $T \leftarrow T \cup \{\partial^\alpha\}$ ;  $NB_i \leftarrow NB_i \cup \{P\}$ ; /*( $c_\tau \in K[x]$ )*/
  else-if
     $F \leftarrow F \cup \{\partial^\alpha\}$ ;
  end-if
else-if
  Flag  $\leftarrow 0$ ;
end-if
end-while
 $L \leftarrow L \cup \{[p_i, NB_i]\}$ ;
end-for
return  $L$ ;
END

```

アルゴリズム内で構成する微分作用素  $\partial^\alpha + \sum_{\partial^\alpha \succ \partial^\tau} c_\tau \partial^\tau$  の構成法については、 $\partial^\alpha \succ \partial^\tau$  のみしか情報を記述していないが、代数的局所コホモロジーの計算法 [10, 11, 12, 13] と同様に不必要な低階項を省く方法がある。ここでは細かい計算テクニックは割愛する。

計算機代数システム Risa/Asir にネター作用素基底を計算するアルゴリズムを実装した。次がその出力例である。

```
[1116] D=[(48*y^2+24*y+3)*x^2+64*y^10+96*y^9+36*y^8+4*y^7,(4096*y^7+3584*y^6)*x^2+(1280*y^9-32*y^7-28*y^6)*x-10*y^9,x^3+(4*y^8+4*y^7)*x+y^10]$
```

```
[1117] noether(D,[x,y],1);
```

```
Prime ideal [4*y+1,128*x-1]
```

```
Noether ope. [25088/289*dy^2-320/17*dx*dy+dx^2,dx,dy,1]
```

```
No. of elements 4
```

```
Prime ideal [x,y]
```

```
Noether ope. [dy^9-180*dx*dy^6-120960*dx^2*dy^2-241920*dx^2*dy,dy^8-26880*dx^2*dy-26880*dx^2,dy^7-3360*dx^2,dx*dy^5,dy^6,dx*dy^4,dy^5,dx*dy^3,dy^4,dx*dy^2,dy^3,dx*dy,dy^2,dx,dy,1]
```

```
No. of elements 16
```

この出力例は、零次元イデアル  $D = ((48y^2 + 24y + 3)x^2 + 64y^{10} + 96y^9 + 36y^8 + 4y^7, (4096y^7 + 3584y^6)x^2 + (1280y^9 - 32y^7 - 28y^6)x - 10y^9, x^3 + (4y^8 + 4y^7)x + y^{10})$  の各準素イデアル成分のネター作用素基底を計算したものである。出力結果は

