

# Hive モデル上の $A$ 型結晶構造

## Crystal structure of type $A$ on hives

東邦大学大学院理学研究科 成澤 翔大

SHOTA NARISAWA

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TOHO UNIVERSITY \*1

東邦大学理学部 白柳 潔

KIYOSHI SHIRAYANAGI

FACULTY OF SCIENCE, TOHO UNIVERSITY \*2

### Abstract

Integrable modules over quantum groups have crystal bases which can be thought of as good bases in some situations. Crystal bases have been understood through realization, such as Young tableaux for quantum groups of type  $A$ . In this paper, we provide a realization by combinatorial objects called hives. Specifically, we determine a crystal structure on a set of the hives for an integral weight. Also, we consider the crystal basis of a module over a quantum group of type  $A$  that is realized by this crystal.

リー環  $\mathfrak{g}$  が埋め込まれた結合代数である包絡環  $U(\mathfrak{g})$  は、生成元と基本関係式によって定義される余可換な Hopf 代数である。一般に、対称化可能な Kac-Moody Lie 環  $\mathfrak{g}$  に付随する量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  とは、包絡環  $U(\mathfrak{g})$  の生成元と基本関係式をパラメータ  $q$  で変形することで得られる非可換非余可換な Hopf 代数である。 $q \rightarrow 1$  の古典極限で、量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  は包絡環  $U(\mathfrak{g})$  に一致する。これは可解格子模型の文脈で、神保道夫と V.G.Drinfeld によって独立に導入された [3][5]。

結晶基底とは、柏原正樹により導入された可積分  $U_q(\mathfrak{g})$ -加群というクラスに対して定義される  $q \rightarrow 0$  における基底である [6][7]。結晶基底は  $q \rightarrow 0$  という特別な場合の基底だが、元の加群の情報が復元できるなどの良い性質を持つ。この対象は具体的な実現を通して調べられている。古典リー環に対応する量子群の場合は、Young 盤による実現が知られている [8]。特に  $A$  型の場合には、半標準盤という Young 盤の集合として実現される。量子群の表現論や結晶基底については、例えば [1][4] を参照されたい。

一方、近年 A.Knutson と T.Tao によって hive という組合せ論的な図形が導入された [9]。これは三角形の頂点に実数を配置した図形であり、適当な条件を課すと半標準盤と一対一に対応することがわかっている。その意味で hive は Young 盤の一般化である。また hive は様々なデータ形式と高い対称性を持ち、Young 盤による議論の見通しを良くするなどの利点がある [2]。

本稿では hive による  $A$  型量子群の結晶基底の実現を述べる。[11] では支配的ウェイトの場合に、Young 盤における Far-Eastern reading という埋め込みの hive における類似を考えることで実現した。またこれが可積分最高ウェイト加群の結晶基底と同型になることを述べた。本稿では、Young 盤における Middle-Eastern reading という埋め込みの hive における類似を考えることで、[11] とは異なる実現を与え、その結晶構造を整ウェイトの場合にまで拡張する。

\*1 7520002n@st.toho-u.jp

\*2 kiyoshi.shirayanagi@is.sci.toho-u.ac.jp

# 1 A型量子群と結晶基底

## 1.1 A型リー環と量子群

ここではリー環、特にA型リー環について復習し、A型の量子群を定義する。以下基礎体を $\mathbb{C}$ とし、結合代数は単位的であるとする。

結合代数 $A$ は $[x, y] = xy - yx$  ( $x, y \in A$ ) でリー積 $[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A$ を入れるとリー環になる。 $\mathbb{C}$ 上 $n$ 次元ベクトル空間 $V$ に対し、 $V$ 上の線形変換全体 $\text{End}(V)$ はこの方法でリー環になる。これを $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ や $\mathfrak{gl}_n$ などとかく。 $V$ の基底をfixすれば、 $V$ 上の線形変換は行列で表されるから $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の $n$ 次元行列全体である。本稿で扱うA型リー環とは、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ のある部分リー環である。**A<sub>n-1</sub>型リー環** $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ は

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{Tr}(X) = 0\}$$

で定義される。ここで $\text{Tr}$ は $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、 $\text{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ で定義される行列のトレースである。以下 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ を単に $\mathfrak{sl}_n$ と書くこともある。添字集合を $I = \{1, 2, \dots, n-1\}$ とする。 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し、 $E_{ij}$ を行列単位とする。このとき、

$$e_i = E_{i, i+1}, \quad f_i = E_{i+1, i}, \quad h_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1} \quad (i \in I)$$

は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ をリー環として生成する。また

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad [h_i, e_j] = \begin{cases} 2e_j & \text{if } i = j \\ -e_j & \text{if } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{if } |i - j| > 1 \end{cases}, \quad [h_i, f_j] = \begin{cases} -2f_j & \text{if } i = j \\ f_j & \text{if } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{if } |i - j| > 1 \end{cases}$$

が成り立つ。

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の部分リー環

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} h_i$$

を $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の**カルタン部分環**とよぶ。 $h = \text{diag}(\lambda_j \mid 1 \leq j \leq n) \in \mathfrak{h}$ とする。各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、線形写像 $\epsilon_i: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\epsilon_i(h) = \lambda_i$ で定める。 $k \in I$ に対して、**基本ウェイト** $\Lambda_k$ を $\Lambda_k = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k$ とする。 $P = \bigoplus_{k \in I} \mathbb{Z} \Lambda_k$ を**整ウェイト格子**、 $P^+ = \bigoplus_{k \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \Lambda_k$ を**支配的ウェイト格子**とよぶ。整ウェイト格子、支配的ウェイト格子の元をそれぞれ**整ウェイト**、**支配的ウェイト**とよぶ。また**随伴表現** $\text{ad}: \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$ を $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$ で定義する。このとき、 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ は $\text{ad}(\mathfrak{h})$ による同時固有空間分解を持つ:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) &= \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \right) \\ &= \left( \bigoplus_{i < j} \mathbb{C} E_{ji} \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C} (E_{ii} - E_{i+1, i+1}) \right) \oplus \left( \bigoplus_{i < j} \mathbb{C} E_{ij} \right). \end{aligned}$$

