RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B85 (2021), 117–142

アル=フワーリズミー数学研究 I
Studies in Mathematics of al-Ḫwārizmī, Part I

徳武太郎
Taro Tokutake*

Abstract

This paper provides a detailed study of the famous text on algebra, *Kitāb al-ǧabr wa'l-muqābala*, composed by al-Ḫwārizmī who was employed at the "House of Wisdom" (*Bayt al-ḥikma*) of al-Ma'mūn around the first half of the ninth century. It consists of a Japanese translation of a chapter entitled "Measurement" (*misāḥa*) along with a mathematical commentary.

§1. はじめに

アル=フワーリズミー（al-Ḫwārizmī, 9 世紀前半活躍）[1]は，初期アラビアの数学・天文学を代表する学者の一人である．彼の正確な生没年は分かっていないが，アッバース朝第 7 代カリフのアル=マームーン（al-Ma'mūn, 在位 813–833 年）に仕え，首都バグダードに設けられた「知恵の館」（Bayt al-ḥikma）と呼ばれる学術研究センターで活躍したことが知られている．フワーリズミーの数学の著作のうち，アラビア語原典が現存するのは『ジャブルとムカーバラ』（*Kitāb al-ǧabr wa'l-muqābala*）のみである．同書の歴史的意味は，ヨーロッパの代数学の出発点となったことであり,[2]アラビア語文化圏の数学史においても同様の役割を果たしたことである．

Rosen [1831] はオックスフォード大学ボドリアン図書館所蔵の写本（Oxford, Bod., Hunt 214, fols. 1^v–34^r，以下オックスフォード写本）に基づき,『ジャブルとムカーバラ』のテキ

Received March 5, 2021.
2020 Mathematics Subject Classication(s): 01A45
Key Words: *Kitāb al-ǧabr wa'l-muqābala*, al-Ḫwārizmī, "Measurement" (*misāḥa*)
This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
*Kyoto University, 606-8501 Japan
email: `tokutake.taro.36w@st.kyoto-u.ac.jp`

[1] 以下，単にフワーリズミーと表記する．

[2] ヨーロッパではロベルトゥス・カストレンシス（Robertus Castrensis, 12 世紀中頃活躍），ゲラルドゥス・クレモネンシス（Gheraldus Cremonensis, 1114–87 年），ウルヘルムス・デ・ルナ（Wilhelmus de Luna, 13 世紀）がラテン語に翻訳した．

ストを英訳とともに出版した．Gandz [1932: 67–84] は「測量」（misāḥa）という幾何学を扱った章について，Rosen のテキストの問題点を指摘しつつテキストを校訂し，英訳と共に発表した．Mušarrafa and Aḥmad [1939] は，Rosen と同様にオックスフォード写本だけに基づき，テキストをカイロで出版した（以下，カイロ版）．鈴木 [1987: 331–41] はカイロ版を底本として，方程式の分類とその幾何学的証明を扱った章を和訳した．Rashed [2007][2009] はオックスフォード写本に加えて他の 4 種類の写本[3]に基づきテキストを校訂し，仏語および英語に全訳した.[4]

これまでに『ジャブルとムカーバラ』を原典から和訳した研究は鈴木 [1987] の部分訳しかない.[5]そこで本稿では，未だに和訳されていない「測量」の章を原文に忠実に和訳し，数学的内容の理解を補助するために，原則として段落ごとに Note を付す．Gandz [1932: 67–85] に基づくと，同章は次の 13 トピックで構成される．ただし，トピック名には以下の和訳と Note で採用した語を用いる．

No.	トピック	L_{ed} の頁数, 行数
1)	測量	203, 2
2)	三辺形	203, 15
3)	目形（菱形）	203, 17
4)	円	205, 1
5)	円の切片	205, 14
6)	角柱・円柱	207, 11
7)	角錐・円錐	207, 15
8)	三平方の定理	207, 17
9)	5 種類の四辺形	211, 2
10)	3 種類の三辺形	215, 7
11)	円	225, 5
12)	錐の柱（角錐台）・円錐	227, 1
13)	二等辺三辺形に内接する正方形	229, 1

[3] Rashed は D. E. Smith によりオックスフォード写本から転写された写本（New York, Columbia, Smith Or. 40）を所有するが，校訂には使用していない（Rashed [2009: 86] 参照）.