```
Noether( $\langle 4y + 1, 128x - 1 \rangle, \{25088/289\partial_y^2 - 320/17\partial_x\partial_y + \partial_x^2, \partial_x, \partial_y, 1\}$ ), Noether( $\langle x, y \rangle, NB_2$ )
```



を意味する. ただし,  $NB_2 = \{\partial_y^9 - 180\partial_x\partial_y^6 - 120960\partial_x^2\partial_y^2 - 241920\partial_x^2\partial_y, \partial_y^8 - 26880\partial_x^2\partial_y - 26880\partial_x^2, \partial_y^7 - 3360\partial_x^2, \partial_x\partial_y^5, \partial_y^6, \partial_x\partial_y^4, \partial_y^5, \partial_x\partial_y^3, \partial_y^4, \partial_x\partial_y^2, \partial_y^3, \partial_x\partial_y, \partial_y^2, \partial_x, \partial_y, 1\}$  である.

ネター作用素基底は, 準素イデアルと対応する素イデアルの重複の度合いを表しているので, 素イデアルとそのネター作用素基底で準素イデアルを復元することは可能である. 本節の残りは, その復元方法について述べる. アルゴリズムの擬似コードを記述する前に計算の具体例を述べる.

本節の前半でのネター作用素基底計算で得た,

$$\text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_x + 2x\partial_y\})$$

を考える.  $\mathfrak{p}_2 = \langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle$  とし, 変数  $x, y$  に全次数辞書式項順序  $x > y$  を設定する. 素イデアルの生成元にそれぞれ  $q_1 := 4x^2 - 3, q_2 := 2y + 1$  と名前を付ける. このとき, 先頭項は  $q_1$  は  $q_2$  よりも大きいので, ここでは  $q_1$  は  $q_2$  より大きい (もしくは,  $q_2$  は  $q_1$  より小さい) という.  $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$  を一つの項のように扱い計算を行う ( $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ ). また, 変数として認識したときの  $q_1, q_2$  にも全次数辞書式項順序  $q_1 > q_2$  を設定しているとする.

- $Q = \emptyset$  とする.

(i)  $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$  において, 最小なものは  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  のとき, すなわち 1 である. このとき,

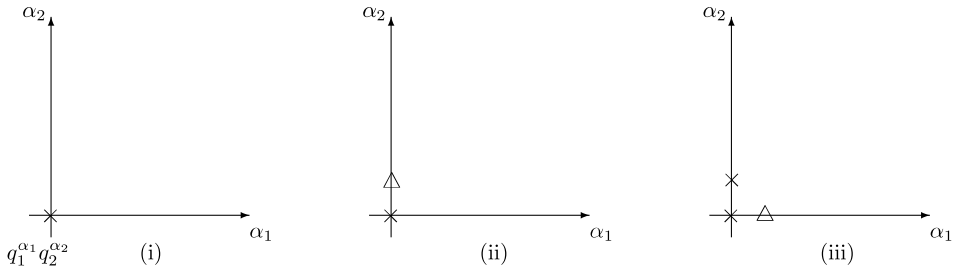
$$1(q_1^0 q_2^0) = 1(1) = 1 \notin \mathfrak{p}_2, \quad (\partial_x + 2x\partial_y)(1) = 0 \in \mathfrak{p}_2,$$

なので, 1 は求める準素イデアルには属さないことがわかる. 下図では属さない箇所を  $\times$  とし, 属する箇所を  $\circ$ , 考えている候補を  $\Delta$  とする.

(ii) 次に小さなものは,  $q_1^0 q_2^1 = q_2$  である. このとき,

$$1(q_2) = q_2 \in \mathfrak{p}_2, \quad (\partial_x + 2x\partial_y)(q_2) = 4x \notin \mathfrak{p}_2,$$

なので,  $q_2$  は求める準素イデアルには属さないことがわかる.