ここで $\Delta_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i < j\}$ ,  $\Delta_- = -\Delta_+$ である。 $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ を**ルート系**とよび、 $\Delta$ の元を**ルート**とよぶ。特に $i \in I$ に対し、 $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \in \Delta$ を**単純ルート**とよぶ。

リー環の表現論では、そのリー環が埋め込まれた結合代数である包絡環を考えることがよくある。包絡環は余可換なHopf代数の構造をもち、次の普遍性で特徴付けられる。リー環 $\mathfrak{g}$ と結合代数 $A$ に対し、

$\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$  を満たす  $\mathbb{C}$ -線形写像  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow A$  の組  $(A, \rho)$  の中で、次の意味で universal なものを  $\mathfrak{g}$  の包絡環という。すなわち、上の条件を満たす任意の組  $(B, \psi)$  に対し、代数射  $h: A \rightarrow B$  であって、 $\psi = h \circ \rho$  を満たすものが一意に存在するとき  $(A, \rho)$  を  $\mathfrak{g}$  の包絡環といい、 $(U(\mathfrak{g}), \iota)$  とかく。

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \rho \uparrow & \xrightarrow{\exists! h} & B \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\psi} & \end{array}$$

包絡環は生成元と基本関係式による表示をもつ。特に  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  のときには、その包絡環  $U(\mathfrak{sl}_n)$  は以下の表示をもつ。

### 命題 1

$U$  を生成元  $e_i, f_i, h_i$  ( $i \in I$ ) と以下の基本関係式で定義される結合代数とする。このとき、 $U$  は  $U(\mathfrak{sl}_n)$  と同型になる。

$$\begin{aligned} e_i f_j - f_j e_i &= \delta_{ij} h_i, & h_i h_j &= h_j h_i \\ h_i e_j - e_j h_i &= \begin{cases} 2e_i & \text{if } i = j \\ -e_j & \text{if } i - j = \pm 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ h_i f_j - f_j h_i &= \begin{cases} -2f_i & \text{if } i = j \\ f_j & \text{if } i - j = \pm 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ \begin{cases} e_i^2 e_j - 2e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0 & \text{if } i - j = \pm 1 \\ e_i e_j = e_j e_i & \text{else} \end{cases} \\ \begin{cases} f_i^2 f_j - 2f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0 & \text{if } i - j = \pm 1 \\ f_i f_j = f_j f_i & \text{else} \end{cases} \end{aligned}$$

$A_{n-1}$  型リー環  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  に付随する  $A_{n-1}$  型量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$  とは、次の生成元と基本関係式で定義される  $\mathbb{C}(q)$  上の結合代数である。

### 定義 2

$e_i, f_i, K_i^{\pm 1}$  ( $i \in I$ ) を生成元とし、以下を基本関係式とする  $\mathbb{C}(q)$  上の結合代数を  $A_{n-1}$  型量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$  という。

$$\begin{aligned} K_i K_j - K_j K_i &= 0, & K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, \\ K_i e_j K_i^{-1} &= q^{\alpha_i(h)} e_i, & K_i f_j K_i^{-1} &= q^{-\alpha_i(h)} f_i, \\ e_i f_j - f_j e_i &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ e_i^2 e_j - (q + q^{-1}) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 &= 0 & \text{if } |i - j| = 1, \\ f_i^2 f_j - (q + q^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 &= 0 & \text{if } |i - j| = 1, \\ e_i e_j - e_j e_i &= f_i f_j - f_j f_i = 0 & \text{if } |i - j| > 1 \end{aligned}$$

$U_q(\mathfrak{sl}_n)$  は非可換かつ非余可換な Hopf 代数の構造を持つ。これは古典極限  $q \rightarrow 1$  を考えると、 $U(\mathfrak{sl}_n)$  と一致する。

## 1.2 A 型量子群の結晶基底

$U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -加群は、ウェイト空間分解をもち、生成元  $e_i, f_i$  の作用が局所幕ゼロであるとき**可積分加群**という。このクラスの加群は  $q \rightarrow 0$  で良い振る舞いをする結晶基底という基底を持つ。これは  $q \rightarrow 0$  という特殊化された状況での基底だが、元の加群の情報をよく復元できる。詳しいことは例えば [7] を参照せよ。ここでは結晶基底の組合せ論的性質を抽出した結晶という概念を考える。

### 定義 3

集合  $B$  に対し、次を満たす写像  $\text{wt} : B \rightarrow P$ ,  $e_i, f_i : B \cup \{0\} \rightarrow B \cup \{0\}$ ,  $\varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  ( $i \in I$ ) が存在するとき、 $B$  を  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -**結晶**とよぶ。  $b \in B$  とする。

- (1)  $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \text{wt}(b)(h_i)$
- (2)  $\text{wt}(f_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i$  if  $f_i b \in B$
- (3)  $\text{wt}(e_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i$  if  $e_i b \in B$
- (4)  $\varepsilon_i(f_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$ ,  $\varphi_i(f_i b) = \varphi_i(b) - 1$  if  $f_i b \in B$
- (5)  $\varepsilon_i(e_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$ ,  $\varphi_i(e_i b) = \varphi_i(b) + 1$  if  $e_i b \in B$
- (6)  $f_i b = b' \iff b = e_i b'$  for  $b, b' \in B, i \in I$
- (7)  $\varphi_i(b) = -\infty \implies f_i b = e_i b = 0$  for  $b \in B$