[4] その他の先行訳の書誌情報を以下に列挙する．ロシア語訳：Russian Translation by B. A. Rosenfeld. *Matematicheskie Traktaty.* Tashkent, 1983, 20–142. スペイン語訳：*El libro del álgebra: Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi.* traducción, introducción y notas de Ricardo Moreno Castillo. Tres Cantos: Nívola, 2009. ウズベク語訳：*Muhammad ibn Musa Khorezmiy, Tanlangan asarlar: matematika, astronomiya, geografiya.* Tarjima, maqola, izohlar (tr. and comm. by) A. Akhmedovniki. Toshkent, 1983. ペルシア語訳：*Ketāb ǧabr va muqābale.* Ḫvārezmī, Mohammad ebn-e Mūsā. Trans. by Husain Ḫidiw Ǧam. Tehrān: Šerkat-e Sehāmī-ye Entešārāt-e Ḫvārezmī, 1970. タジク語訳：*Muhammad ibni Musa Khorezmi. Risolai jabru muqobala wa-Kitob-ul-vasoye. Murattib va muallifi tavzehot.* Trans. by I. Khojiyev. Dushanbe, 1984.

[5] 英語からの重訳や数行だけの和訳は他にもある．金原 [1957][1958] は方程式の分類とその幾何学的証明に関する章をロベルトゥス・カストレンシスによるラテン語訳の Louis Charles Karpinski による 1915 年の英訳に基づき和訳した．三浦 [2016: 241] は円の計測に関する部分を原典に基づき数行和訳した．

このうち注目すべきトピックとしては，4）の 3 通りの円周の求め方，8）の『原論』I.47 とは異なる方法による三平方の定理（いわゆるピュタゴラスの定理）の証明，12）の角錐台の体積計算などがあげられる．これらはフワーリズミーの数学的知識の源泉[6]を知る上での重要な記述といえる．

§ 2.　凡例

- 和訳の底本としたのは次の刊本である．
  L_{ed}: London edition, by Roshdi Rashed, 2009.
- その他にも次の刊本を参照した．
  W_{ed}: Würzburg edition, by Solomon Gandz, 1932.
- 異読は次のように提示する．
  x] T_1, y T_2　　T_1 の x という読みを採用．それに対する T_2 の読みは y.
  x] T_1, om. T_2　T_1 の x という読みを採用．T_2 にはそれに対応する部分が欠落.
- W_{ed} に従いトピック番号（§3.1–§3.13）を付した.
- 底本の L_{ed} に従い段落分けを行なった．各段落の始まりに対応する L_{ed} の頁数・行数をマージンに示す.
- ［　］は和訳に際して補われた語句,（　）は直前の語句の説明または原語を囲む.
- アラビア文字のラテン文字（ローマ字）による転写は国際規格である ISO で採択されている方式（ISO 233）に従う．ただし，ハムザ（ء）は’，アイン（ع）は‘と引用符により転写する．その他の転写（カタカナ転写も含む）に関する点は『岩波イスラーム辞典』pp. 10–12 に従う.
- 原文の数詞は漢数字で表す.
- 『ジャブルとムカーバラ』に対して，その数学的内容の説明のために，適宜 Note を付ける．その際，式と計算はできるかぎり原文に忠実に表現するが，数学的内容を適確かつ簡潔に表現するために，現代的演算記号とカッコ，( )，{ }，[ ]，を適宜用いる．

§ 3.　和訳

測量（misāḥa）[7] の章 203, 1

[6] Gandz [1932: 63–66, 85][1936: 264–65] によれば，1) インド，2) ギリシアまたはインド・ギリシアの混合，3) 土着（シリア・ペルシア）からの影響のそれぞれを強調する 3 説があるが,「測量」の章の構成がヘブライ語の数学書 Mishnat ha-Middot とパラレルになることを根拠に，彼自身は 3) 土着（シリア・ペルシア）の見解をとる．