(iii) 次に小さなものは,  $q_1^1 q_2^0 = q_1$  である.  $q_2$  は  $q_1$  より小さいので,  $f = q_1 + aq_2$  とする. ただし,  $a$  は未定係数である.

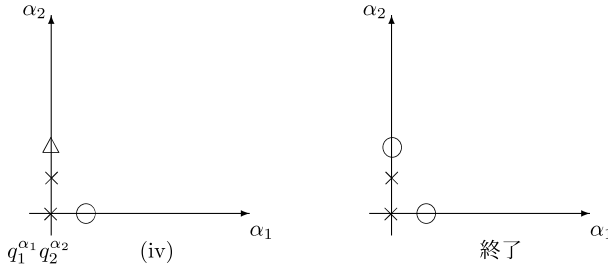
$$1(f) = f \in \mathfrak{p}_2, \quad (\partial_x + 2x\partial_y)(f) = (4a + 8)x \equiv (4a + 8)x \pmod{\mathfrak{p}_2}$$

となり,  $a = -2$  のとき  $(\partial_x + 2x\partial_y)(f) \in \mathfrak{p}_2$  となる. したがって,  $q_1 - 2q_2 = 4x^2 - 4y - 5$  は求める準素イデアルに属することがわかる.  $Q$  を更新し,  $Q := \{4x^2 - 4y - 5\}$  とする.

(iv) 次に小さなものは、 $q_2^2$  である。(注意：(iii) より  $q_1$  が含まれているので、先頭が  $q_1$  で割れるものは考えなくてよい。また、低階項にも  $q_1$  を含むものは考えなくてよい。なぜなら、 $q_1 \equiv 2q_2 \pmod{\mathfrak{p}_2}$  なので、 $q_2$  で書くことができる。)  $f = q_2^2 + aq_2$  を考える。ただし、 $a$  は未定係数である。

$$1(f) = f \in \mathfrak{p}_2, \quad (\partial_x + 2x\partial_y)(f) = (16y + 4a + 8)x \equiv (16y + 4a + 8)x \pmod{\mathfrak{p}_2}$$

より、 $a = -4y - 2$  のとき、 $(\partial_x + 2x\partial_y)(f) \in \mathfrak{p}_2$  となる。したがって、 $q_2^2(-4y - 2)q_2 = -4y^2 - 4y - 1$  は求める準素イデアルに属することがわかる。 $Q$  を更新し、 $Q := \{-4y^2 - 4y - 1, 4x^2 - 4y - 5\}$  とする。



次に候補となるものが存在しないので、ここで終了する。したがって、求める準素イデアルの基底は

$$Q = \{-4y^2 - 4y - 1, 4x^2 - 4y - 5\}$$

となる。

以上をアルゴリズムとしてまとめると次となる。

---

**アルゴリズム 2(準素イデアルの復元)**

---

**入力:**  $\mathfrak{p} = \langle p_1, p_2, \dots, p_\ell \rangle \subset K[x]$ : 素イデアル.  $NB = \{d_1, d_2, \dots, d_r\} \subset D_X$ : ネター作用素基底.

$\succ$ :  $p_1, \dots, p_\ell$  を変数と見た時の項順序.

**出力:**  $Q$ : 素イデアル  $\mathfrak{p}$ , ネター作用素基底  $NB$  を持つ準素イデアル. (Noether( $\mathfrak{p}, NB$ ))

**BEGIN**

$Q \leftarrow \emptyset$ ;

Flag  $\leftarrow 1$ ;

$T \leftarrow \emptyset$ ;

$F \leftarrow \emptyset$ ;

**while** Flag  $\neq 0$  **do**

if  $F$  の元以外の  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$  の形の元で、任意の  $T$  の元で割り切れない最小の項  $p^\alpha$  が存在する **then**

$f \leftarrow p^\alpha + \sum_{p^\alpha \succ p^\tau} c_\tau p^\tau$ ; /\* ( $c_\tau$  は未定係数,  $p^\tau$  は  $T$  の元ではない) \*/

$K[x]/\mathfrak{p}$  上で連立方程式  $\{d_1(f), d_2(f), \dots, d_r(f)\}$  を解き  $c_\tau$  を決定する;

if  $c_\tau$  が存在する **then**

$T \leftarrow T \cup \{p^\alpha\}$ ;  $Q \leftarrow Q \cup \{f\}$ ; /\* ( $c_\tau$  に解を代入した  $f$ ) \*/