結晶の同型は次で定義する。簡単に言えば、結晶構造を保存する全単射が存在するということである。

### 定義 4

$B_1, B_2$  を  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶とする。  $B_1$  から  $B_2$  への射  $\Psi : B_1 \rightarrow B_2$  とは、写像  $\Psi : B_1 \cup \{0\} \rightarrow B_2 \cup \{0\}$  で

- (1)  $\text{wt}(\Psi(b)) = \text{wt}(b)$ ,  $\varepsilon_i(\Psi(b)) = \varepsilon_i(b)$ ,  $\varphi_i(\Psi(b)) = \varphi_i(b)$  if  $b \in B_1, \Psi(b) \in B_2$
- (2)  $f_i \Psi(b) = \Psi(f_i b)$ ,  $e_i \Psi(b) = \Psi(e_i b)$  if  $\Psi(b), \Psi(e_i b), \Psi(f_i b) \in B_2$  for  $b \in B_1$
- (3)  $\Psi(0) = 0$

を満たすものをいう。射  $\Psi : B_1 \rightarrow B_2$  に対し、写像  $\Psi : B_1 \cup \{0\} \rightarrow B_2 \cup \{0\}$  が単射のとき**埋め込み**、全単射のとき**同型射**とよぶ。同型射  $\Psi : B_1 \rightarrow B_2$  が存在するとき、 $B_1$  と  $B_2$  は  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶として**同型**であるといい、 $B_1 \cong B_2$  とかく。

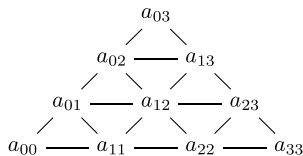
結晶基底は具体的な実現を通して理解されている。A 型の場合には、例えば、次の Young 図形による実現が知られている。  $n \in \mathbb{N}$  とする。  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ( $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) が  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$  を満たすとき、 $\lambda$  を  $n$  の **composition** とよぶ。 composition  $\lambda$  が  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  を満たすとき、 $n$  の **partition** とよぶ。  $n$  の partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対応する Young 図形  $T$  を考える。  $T$  の  $n$  個の箱に 1 から  $n$  までの自然数を左から右に進むにつれて広義に増加し、上から下に進むにつれて狭義に増加するように書き入れたとき、 $T$  を型  $\lambda$  の**半標準盤**という。

$\text{Par}(n)$  を  $n$  の分割全体とする。  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \text{Par}(n)$  に対し、  $\lambda \mapsto \lambda_1 \epsilon_1 + \dots + \lambda_n \epsilon_n$  とすると、これは全単射  $\text{Par}(n) \rightarrow P^+$  を与える。  $\text{SStab}(\lambda)$  を型  $\lambda$  の半標準盤全体の集合とする。このとき最高ウェイト  $\lambda$  の可積分最高ウェイト  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -加群の結晶基底は  $\text{SStab}(\lambda)$  で実現される [8]。

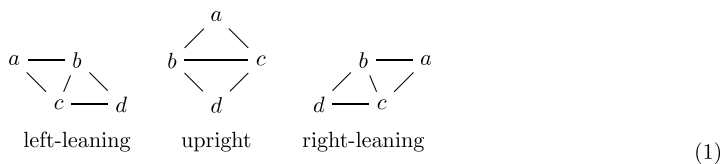
## 2 Hive

ここでは hive について必要な範囲で解説する．より詳しいことは [2] を参照せよ．

一辺の長さが  $n$  の正三角形に一辺が 1 の正三角形を敷き詰めたグラフを  **$n$ -hive graph** という． $n$ -hive graph の  $(n+1)(n+2)/2$  個の頂点に実数をラベリングしたものを  $n$ -hive graph の *vertex representation* とよぶ．下の例は 3-hive graph の vertex representation である．



$n$ -hive graph に現れる (1) の図形を **elementary rhombus** という．それぞれ *left-leaning*, *upright*, *right-leaning rhombus* とよぶ．

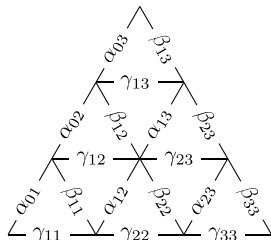


上の状況で，不等式

$$b + c \geq a + d \quad (2)$$

を **rhombus inequality** とよぶ．

$n$ -hive graph の各辺に実数をラベリングしたものを  $n$ -hive graph の *edge representation* という．



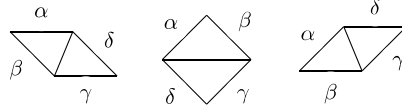
edge representation に現れる以下の図形



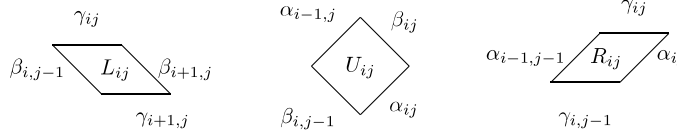
を **elementary triangle** とよび， $\alpha + \beta = \gamma$  を **triangle condition** という．上のラベリングで，vertex representation の  $n$ -hive graph に対し，

$$\alpha_{ij} = a_{ij} - a_{i,j-1}, \quad \beta_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j}, \quad \gamma_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j-1} \quad (3)$$

とすれば, edge representation が得られる. このとき rhombus inequality は, (4) のラベリングで  $\alpha \geq \gamma$ ,  $\beta \geq \delta$  と同値である.