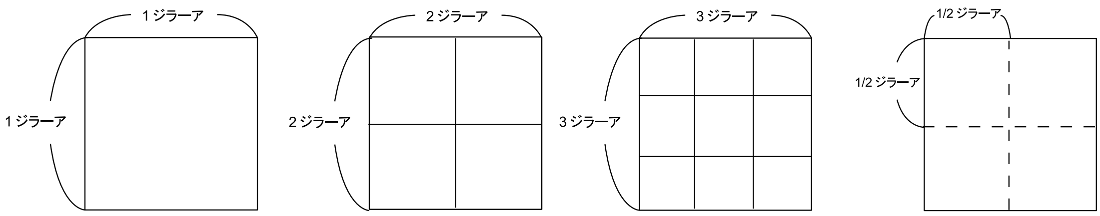
[7] misāḥa は「測量」だけでなく「面積」も意味する．この語を Rashed [2009: 202] は “<surface>-measurement”，Gandz [1932: 67] は “The Area” とそれぞれ訳している．

§ 3.1. ［測量］

203, 2 一掛け一の意味[8]，他ならぬそれが測量であると知りなさい．そしてそれ（一掛け一）の意味は，ジラーア[9]掛けジラーア．等辺等角の各面については，各辺が一であるものがある．だから実に，面，それは全体で一．そしてもしも各辺のうち二があって，それが等辺等角であるならば，面，それは全体で，ジラーア掛けジラーアである面の四個分．そして同様に，三掛け三があり，そしてそれ（一掛け一）を超える，または,［それ（一掛け一）より］不足するものがある．そして同様に，二分の一掛け二分の一があり，分数（kusūr）のうちそれ（二分の一掛け二分の一）以外のものは，以上のことに基づく．

··· Note ···

p. 203, ll. 2–7．面積単位．$1 \times 1 = 1$．$2 \times 2 = 4$．$3 \times 3 = 9$．$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$．以下に示す図は縮尺不同．



···

203, 8 二分の一ジラーアの各辺から成る四辺形（murabbaʻ）[10]の面は全て，一ジラーアの各辺から成る［四辺形の］面の四分の一．そして同様に，三分の一掛け三分の一，四分の一掛け四分の一，五分の一掛け五分の一，三分の二掛け二分の一，あるいは，それより少ないまたは多い［数］は，それ（面）の計算（ḥisāb）に基づく．

··· Note ···

p. 203, ll. 8–11．四辺形（正方形・矩形）の面積の計算．$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$．$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$．$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$．$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$．$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$．ただし，計算結果が与えられているのは $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ のみ．

···

203, 12 辺の等しい四辺形（すなわち正方形）の面については全て，実に，諸辺のうちの一辺掛け一はそれのジズル（ǧiḏr），掛け二はそれのジズル二つ．その面［より］小さくても大きくても[11]．

··· Note ···

p. 203, ll. 12–13．面積単位としてのジズル（ǧiḏr）またはジャズル（ǧaḏr）．$\mathrm{L_{ED}}$ の p. 97, ll. 12–16 において，フワーリズミーはジズル（根）を「自らに乗ぜられる物全て」，マール（māl: 財産）を

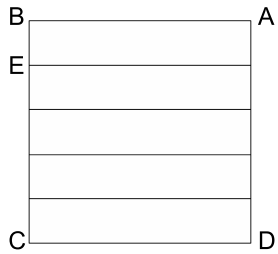
[8]「一掛け一」の「掛け」には，定動詞ではなく，fīという前置詞が用いられている．

[9]「ジラーア」（ḏirāʻ）は長さの単位で，腕の長さを表す．時代や場所によって違うが，約 50cm.（鈴木 [1987: 343, fn. 30] 参照）

[10] murabbaʻは語根 rabaʻa の II 形（四倍する，平方する）からの派生語であり,「四辺形」だけでなく「正方形」や「平方」も意味する．$\mathrm{L_{ed}}$ の p. 211, l. 2 以降でフワーリズミーが列挙する murabbaʻの 5 種の下位分類の中に正方形が含まれていることから，ここでは murabbaʻの訳語として「四辺形」を採用した．

[11] كبر] $\mathrm{L_{ed}}$, كثر $\mathrm{W_{ed}}$

「ジズルが自らに乗ぜられて出て来るもの全て」，独立数（‘adad mufrad）を「数のうちで，ジズルともマールとも関係を持たない，と言われるもの全て」とそれぞれ定義する．マールは常にジズルと関係し，現代表記するなら，ジズルが x か $\sqrt{x}$ のとき，マールはそれぞれ x^2 か x になる．つまり，ジズルとマールは必ずしも 1 次と 2 次の量とは限らず,「マールはジズルの自乗」ということ以上の制限はない（鈴木 [1987: 323] 参照）．三浦 [2016: 38] はマールとジズルの幾何学上の関係を次のように説明する（ただし，以下の例はマールが 5 つのジズルに等しい場合）.「マールを正方形 ABCD とします.