```

else-if
   $F \leftarrow F \cup \{p^\alpha\};$ 
end-if
else-if
  Flag  $\leftarrow 0;$ 
end-if
end-while
return  $Q;$ 
END

```

『ネター作用素を用いた準素イデアルの表現』と『(今までどおりの) 準素イデアルを生成で表現』は相互に計算可能であることがアルゴリズム 1 とアルゴリズム 2 からわかる。

『ネター作用素を用いた準素イデアルの表現』での準素イデアル分解は紹介したアルゴリズム 1 である。今まで知られている準素イデアル分解アルゴリズムは『(今までどおりの) 準素イデアルを生成元で表現』したものであり、素イデアルとの重複の仕方が複雑であれば、既存のアルゴリズム [8, 9, 17] であったも現実時間で計算できないものが多い。しかしながら、『ネター作用素を用いた準素イデアルの表現』であれば計算できる場合が多い。実際、複雑な問題では『ネター作用素を用いた準素イデアルの表現』を用いた方が速い。ベンチマークテストの結果はここでは割愛する。

## 4 ネター作用素を用いたイデアルの計算

本節では、『ネター作用素を用いた準素イデアルの表現』を用いてどのようにイデアルの計算を行うのかを紹介する。

零次元素イデアルを  $\mathfrak{p}$  とし、 $Q_1, Q_2$  を  $\mathfrak{p}$  の準素イデアルとする。すなわち、 $\sqrt{Q_1} = \sqrt{Q_2} = \mathfrak{p}$  とする。 $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$  に項順序  $\succ$  を設定し、 $NB_{Q_1}$  を  $Q_1$  のネター作用素基底であり  $\succ$  に関して簡約な基底とする。同様に、 $NB_{Q_2}$  を  $Q_2$  のネター作用素基底であり  $\succ$  に関して簡約な基底とする。 $Q_1$  と  $Q_2$  のネター作用素の空間は有限次元ベクトル空間であるので、そのベクトル空間を各々  $NT_{Q_1}$ ,  $NT_{Q_2}$  で表す。すなわち、 $NT_{Q_1} = \text{Span}_{K[x]/\mathfrak{p}}(NB_{Q_1})$ ,  $NT_{Q_2} = \text{Span}_{K[x]/\mathfrak{p}}(NB_{Q_2})$  である。このとき、次の 4 つの補題が成り立つ。

### 補題 5 (イデアルメンバーシップ)

$h \in K[x]$  とする。任意の  $P \in NB_{Q_1}$  に対し、 $P(h) \in \mathfrak{p}$  ならば  $h \in Q_1$  であり、逆も成り立つ。

ネター作用素を得ていれば、 $P(h)$  は単なる微分の計算なので簡単である。また、(重複度が大きな場合は特に) 準素イデアル  $Q_1$  のグレブナー基底でノーマルフォームを計算するより、素イデアル  $\mathfrak{p}$  でノーマルフォームを計算する方が計算コストは小さい。

イデアルの準素イデアル成分が複数の場合は、各準素イデアル成分に対して補題 5 を適用する必要がある。

### 補題 6 (イデアルの和)

イデアル  $Q_1 + Q_2$  のネター作用素空間  $NT_{Q_1+Q_2}$  は

$$NT_{Q_1+Q_2} = NT_{Q_1} \cap NT_{Q_2}$$

となる。また、 $NT_{Q_1+Q_2}$  の簡約な基底は  $NB_{Q_1} \cap NB_{Q_2}$  となる。

## 例 2

準素イデアル  $Q_1 = \langle 64x^6 - 144x^4 + 108x^2 - 27, 16x^4 - 24x^2 + 2xy + x + 9, 4y^2 + 4y + 1 \rangle$  と  $Q_2 = \langle 16x^4 - 24x^2 + 9, 4y^2 + 4y + 1 \rangle$  のネーター作用素を用いた準素イデアルの表現は

$$\text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_x^2 - 64x\partial_y\}), \quad \text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x\partial_y\})$$

である。これらネーター作用素基底は全次数辞書式項順序 ( $\partial_x \succ \partial_y$ ) に関して簡約な基底である。補題 6 より,  $\{1, \partial_x, \partial_x^2 - 64x\partial_y\} \cap \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x\partial_y\} = \{1, \partial_x\}$  なので, イデアルの和  $Q_1 + Q_2$  は, ネーター作用素を用いた表現で簡単に求められ

$$\text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_x\})$$

となる。

## 補題 7 (イデアルの共通部分)

イデアル  $Q_1 \cap Q_2$  のネーター作用素空間  $\text{NT}_{Q_1 \cap Q_2}$  は

$$\text{NT}_{Q_1 \cap Q_2} = \text{NT}_{Q_1} + \text{NT}_{Q_2}$$

となる。すなわち,  $\text{NT}_{Q_1 \cap Q_2} = \text{Span}_{K[x]/\mathfrak{p}}(\text{NB}_{Q_1} \cup \text{NB}_{Q_2})$  となる。

## 例 3

準素イデアル  $Q_1 = \langle 64x^6 - 144x^4 + 108x^2 - 27, 16x^4 - 24x^2 + 2xy + x + 9, 4y^2 + 4y + 1 \rangle$  と  $Q_2 = \langle 16x^4 - 24x^2 + 9, 4y^2 + 4y + 1 \rangle$  のネーター作用素を用いた準素イデアルの表現は

$$\text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_x^2 - 64x\partial_y\}), \quad \text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x\partial_y\})$$

である。( $\mathfrak{p} = \langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle$ ) これらネーター作用素基底は全次数辞書式項順序 ( $\partial_x \succ \partial_y$ ) に関して簡約な基底である。補題 7 より,  $\{1, \partial_x, \partial_x^2 - 64x\partial_y\} \cup \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x\partial_y\}$  を簡約化することにより  $\text{NT}_{Q_1 \cap Q_2}$  の基底は計算することができる。すなわち,