(4)

$n$ -hive graph の各 elementary rhombus に対して,  $L_{ij}, U_{ij}, R_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) を次のように定める.


(5)

$$L_{ij} = \beta_{i,j-1} - \beta_{i+1,j} = \gamma_{ij} - \gamma_{i+1,j}, \quad (6)$$

$$U_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{i-1,j} = \beta_{ij} - \beta_{i,j-1}, \quad (7)$$

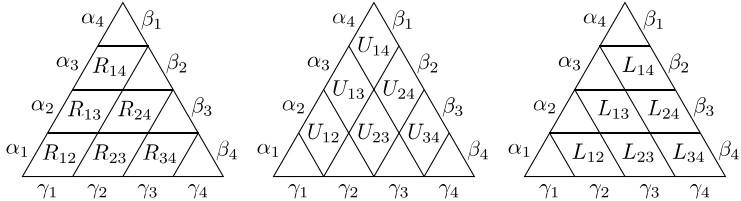
$$R_{ij} = \alpha_{i-1,j-1} - \alpha_{ij} = \gamma_{i,j-1} - \gamma_{ij}. \quad (8)$$

$L_{ij}, U_{ij}, R_{ij}$  をそれぞれ left-leaning, upright, right-leaning rhombus に対応した **gradient** とよぶ. rhombus inequality はそれぞれ

$$L_{ij} \geq 0, \quad U_{ij} \geq 0, \quad R_{ij} \geq 0 \quad (9)$$

に対応する.

$n$ -hive graph の edge labelling に gradient のタイプを 1 つ指定したものを  $n$ -hive graph の *gradient representation* とよぶ.  $n = 4$  の場合を以下に示す.


(10)

構成から

$$\gamma_k = \left( \alpha_k + \sum_{i=1}^{k-1} U_{ik} \right) + \left( \beta_k - \sum_{j=k+1}^n U_{kj} \right) \quad (11)$$

がわかる. 以下  $i > j$  のとき  $U_{ij} = 0$  また

$$U_{kk} = \gamma_k - \sum_{j=k+1}^n U_{jk} \quad (12)$$

とする. vertex labelling の  $n$ -hive graph の各頂点の値を整数に制限したものを vertex labelling の  **$n$ -integer hive graph** とよぶ.

### 定義 5

サイズ  $n$  の **K-hive** とは、次を満たす  $n$ -integer hive graph のことをいう。

- (1) 左上の境界の頂点のラベリングは 0 である。すなわち (10) の表示で  $\alpha_k = 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ) となる。
- (2) left-leaning, upright rhombus は rhombus inequality を満たす。すなわち (10) の表示で  $U_{ij} \geq 0$ ,  $L_{ij} \geq 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ) を満たす。

本稿では gradient representation の upright に対応した形式の hive をよく用いる。この形式を用いたとき、hive  $H$  は境界の辺と gradient  $(U_{kl})_{k < l}$  で特徴づけることができることに注意する。すなわち  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  としたとき、(10) の upright gradient representation の hive を 4 つ組  $(\alpha, \beta, \gamma, (U_{kl})_{k < l})$  と同一視する。

$n \in \mathbb{N}$  の composition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対し、 $\lambda \mapsto \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$  は、 $n$  の composition 全体から整ウェイト格子への全単射を与える。特に  $\lambda$  が partition の場合には、 $n$  の partition 全体から支配的ウェイト格子への全単射になる。

### 定義 6

$\lambda \in P^+$ ,  $\mu \in P$  とする。上の方法で  $\lambda$  を partition,  $\mu$  を composition とみなす。

$$\mathcal{H}^{(n)}(0, \lambda, \mu) = \{H = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l}) \mid \forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\} (k < l), U_{kl} \geq 0, L_{kl} \geq 0\},$$

$$\mathbb{H}(\lambda) = \bigcup_{\mu} \mathcal{H}^{(n)}(0, \lambda, \mu)$$

と定義する。ここで  $\mathbb{H}(\lambda)$  の  $\mu$  は  $n$  の composition 全体を動く。

定義より、 $\lambda \in P^+$  に対し  $\mathbb{H}(\lambda)$  は右上の辺が  $\lambda$  の K-hive 全体である。 $T$  を  $n \in \mathbb{N}$  の partition に対応する半標準盤とする。各  $1 \leq i \leq n$  に対し、 $\mu_i$  を  $T$  の中に現れる  $i$  の数とする。 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  を  $T$  のウェイトとよぶ。K-hive は以下の方法で半標準盤と一対一に対応する。

### 命題 7 ([10])

$n \in \mathbb{N}$  とする。 $\lambda$  を  $n$  の partition,  $\mu$  を  $n$  の composition とする。 $\text{SStab}(\lambda, \mu)$  を型  $\lambda$ , ウェイト  $\mu$  の半標準盤全体の集合とする。

$$f^{(n)}: \text{SStab}(\lambda, \mu) \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}(0, \lambda, \mu)$$