その一辺 AB が，側面にある単位（たとえば BE）の個数 5 で乗ぜられると，それがこの面 ABCD となります．ジズルは，1×AB，つまり一辺が 1 の長方形 AE です．マールが 5 ジズルに等しいという方程式の場合，マールと等しいジズルの個数は 5 ですので，幾何学上の定義からジズルは 5 となります．するとマールは，5 が 5 個で 25 となります．幾何学を用いて $x^2 = 5x$ を考えると，両辺は同じ次数とならねばならないので，$5x$ の x は $1 \times x$ を示すことになります（ここで 5 は個数）.」Gandz [1926: 263] もこの段落におけるジズルの記述を同様に解釈する．

直角を持つ面については全て，実に，あなたが長さを幅に掛けたものはそれ（直角の 203, 14
面）の面積（taksīr）である.[12]

··· Note ···

p. 203, l. 14. 矩形の面積．矩形の長さを a，幅を b とすれば，面積 S は，$S = ab$.

§ 3.2. ［三辺形］

等辺または不等辺の[13]三辺形については全て，実に，あなたが垂線（‘amūd）を底辺 203, 15
（qā‘ida）—それ（底辺）に垂線が落ちる—の二分の一に掛けたものは，その三辺形の面積である．

··· Note ···

p. 203, ll. 15–16. 三辺形の面積．三辺形の底辺を c，垂線を h とすれば，$S = \frac{1}{2}ch$.

[12] و كل سطح قائم الزوايا، فإن ضربك الطول في العرض هو تكسيره.] L_{ed}, om. W_{ed}

[13] أو غير متساوي] L_{ed}, om. W_{ed}

§ 3.3. ［目形（菱形）］

203, 17 等辺の目形（muʻayyana: 菱形）[14]については全て，実に，あなたが二本の対角線（quṭr）のうちの一本を他方の［対角線の］半分に掛けたものは，それ（目形）の面積である．

··· Note ···

p. 203, ll. 17–18. 目形（菱形）の面積．菱形の二本の対角線を a，b とすれば，$S = \frac{ab}{2}$.

······

§ 3.4. ［円］

205, 1 円については全て，実に，あなたが直径（quṭr）を三と七分の一に掛けたものは，それ（円）を囲む円周（dawr）である．そしてそれ（円周）は，［精度の］必要がなければ，人々の間の慣習である．幾何学者たち（ahl al-handasa）には[15]，それ（円周）に関して，二つの別の言明がある．その二つの［の言明の］うち一方は次の通り．あなたは直径をそれ自身と十に掛け，さらに，集まって出て来たものの根（ǧiḏr）をとる．そして，生じたものが円周である．第二の言明は，彼ら（幾何学者）のうちの星学者たち（ahl al-nuǧūm）に基づく．そしてそれ（第二の言明）は次の通り．あなたは直径を六十二千八百三十二に掛け，さらに，それ（積）を二十千で割る．そして，出て来たものが円周である．それの各々は互いに近い．

··· Note ···

p. 205, ll. 1–6. 円周．ここでは，1) 人々の間の慣習，2) 幾何学者たちの第 1 の言明，3) 幾何学者（星学者）たちの第 2 の言明，という 3 通りの円周の求め方が紹介されている．円の直径を d とすれば，円周 c は，