$$\text{Span}_{K[x,y]/\mathfrak{p}}(\{1, \partial_x, \partial_x^2 - 64x\partial_y\} \cup \{1, \partial_x, \partial_y, \partial_x\partial_y\}) = \text{Span}_{K[x,y]/\mathfrak{p}}(\{1, \partial_y, \partial_x, \partial_x\partial_y, \partial_x^2\})$$

なので,  $Q_1 \cap Q_2$  のネーター作用素を用いた表現は

$$\text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_y, \partial_x, \partial_x\partial_y, \partial_x^2\})$$

となる。イデアルの計算は必要なく, ネーター作用素を用いた表現がわかっていれば, 線形代数のみでイデアルの共通部分を得ることができる。

## 補題 8 (イデアル商)

$h \in K[x]$  とし  $N = \{[P, h] \mid P \in \text{NB}_{Q_1}\}$  とする。ただし,  $Ph - hP$  の係数部分は  $\mathfrak{p}$  で簡約されている ( $\text{mod } \mathfrak{p}$ ) ものとする。イデアル商  $Q_1 : h$  のネーター作用素空間  $\text{NT}_{Q_1:h}$  は

$$\text{NT}_{Q_1:h} = \text{Span}_{K[x]/\mathfrak{p}}(N)$$

となる。すなわち,  $\text{NT}_{Q_1:h}$  の基底を  $\text{NB}$  とすると,  $Q_1 : h$  のネーター作用素を用いた表現は  $\text{Noether}(\mathfrak{p}, \text{NB})$  となる。

## 例 4

準素イデアル  $Q = \langle 16x^4 - 16x^2y - 32x^2 + 12y + 15, 4y^2 + 4y + 1 \rangle$  のネーター作用素を用いた表現は

$$\text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_y, \partial_x, \partial_x^2 + 4x\partial_x\partial_y\})$$

である。 $h = 4x^2 - 3$  とすると, (ここでの計算はワイル代数であることを注意する)

$$\partial_x h - h\partial_x = 8x, \quad \partial_y h - h\partial_y = 0, \quad (\partial_x^2 + 4x\partial_x\partial_y)h - h(\partial_x^2 + 4x\partial_x\partial_y) = 16x(\partial_x + 2x\partial_y) + 8$$

となるので、補題 8 より

$$\text{NT}_{Q:h} = \text{Span}_{K[x,y]/p}(\{1, \partial_x + 2x\partial_y\})$$

となる。したがって、イデアル商  $Q : h$  のネター作用素を用いた表現は

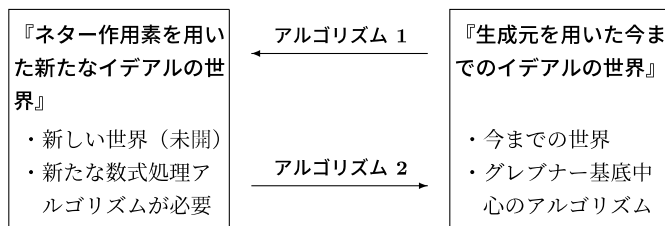
$$\text{Noether}(\langle 4x^2 - 3, 2y + 1 \rangle, \{1, \partial_x + 2x\partial_y\})$$

となる。

ネター作用素を用いた表現であれば、イデアルの基本的な計算に“グレブナー基底は必要ない”ことを最後に強調しておく。

## 5 新たなる世界での数式処理

アルゴリズムが同じであっても、データ構造が異なるとプログラムの処理速度は大きく異なることが多くある。同様に『イデアルをネター作用素を用いて表現するか』、『生成元で表現するか』によって、イデアルの計算速度も大きく異なることが予想される。ネター作用素を用いた新たなイデアルの世界は、まだまだ未開であり魅力的な研究領域である。



ネター作用素を用いた世界で新たな数式処理の世界が展開されることを今後期待する。

## 謝 辞

この研究は日本学術振興会科学研究補助金 基盤研究 (C) 課題番号 18K03214, 18K03320, 19K03484 の助成を受けております。

## 参 考 文 献

- [1] Aoyama, T. and Noro, M.: Modular Algorithms for Computing Minimal Associated Primes and radicals of Polynomial Ideals. *Proc. ISSAC 2018*, pp. 31–38, ACM, 2018.
- [2] Chen, J., Härkönen, M., Krone, R. and Leykin, A.: Noetherian operators and primary decomposition. *arXiv:2006.1388 [math.AG]* 24 Jan, 2020.

- [3] Chen, J., Cid-Ruiz, Y., Härkönen, M., Krone, R. and Leykin, A.: Noetherian operators in Macaulay 2. *arXiv:2101.01002 [math.AG]* 4 Jan, 2021.
- [4] Cid-Ruiz, Y. and Strumfels, B.: Primary decomposition with differential operators. *arXiv:2101.03643 [math.AG]* 11 Jan, 2021.
- [5] Cid-Ruiz, Y., Homs, R. and Strumfels, B.: Primary ideals and their differential equations. To appear in *Foundations of Computational Mathematics*, (arXiv:2001.04700), 2021.
- [6] Ehrenpreis, L.: A fundamental principle for system of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications. *Proc. Inter. Symp. on Linear Spaces*, Jerusalem, pp. 161–174, 1961.
- [7] Ehrenpreis, L.: *Fourier Analysis in Several Complex Variables*. Wiley Interscience Publishers, 1970