を  $T \in \text{SStab}(\lambda, \mu)$  に対し  $f^{(n)}(T) = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l})$  とすると、 $f^{(n)}$  は全単射になる。ここで

$$U_{ij} = T \text{ の } i \text{ 行目の } j \text{ の個数}$$

である。

$\lambda$  が整ウェイトの場合には、hive の集合を以下のように定義する。

### 定義 8

$\lambda \in P$ ,  $\mu \in P$  とする。上の方法で  $\lambda, \mu$  を composition とみなす。このとき、

$$\mathcal{H}^{(n)}(0, \lambda, \mu) = \{H = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l}) \mid \forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\} (k < l), U_{kl} \geq 0\},$$

$$\mathbb{H}(\lambda) = \bigcup_{\mu} \mathcal{H}^{(n)}(0, \lambda, \mu)$$

と定義する。ここで  $\mathbb{H}(\lambda)$  の  $\mu$  は  $n$  の composition 全体を動く。

### 3 $\mathbb{H}(\lambda)$ 上の結晶構造

ここでは  $\mathbb{H}(\lambda)$  上の結晶構造について述べる．また  $\mathbb{H}(\lambda)$  を結晶基底としてもつような加群について考える．

#### 定義 9

$H = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l}) \in \mathbb{H}(\lambda)$  に対して,  $H$  のウェイト  $\text{wt}: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow P$  を

$$\text{wt}(H) = \mu_1 \epsilon_1 + \cdots + \mu_n \epsilon_n$$

で定義する．

#### 定義 10

$H = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l}) \in \mathbb{H}(\lambda)$  とする．  $1 \leq s \leq n$  に対して,  $\varphi_i^s: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を次のように定義する．

$$\varphi_i^s(H) = \max(\varphi_i^{s-1}(H) + U_{s,i} - U_{s+1,i+1}, 0)$$

ただし  $\varphi_i^0(H) = 0$  とする． このとき,  $\varphi_i: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を次のように定義する．

$$\varphi_i(H) = \varphi_i^i(H).$$

また  $1 \leq s \leq n$  に対して,  $\varepsilon_i^s: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を次のように定義する．

$$\varepsilon_i^s(H) = \max(\varepsilon_i^{s-1}(H) + U_{n+1-s,i+1} - U_{n-s,i}, 0)$$

ただし,  $\varepsilon_i^0(H) = 0$  とする． このとき,  $\varepsilon_i: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を次のように定義する．

$$\varepsilon_i(H) = \varepsilon_i^{n-i}(H).$$

#### 定義 11

$H = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l}) \in \mathbb{H}(\lambda)$  とする．  $i \in I$  に対し,  $f_i: \mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\}$  を次のように定義する．  $\varphi_i(H) = 0$  のとき,  $f_i(H) = 0$  とする．  $\varphi_i(H) > 0$  のとき,  $f_i(H) = (\alpha, \beta, \gamma, (U'_{kl})_{k < l})$  とする :

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \lambda$$

$$\gamma = \mu_1 \epsilon_1 + \cdots + (\mu_i - 1) \epsilon_i + (\mu_{i+1} + 1) \epsilon_{i+1} + \cdots + \mu_n \epsilon_n,$$

$$U'_{kl} = \begin{cases} U_{kl} - 1 & \text{if } k = i_f, l = i \\ U_{kl} + 1 & \text{if } k = i_f, l = i + 1 \\ U_{kl} & \text{else} \end{cases}$$

ここで  $i_f = \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \forall l > k, \varphi_i^l(H) \geq \varphi_i^k(H) > 0\}$  である．

次に  $i \in I$  に対し,  $e_i: \mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\}$  を次のように定義する．  $\varepsilon_i(H) = 0$  のとき,  $e_i(H) = 0$



とする.  $\varepsilon_i(H) > 0$  のとき,  $e_i(H) = (\alpha, \beta, \gamma, (U'_{kl})_{k < l})$  とする :

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \lambda$$

$$\gamma = \mu_1 \epsilon_1 + \cdots (\mu_i + 1) \epsilon_i + (\mu_{i+1} - 1) \epsilon_{i+1} + \cdots + \mu_n \epsilon_n$$

$$U'_{kl} = \begin{cases} U_{kl} + 1 & \text{if } k = n + 1 - i_e, l = i \\ U_{kl} - 1 & \text{if } k = n + 1 - i_e, l = i + 1 \\ U_{kl} & \text{else} \end{cases}$$

ここで  $i_e = \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \forall l > k, \varepsilon_i^l(H) \geq \varepsilon_i^k(H) > 0\}$  である.

### 命題 12

$\lambda \in P$  とする.  $\mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\}$  は  $f_i, e_i (i \in I)$  に関して不変である.

**証明**  $H = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l}) \in \mathbb{H}(\lambda)$  とする.  $f_i H \in \mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\}$  を示す.  $f_i H = (0, \lambda, \mu', (U'_{kl})_{k < l})$  とする.  $f_i H = 0$  なら明らか.  $f_i H \neq 0$  とする.  $\mathbb{H}(\lambda)$  の定義より, 任意の  $k < l$  に対して  $U'_{kl} \geq 0$  を示せばよい.  $f_i H \neq 0$  より,  $i_f = \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \forall l \geq k, \varphi_i^l(H) \geq \varphi_i^k(H) > 0\}$  が存在する. このとき定義 11 より

$$U'_{kl} = \begin{cases} U_{kl} - 1 & \text{if } k = i_f, l = i \\ U_{kl} + 1 & \text{if } k = i_f, l = i + 1 \\ U_{kl} & \text{else} \end{cases}$$

だから  $(k, l) \neq (i_f, i)$  なら  $U'_{kl} \geq 0$  は明らか.  $U'_{i_f, i} \geq 0$  を示す.  $i_f$  の取り方より  $\varphi_i^{i_f} > 0, \varphi_i^{i_f-1} = 0$  だから

$$\begin{aligned} \varphi_i^{i_f}(H) &= \varphi_i^{i_f-1} + U_{i_f, i} - U_{i_f+1, i+1} \\ &= U_{i_f, i} - U_{i_f+1, i+1} > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって  $U_{i_f, i} > 0$  を得る. したがって,  $U'_{i_f, i} = U_{i_f, i} - 1 \geq 0$  が成り立つ.