$$1)\quad c = \left(3 + \frac{1}{7}\right) d$$

$$2)\quad c = \sqrt{10d^2}$$

$$3)\quad c = \frac{62832}{20000} d$$

L_{ed} は「幾何学者たち」（ahl al-handasa）の代わりに「インド人」（ahl al-hind）という読みを採用する．この読みが正しければ，フワーリズミーにインド数学・数理天文学の知識があった証拠となる．サンスクリットの数学書・数理天文学書における円周率 π について，1) と同じ値 $\frac{22}{7}$ はアールヤバタ II（Āryabhaṭa II）の『マハーシッダーンタ』（*Mahāsiddhānta*, 10–11 世紀または 1500 年頃）15.93–97ab に，2) の値 $\sqrt{10}$ はシュリーダラ（Śrīdhara, 800 年頃）の『トリシャティー』（*Triśatī*）45 などに，3) の値 $\frac{62832}{20000}$ はアールヤバタ I（Āryabhaṭa I）の『アールヤバティーヤ』（*Āryabhaṭīya*, 499 年）2.10 にみられる．Rashed [2009: 71] は，$\frac{62832}{20000}$ という値が当時のバグダードに伝わっていたインドの「ジージュ」（zīǧ: 天文学の理論や，計算に必要な各種の表を集大成したもの）にもみられることから，必ずしもこの値が『アールヤバティーヤ』に由来するとはいえな

---

[14] muʻayyana は語根 ʻayana の受動分子が名詞化したものであり，元の意味は「定められた」である．この語根の派生語には「目」を意味する ʻayn がある．Gandz [1932: 69] と Rashed [2009: 202] は muʻayyana を “eye-shaped figure”, “lozenge” とそれぞれ訳している．

[15] لاهل الهندسة] W_{ed}，لاهل الهند L_{ed}

い，とする．

··

もしもあなたが円周を三と七分の一で割れば，直径が出て来る． 205, 7

··· Note ··

p. 205, l. 7. 円の直径．$d = c \div \left(3 + \frac{1}{7}\right)$.

··

円については全て，実に，直径の半分掛け円周の半分は，［円の］面積である．なぜなら，三辺形（muṯallaṯāt），四辺形（murabbaʿāt），五辺形（muḫammasāt），それ以上のもののうち等辺等角を持つものについては全て，実に，それ（等辺等角を持つ三辺形など）を囲むものの半分をそこ（等辺等角を持つ三辺形など）に落ちる円のうちで最も広い差し渡し（quṭr awsaʿ dāʾira: 円の直径）の半分にあなたが掛けたものは，それ（等辺等角を持つ三辺形など）の面積である． 205, 8

··· Note ··

p. 205, ll. 8–11. 円の面積．

$$S = \frac{d}{2} \times \frac{c}{2} \tag{3.1}$$

フワーリズミーは，正多角形の面積の計算から (3.1) を導いている．Gandz [1932: 70, fn. 19] は，円に外接する三辺形の面積が $\frac{pr}{2}$（p は perimeter，r は内接円の半径）により求められることに言及する．

··

円については全て，実に，自[16]乗されたそれ（円）の直径—そこからそれ（自乗された円の直径）の七分の一とそれ（自乗された円の直径）の七分の一の半分が引かれる—は，それ（円）の面積である．そしてそれは，第一の解法（bāb）[17]と一致する． 205, 12

··· Note ··

p. 205, ll. 12–13. 円の面積．$c = \left(3 + \frac{1}{7}\right) d$ を (3.1) に代入すれば，

$$S = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{1}{7}\right) d^2 = \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) d^2 = \left(1 - \frac{3}{14}\right) d^2 = \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) d^2$$

··

§ 3.5. ［円の切片］

弓（qaws）に似ている[18]円の切片（qiṭʿa）については全て，必ず[19]，円の半分に等しい，または円の半分よりも小さい，または円の半分よりも大きい．そのことを示すもの（dalīl）は次の通り．もしも弧の矢（sahm）が弦（watar）の半分に等しいならば，それ（切片） 205, 14

[16] مثله] L_{ed}，نفسه W_{ed}

[17] bāb はもともと「扉」「［本の］章」などを意味する．Rashed [2009: 204] の “procedure” と Gandz [1932: 71] の “method” という訳語に従い，ここでは bāb を「解法」と訳した．

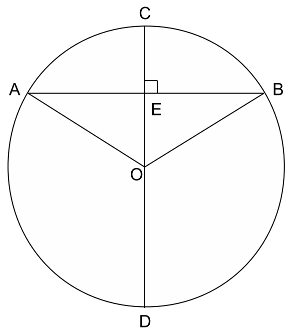
[18] شبيهة] L_{ed}，مشبهة W_{ed}

[19] فلا بد ان] W_{ed}，فلا بدّ من أن L_{ed}

は等しく[20]円の半分である．そしてもしも［弧の矢が］弦の半分よりも小さいならば，それ（切片）は円の半分よりも小さい．そしてもしも［弧の矢が］弦の半分よりも大きいならば，それ（切片）は円の半分よりも大きい．