- [8] Ishihara, Y. and Yokoyama, K.: Computation of a primary component of an ideal from its associated prime by effective localization. *Communications of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation*, Vol. 4, pp.1-31, 2020.
- [9] Kawazoe, T. and Noro, M.: Algorithms for computing a primary ideal decomposition without producing intermediate redundant components. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 46, pp. 1158–1172, 2011.
- [10] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一: パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について. *数理解析研究所講究録*, Vol. 1814, pp.43–53, 2010.
- [11] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一: 代数的局所コホモロジーの計算法とそれを用いたスタンダード基底・グレブナー基底について. *数理解析研究所講究録*, Vol. 1764, pp.102–125, 2011.
- [12] Nabeshima, K. and Tajima, S.: On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. 66, pp 143–1159. 2015.
- [13] Nabeshima, K. and Tajima, S. : Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 82, pp 91–122. 2017.
- [14] Noro, M. and Takeshima, T.: Risa/Asir - A computer algebra system. *Proc. ISSAC 1992*, pp. 387–396, ACM, 1992. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html>
- [15] Ohara, K. and Tajima, S.: An algorithm for computing Grothendieck local residues I, – shape basis case –, *Mathematics in Computer Sciences* 13, pp. 205–216 2019.
- [16] Ohara, K. and Tajima, S.: An algorithm for computing Grothendieck local residues II – general case – *Mathematics in Computer Sciences*. 14, pp. 483–496, 2020.
- [17] Shimoyama, T. and Yokoyama, K.: Localization and primary decomposition of polynomial ideals. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 22, pp. 247–277, 1996.
- [18] 田島慎一: 代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素. 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1138, pp. 87–95, 2000.
- [19] Tajima, S.: Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formulas. *Proc. Seventh International Conference on Several Complex Variables, in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis*, (eds by Kajiwara, Li and Shon) Dekker. pp.503–509, 2000.

- [20] Tajima, S.: An algorithm for computing the Noetherian operator representations and its applications to constant coefficients holonomic PDE's. *Tools for Mathematical Modellings*, St. Petersburg, pp. 154–160, 2001.
- [21] 田島慎一: 多変数留数の biorthogonal 基底 (双対基底) と偏微分作用素, 京都大学数理解析研究所講究録 **1239**, pp. 84–89, 2001.
- [22] 田島慎一: 零次元イデアルのネター作用素について. 京都大学数理解析研究所, 研究集会発表, プレプリント, 2002.
- [23] 田島慎一, 中村弥生: Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析, 京都大学数理解析研究所講究録 **1352**, pp.1–10, 2003.
- [24] 田島慎一: 零次元準素イデアルとネター作用素アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. **1395**, pp. 57–63, 2004.
- [25] 田島慎一: Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. **1431**, pp. 123–136, 2005.
- [26] Tajima, S.: On Noether differentail operators attached to a zero-dimensional primary ideal – shape basis case –. *Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, Kyushu University Press, pp. 357–366, 2005.
- [27] 田島慎一, Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality. 京都大学数理解析研究所講究録 **1509**, pp. 1–23, 2006.
- [28] 田島慎一: Syzygies を用いた Noether 作用素計算アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. **1568**, pp. 81–86, 2007.