同様の議論で  $e_i H \in \mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\}$  がわかる. ■

$\lambda$  が支配的ウェイトの場合にも同様の議論で次の命題を得る.

### 命題 13

$\lambda \in P^+$  とする.  $\mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\}$  は  $f_i, e_i (i \in I)$  に関して不変である.

上の写像で  $\mathbb{H}(\lambda)$  上の結晶構造が定まる.

### 定理 14

$\lambda \in P$  とする.  $\mathbb{H}(\lambda)$  は上の  $\text{wt}: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow P, \varepsilon_i, \varphi_i: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, e_i, f_i: \mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{H}(\lambda) \cup \{0\}$  で  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶となる.

**証明**  $\mathbb{H}(\lambda)$  上の写像  $\text{wt}, f_i, e_i, \varphi_i, \varepsilon_i$  が定義 3 の (1) から (7) を満たしていることを確認すればよい.  $H = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l}) \in \mathbb{H}(\lambda)$  とする.

(1) を示す.  $f_i H = 0$  とする. 定義 11 より  $\varphi_i(H) = 0$ , 特に  $\varphi_i^i = 0$  だから  $\sum_{k=1}^i (U_{ki} - U_{k+1,i+1}) < 0$  が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i(H) &= \max(\varepsilon_i^{n-i-1} + U_{2,i+1} - U_{1i}, 0) \\
 &= \sum_{k=n-i}^{n-1} (U_{n+1-k,i+1} - U_{n-k,i}) \\
 &= \sum_{k=1}^i (U_{k+1,i+1} - U_{ki}) \\
 &= \sum_{k=1}^i U_{k+1,i+1} - \sum_{k=1}^i U_{ki} \\
 &= \mu_{i+1} - \mu_i \\
 &= -\text{wt}(H)(h_i).
 \end{aligned}$$

すなわち  $\varphi_i(H) = \text{wt}(H)(h_i) - \varepsilon_i(H)$  が成り立つ.

$f_i H \neq 0$  とする. このとき  $i_f = \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \forall l \geq k, \varphi_i^l(H) \geq \varphi_i^k(H) > 0\}$  が存在する.  $i_f$  の取り方より  $\varphi_i(H) = \sum_{k=i_f}^i (U_{ki} - U_{k+1,i+1})$  また  $\sum_{k=1}^{i_f-1} (U_{ki} - U_{k+1,i+1}) < 0$  が成り立つ. よって定義 10 より  $\varepsilon_i(H) = \sum_{k=1}^{i_f-1} (U_{k+1,i+1} - U_{ki})$  が成り立つ.

したがって

$$\begin{aligned}
 \varphi_i(H) - \varepsilon_i(H) &= \sum_{k=i_f}^i (U_{ki} - U_{k+1,i+1}) - \sum_{k=1}^{i_f-1} (U_{k+1,i+1} - U_{ki}) \\
 &= \sum_{k=1}^i U_{ki} - \sum_{k=1}^i U_{k+1,i+1} \\
 &= \mu_i - \mu_{i+1} \\
 &= \text{wt}(H)(h_i)
 \end{aligned}$$

を得る.

(2) を示す. 定義 9 より  $\text{wt}(H) = \mu$  である. また定義 11 より,

$$\text{wt}(f_i H) = \mu_1 \epsilon_1 + \dots + (\mu_i - 1) \epsilon_i + (\mu_{i+1} + 1) \epsilon_{i+1} + \dots + \mu_n \epsilon_n$$

である. したがって

$$\begin{aligned}
 \text{wt}(H) - \alpha_i &= (\mu_1 \epsilon_1 + \dots + \mu_n \epsilon_n) - (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) \\
 &= \mu_1 \epsilon_1 + \dots + (\mu_i - 1) \epsilon_i + (\mu_{i+1} + 1) \epsilon_{i+1} + \dots + \mu_n \epsilon_n \\
 &= \text{wt}(f_i H)
 \end{aligned}$$

が成り立つ.

(2) と同様の議論で, (3) がわかる.

(4) を示す. 仮定より  $f_i H \neq 0$  だから,  $i_f = \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \forall l \geq k, \varphi_i^l(H) \geq \varphi_i^k(H) > 0\}$  が存在する. このとき (1) と同様の議論で  $\varphi_i(H) = \sum_{k=i_f}^i (U_{ki} - U_{k+1,i+1})$ ,  $\varepsilon_i(H) = \sum_{k=1}^{i_f-1} (U_{k+1,i+1} - U_{ki})$  となることに注意する.

$\varphi_i(f_i H) = \varphi_i(H) - 1$ を示す. 仮定より  $\varphi_i(H) > 0$ . また  $f_i$  の定義から  $\sum_{k=i_f}^i (U'_{ki} - U'_{k+1,i+1}) > 0$  また  $\sum_{k=1}^{i_f-1} (U'_{k+1,i+1} - U'_{ki}) > 0$  が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}\varphi_i(f_i H) &= \sum_{k=i_f}^i (U'_{ki} - U'_{k+1,i+1}) \\ &= \sum_{k=i_f+1}^i (U_{ki} - U_{k+1,i+1}) + (U_{i_f,i} - 1) - U_{i_f+1,i+1} \\ &= \sum_{k=i_f}^i (U_{ki} - U_{k+1,i+1}) - 1 \\ &= \varphi_i(H) - 1\end{aligned}$$

を得る.