··· Note ···

p. 205, ll. 14–18．円の切片．中心 O の円において，弦 AB と直角に交わる直径を CD とし，AB と CD の交点を E とするとき，CE は弦 AB に対する矢（sahm）と呼ばれる．弦 AB と弧 $\overset{\frown}{AB}$ で



囲まれた切片の面積を s，円の面積を S とすれば，次の 3 つの関係が成り立つ．1) $CE = \frac{AB}{2}$ ならば $s = \frac{S}{2}$，2) $CE < \frac{AB}{2}$ ならば $s < \frac{S}{2}$，3) $CE > \frac{AB}{2}$ ならば $s > \frac{S}{2}$.

···

207, 1 もしもあなたがそれ（切片）がどの円に属するのかを知りたいのなら，弦の半分を自乗し，それ（自乗したもの）を矢で割り，出て来たものを矢に加えなさい．そして，到達したもの（結果）は，その弧［形］[21]が属する円の直径である．

··· Note ···

p. 207, ll. 1–3．円の直径.

$$CD = \frac{AE^2}{CE} + CE$$

上式は半弦 AE と 2 つの矢 CE，ED の関係

$$AE^2 = CE \cdot ED$$

に基づく.

···

207, 4 もしもあなたが弧［形］の面積を知りたいのなら，円の直径の半分を弧の半分に掛け，出て来たもの（結果）を保持しなさい．さらに，弧の矢を円の直径の半分から引きなさい．もしも弧［形］が円の半分よりも小さいのなら．そしてもしも［弧形］が円の半分よりも大きいのなら，円の直径の半分を弧の矢から引きなさい．そして[22]残ったものを弧

[20] سواء] L_{ed}，سوا W_{ed}

[21] Gandz [1932: 71, fn. 23] は，フワーリズミーが qiṭʻat min mudawwara（円の切片）という表現を使わずに，qaws という語を「弓」（bow）および「弓形」（bow-figure）の意味で使用している，と指摘する．本稿では qaws の訳語として「弧」および「弧［形］」を採用した．

[22] و] L_{ed}，ثم W_{ed}

の弦の半分に掛け，あなたが保持したものから引きなさい．もしも弧［形］が円の半分よりも小さいのなら．または，それ（積）をそれ（保持したもの）に加えなさい．もしも弧［形］が円の半分よりも大きいのなら．足し算（ziyāda）または引き算（nuqṣān）の後に到達したもの，それが弧［形］の面積である．もしも至高なる神が望むなら[23]．

··· Note ···

p. 207, ll. 4–10. 弧形（円の切片）の面積．p. 205, ll. 14–18 の Note に示した 2) $s < \frac{S}{2}$ と 3) $s > \frac{S}{2}$ の場合に分けて考える．中心角 $\angle AOB$（$< 180°$）の扇形の面積 a_1 と，中心角 $\angle AOB$（$> 180°$）の扇形の面積 a_2 はそれぞれ,

$$2) \qquad a_1 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \times CO$$

$$3) \qquad a_2 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \times DO$$

「出て来た」a_1 と a_2 を「保持」する．

$$2) \qquad OE = CO - CE$$

$$3) \qquad OE = DE - DO$$

「残ったもの」OE を半弦 AE に掛けると，三辺形 $\triangle AOB$ の面積は,

$$\triangle AOB = AE \times OE$$

「保持」していた a_1 と $\triangle AOB$ の差，a_2 と $\triangle AOB$ の和をとれば，切片の面積 s_1 と s_2 はそれぞれ,

$$2) \qquad s_1 = a_1 - \triangle AOB$$

$$3) \qquad s_2 = a_2 + \triangle AOB$$

···

§ 3.6.　［角柱・円柱］

四角柱（muǧassam murabba‘）については全て，実に，あなたが長さに幅を，さらに 207, 11
深さを掛けたものは，［四角柱の］体積（taksīr）[24]である．そしてもしも［底面が］四辺形（tarbī‘）ではなく，円または三辺形またはそれ以外で，しかし，それの深さがまっすぐ（istiwā’）で，平行なもの（muwāzāt）は[25]，実に，それ（円柱や三角柱など）の測量（misāḥa）は，あなたがそれ（円柱や三角柱など）の［底］面を求めて，それ（円柱や三角柱など）の［底］面積を知るということである．そして，それ（底面積）を深さに掛けたものが体積である．