$\varepsilon_i(f_i H) = \varepsilon_i(H) + 1$ を示す.  $\varepsilon_i$  の定義と上の注意より

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(f_i H) &= \sum_{k=1}^{i_f-1} (U'_{k+1,i+1} - U'_{ki}) \\ &= \sum_{k=1}^{i_f-2} (U_{k+1,i+1} - U_{ki}) + (U_{i_f,i+1} + 1) - U_{i_f-1,i} \\ &= \varepsilon_i(H) + 1\end{aligned}$$

を得る.

(4) と同様の議論で (5) がわかる.

(6) を示す.  $f_i H = H^1$ ,  $H^1 = (0, \lambda^1, \mu^1, (U^1_{kl})_{k < l})$  とする. ここで定義より

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= \lambda, \\ \mu^1 &= \mu_1 \epsilon_1 + \cdots + (\mu_i - 1) \epsilon_i + (\mu_{i+1} + 1) \epsilon_{i+1} + \cdots + \mu_n \epsilon_n, \\ U^1_{kl} &= \begin{cases} U_{kl} - 1 & \text{if } k = i_f, l = i \\ U_{kl} + 1 & \text{if } k = i_f, l = i + 1 \\ U_{kl} & \text{else} \end{cases}\end{aligned}$$

である. 定義 10 より  $\varphi_i^{i_f-1} = 0$  だから  $\sum_{k=1}^{i_f-1} (U_{ki} - U_{k+1,i+1}) < 0$  が成り立つ. このとき, (4) と同様の議論で

$$\varepsilon_i(H^1) = \sum_{k=1}^{i_f-1} (U^1_{n+1-k,i+1} - U^1_{n-k,i}) = \sum_{k=n+1-i_f}^{n-i} (U^1_{n+1-k,i+1} - U^1_{n-k,i})$$

が成り立つ. また再び (4) と同様の議論によって  $\sum_{k=n+1-i_f}^{n-i_f} U^1_{n+1-k,i+1} - U^1_{n-k,i} < 0$  が成り立つことがわかる. すなわち  $\min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \varepsilon_i^l(H) \geq \varepsilon_i^k(H) > 0, \forall l \geq k\} = n + 1 - i_f$  となる. よって

$e_i H^1 = (0, \lambda^2, \mu^2, (U_{kl}^2)_{k < l})$  とすると

$$\begin{aligned} U_{kl}^2 &= \begin{cases} U_{kl}^1 + 1 & \text{if } k = i_f, l = i \\ U_{kl}^1 - 1 & \text{if } k = i_f, l = i + 1 \\ U_{kl}^1 & \text{else} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (U_{kl} - 1) + 1 & \text{if } k = i_f, l = i \\ (U_{kl} + 1) - 1 & \text{if } k = i_f, l = i + 1 \\ U_{kl} & \text{else} \end{cases} \\ &= U_{kl} \end{aligned}$$

を得る. また定義から  $\lambda^2 = \lambda, \mu^2 = \mu$  となる. よって,  $e_i H^2 = H$  が成り立つ.

定義より  $\varphi_i(H) \neq -\infty$  だから (7) は明らか. ■

$\lambda$  が支配的ウェイトの場合には,  $\mathbb{H}(\lambda)$  は可積分最高ウェイト加群の結晶基底の実現になっている. 特に,  $\mathbb{H}(\lambda)$  の最高ウェイトベクトルは  $H_\lambda := (0, \lambda, \lambda, (0, \dots, 0))$  である.

#### 補題 15

$\lambda$  を支配的ウェイトとする.  $H_\lambda \in \mathbb{H}(\lambda)$  を  $H_\lambda = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l})$  とする. このとき次が成り立つ.  $\mu = \lambda, U_{ij} = 0$  のとき,  $H_\lambda$  は最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイトベクトルである.

$T$  を半標準盤とする.  $T$  の  $i$  番目の行  $R_i$  に対し,  $R_i$  に書き込まれた数字を左から右に読み並べたものを  $R_i$  の語とよび,  $\text{word}(R_i)$  とかく. このとき  $T$  の語  $\text{word}(T)$  を  $\text{word}(R_1) \cdots \text{word}(R_n)$  で定義する.

#### 定理 16

$\lambda \in P^+$  とする. 可積分最高ウェイト加群  $V(\lambda)$  の結晶基底を  $\mathcal{B}(\lambda)$  とする. このとき次が成り立つ

$$\mathcal{B}(\lambda) \cong \mathbb{H}(\lambda)$$

**証明** 可積分最高ウェイト加群  $V(\lambda)$  の結晶基底  $\mathcal{B}(\lambda)$  は  $\text{shape } \lambda$  の半標準盤全体  $\text{SStab}(\lambda)$  と同型であるから (節 1.2 後半, [8] 参照),  $\mathbb{H}(\lambda)$  と  $\text{SStab}(\lambda)$  が同型であることを示せばよい.

$H \in \mathbb{H}(\lambda), H = (0, \lambda, \mu, (U_{kl})_{k < l})$  とする. 命題 7 より,  $H$  は型  $\lambda$ , ウェイト  $\mu$  の半標準盤  $T$  と一対一に対応する. したがって,  $\Psi: \mathbb{H}(\lambda) \rightarrow \text{SStab}(\lambda)$  を命題 7 の全単射とすると,  $\Psi$  が  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -結晶の射であることを示せばよい.

定義より  $\text{wt}(H) = \text{wt}(T) = \mu$  だから  $\Psi(\text{wt}(H)) = \text{wt}(\Psi(H))$  が成り立つ.

$\Psi(f_i H) = f_i \Psi(H)$  を示す. 補題 15 より  $H_\lambda = (0, \lambda, \lambda, (0, \dots, 0))$  は最高ウェイト  $\lambda$  の最高ウェイトベクトルであるから  $H = H_\lambda$  の場合を考えればよい.  $T_\lambda = \Psi(H_\lambda)$  とすると,  $T$  は型  $\lambda$ , ウェイト  $\lambda$  の半標準盤である. 特に  $T_\lambda$  の  $\text{word}$  は  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$  であることに注意する.  $H_\lambda$  の定義より  $\varphi_i(H_\lambda) = U_{ii} - U_{i+1, i+1} > 0$ , 特に  $i_f = i$  を得る. よって  $f_i H_\lambda = (0, \lambda', \mu', (U'_{kl})_{k < l})$  とすると

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda \\ \mu' &= \lambda_1 \epsilon_1 + \cdots + (\lambda_i - 1) \epsilon_i + (\lambda_{i+1} + 1) \epsilon_{i+1} + \cdots + \lambda_n \epsilon_n \\ U'_{kl} &= \begin{cases} U_{kl} - 1 & \text{if } k = i, l = i \\ U_{kl} + 1 & \text{if } k = i, l = i + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ. 命題 7 より  $\Psi(f_i H_\lambda) = T'$  とすると,  $T'$  は型  $\lambda$ , ウェイト  $\mu$  の半標準盤であり, その語は  $1^{\lambda_1} \dots i^{\lambda_i-1} (i+1)^{\lambda_{i+1}+1} \dots n^{\lambda_n}$  となる. signature rule [8] よりこれは  $f_i T_\lambda$  に一致する. すなわち  $\Psi(f_i H_\lambda) = f_i \Psi(H_\lambda)$  が成り立つ.

同様の議論で  $\Psi(e_i H) = e_i \Psi(H)$  がわかる.

次に  $\varphi_i(H) = \varphi_i(\Psi(H))$  を示す.  $H = H_\lambda$  のときを考えればよい.  $H_\lambda$  の定義より,  $k < l$  に対して  $U_{kl} = 0$  だから  $\varphi_i(H_\lambda) = U_{ii} - U_{i+1,i+1} = \mu_i - \mu_{i+1}$  である. signature rule よりこれは  $\varphi_i(T_\lambda)$  と一致する.

同様の議論で  $\Psi(\varepsilon_i(H)) = \varepsilon_i(\Psi(H))$  がわかる. ■

$\lambda$  が整ウェイトの場合でも  $\mathbb{H}(\lambda)$  は同様の結晶構造をもつが, それと同型な結晶基底をもつ加群があるかはわかっていない.

#### 問題 1

$\lambda \in P$  とする. このとき,  $\mathbb{H}(\lambda)$  と同型な結晶基底をもつ  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -加群は存在するか.

整ウェイト  $\lambda$  に対し, extremal weight module  $V(\lambda)$  という可積分  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -加群が定まる. これは  $\lambda$  が支配的ウェイトのときには, 可積分最高ウェイト加群と一致する. その意味で, extremal weight module は可積分最高ウェイト加群の一般化である. いくつかの例で extremal weight module の結晶基底が  $\mathbb{H}(\lambda)$  と同型になることを数式処理システムによって確認しているが, 一般の成立の証明には至っていない.

## 4 おわりに

本稿では, 整ウェイト  $\lambda$  に対して  $\mathbb{H}(\lambda)$  上の結晶構造を定義した. この方法は [11] とは異なる方法であり, この構成をとることで支配的ウェイトから整ウェイトまで結晶構造を拡張した. またこの構造は, 支配的ウェイトの場合には, 可積分最高ウェイト加群の結晶基底の実現になっている. その意味で Young 盤による実現の一般化となっている.

$\lambda$  が整ウェイトの場合に  $\mathbb{H}(\lambda)$  と同型な結晶基底をもつ加群が存在するか. また存在すればその加群は何かという問題は今後の課題である.

## Acknowledgements

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

## 参考文献

- [1] S. Ariki. *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, Vol. 26 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Translated from the 2000 Japanese edition and revised by the author.
- [2] O. Azenhas, R.C. King, and I. Terada. The involutive nature of the Littlewood-Richardson commutativity bijection. *arXiv preprint arXiv:1603.05037*, 2016.
- [3] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 283, No. 5, pp. 1060–1064, 1985.

- [4] J. Hong and S. Kang. *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Vol. 42 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [5] M. Jimbo. A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, Vol. 10, No. 1, pp. 63–69, 1985.
- [6] M. Kashiwara. Crystalizing the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 133, No. 2, pp. 249–260, 1990.
- [7] M. Kashiwara. On crystal bases of the  $Q$ -analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math. J.*, Vol. 63, No. 2, pp. 465–516, 1991.
- [8] M. Kashiwara and T. Nakashima. Crystal graphs for representations of the  $q$ -analogue of classical Lie algebras. *J. Algebra*, Vol. 165, No. 2, pp. 295–345, 1994.
- [9] A. Knutson and T. Tao. The honeycomb model of  $GL_n(\mathbb{C})$  tensor products. I. Proof of the saturation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 12, No. 4, pp. 1055–1090, 1999.
- [10] S. Narisawa and K. Shirayanagi. Bender-Knuth transformation from a perspective of hives. 数理解析研究所講究録, 2138, Computer Algebra – Theory and its Applications, pp. 138–146, 2018.
- [11] S. Narisawa and K. Shirayanagi. Crystal bases of irreducible highest weight modules over a quantum group of type  $a$  and the hive model. 数理解析研究所講究録, 2138, Computer Algebra – Theory and its Applications, pp. 149–157, 2019.