··· Note ···

[23] إن شاء الله تعالى] L$_{ed}$, om. W$_{ed}$

[24] これまで taksīr は「面積」の意味で用いられてきたが，ここでは明らかに「体積」を意味する．

[25] “This figure is a right prism or a right cylinder. Al-Khwārizmī means that its height is a line parallel to its edges, and therefore perpendicular to the bases.” (Rashed [2009: 206, fn. 89])

p. 207, ll. 11–14. 角柱・円柱の体積．四角柱の長さを a，幅を b，深さを h とすれば，体積 V は，$V = abh$．円柱・三角柱等の底面積を c とすれば，$V = ch$.

. . . .

§ 3.7. ［角錐・円錐］

207, 15 ［底面が］三辺形，円，四辺形[26]から成る錐（maḫrūṭ）については，実に，底面積の三分の一をそれ（錐）の垂線（‘amūd）に掛けたものから成るものは，それ（錐）の体積である．

· · · Note ·

p. 207, ll. 15–16. 角錐・円錐の体積．角錐・円錐の底面積を c，垂線を h とすれば，体積 V は，$V = \frac{1}{3}ch$.

. . . .

§ 3.8. ［三平方の定理］

207, 17 あなたは次のことを知りなさい．直角の三辺形については全て，実に，より小さな二辺のうちのそれぞれ一辺を自乗して集められたものから成るものは，最も長い一辺を自乗したものから成るものに等しい．

· · · Note ·

p. 207, ll. 17–19. 三平方の定理（いわゆるピュタゴラスの定理）．直角三辺形の「より小さな二辺」を a と b,「最も長い一辺」を c とすれば，$a^2 + b^2 = c^2$.

. . . .

209, 1 それ（三平方の定理）の証明（burhān）．私たちは等辺等角の四辺形（すなわち正方形）の面を ABGD とする．さらに，私たちは点 E 上で辺 AG を[27]真っ二つに切り，それ（点 E）を Z へと[28]引き，辺 AB を点 T 上で真っ二つに切り，それ（点 T）を点 H へと引く．面 ABGD は等辺等角等面積（misāḥa）の四面になる．そしてそれ（四面）は面 AK，面 GK，面 BK，面 DK．さらに，私たちは点 E から点 T へと，面 AK を真っ二つに切る線分（ḫaṭṭ）を引く．面［AK］から二つの三辺形が生ずる．そしてその二つの三辺形は[29]ATE と EKT である．既に私たちには次のことが明らかである．AT は AB の半分であり，AE はそれ（AT）に等しく，それ（AE）は AG の半分である．そして線分 TE はその二つ（AT と AE）を直角に対辺（斜辺）として張る[30]．同様に，私たちは諸々の線分を T から Z へ[31]，Z から[32]H へ，H から E へと引く．それから，正方形全体から八つの

[26] و المدور و المربع] L_{ed}, و المربع و المدور W_{ed}

[27] اج <ضلع>] W_{ed}, اج L_{ed}

[28] الى ز] L_{ed}, الى ر W_{ed}

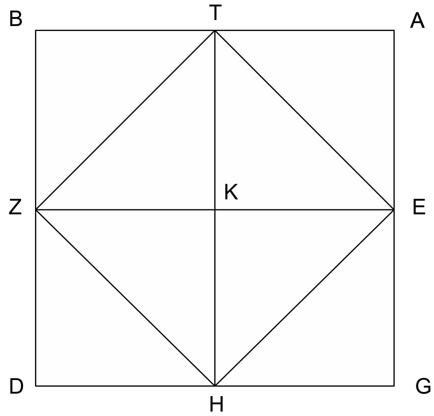
[29] مثلثتا] L_{ed}, مثلثا W_{ed}

[30] yawtaru（watara, IV 3rd sg. impf. m.）を「対辺（斜辺）として張る」と訳したが，直訳は「弦を張る」．L_{ed} の p. 205, l. 16 以降に出てきた watar（弦）も，watara という語根からの派生語である．

[31] الى ز] L_{ed}, الى ر W_{ed}

[32] من ز] L_{ed}, من ر W_{ed}

等しい三辺形が生ずる[33]．既に私たちには次のことが明らかである．それら（八つの等しい三辺形）のうちの四つは[34]，最も大きなもの，すなわち面 AD の半分である．既に私たちには次のことが明らかである．辺[35]AT の自乗[36]は三辺形二つの面積であり，辺 AE の自乗は[37]その二つ［の三辺形］に等しい三辺形二つの面積である．それ故，それ（辺 AT の自乗と辺 AE の自乗）の全体は三辺形四つの面積である．辺 ET の自乗もまた，別の三辺形四つの面積である．既に私たちには次のことが明らかである．AT の自乗と AE の自乗から成るものが集められて，TE の自乗から成るものに等しい．以上が私たちが明らかにしたかったことである．そしてこれがその図.[38]



··· Note ·····

p. 209, ll. 1–17. 三平方の定理の証明．正方形 ABDG において，AB，BD，DG，GA の中点をそれぞれ T，Z，H，E とする．EZ⊥TH となるような直線を引き，正方形 ABDG を「等辺等角等面積の四面」に分割する．四面のそれぞれは二つの直角二等辺三辺形から成るので，直角二等辺三辺形一つの面積を s とすれば，

$$s = \frac{1}{8}(ABDG)$$

ただし，$(ABDG)$ は正方形 ABDG の面積.

$$AT^2 = AE^2 = 2(ATE) = 2s$$

$$ET^2 = (ETZH) = 4s$$

ただし，(ATE) と $(ETZH)$ はそれぞれ三辺形 ATE と正方形 ETZH の面積．したがって，

$$ET^2 = AT^2 + AE^2$$

Gandz [1932: 74, fn. 37a] と Rashed [2009: 208, fn. 95] が指摘するように，この証明は直角二等辺三辺形の場合のみ成立する．Mathews [1985: 203] は，インドの『バウダーヤナ・シュルバスートラ』（*Baudhāyana Śulbasūtra*）の「正方形を横切って張られた紐は，その大きさを 2 倍した面積を生む」という言明が上図から線分 EZ を取り除いた図を示唆すると理解する（和訳はカッツ [2005: 40] 参照）.

·····

---

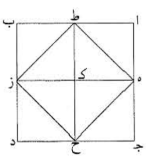
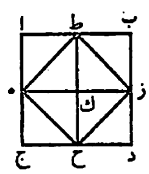
33 فيحدث] L_{ed}, فحدث W_{ed}

34 اربعة] L_{ed}, اربع W_{ed}

35 ضلع] L_{ed}, خط W_{ed}

36 直訳は「辺 AT 掛けそれ自身」．以下，同様の表現は「〜の自乗」と訳した.

37 ضلع اه في نفسه] L_{ed}, اه W_{ed}

38 ] L_{ed},  W_{ed}

211, 1 ## 測量の諸問題

§3.9. ［5 種類の四辺形］

211, 2 四辺形は五種類（aǧnās: ǧins, pl.）[39]であることを知りなさい．それ（四辺形）には［次のものがある．一番目は］等辺直角．

211, 4 二番目は直角不等辺であり，それの長さ（ṭūl）はそれの幅（‘arḍ）よりも大きい．

211, 5 三番目は目形（菱形）と呼ばれる．そしてそれ（三番目）は，それの諸辺が互いに等しく，それの諸角が互いに異なる[40]ものである．

211, 6 四番目は目形に似ている．そしてそれ（四番目）は，それの長さと幅が互いに異なり，それの角が互いに異なるものである．しかしながら，二つの長さは互いに等しく[41]，二つの幅も互いに等しい[42]．

211, 8 五番目は不等辺不等角である．

··· Note ·····

p. 211, ll. 2–8．5 種類の四辺形．(1) 正方形，(2) 矩形，(3) 目形（菱形），(4) 目形に似ている四辺形，(5) 不等辺不等角の四辺形．

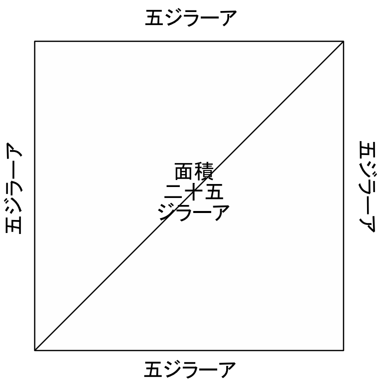
·····

211, 9 四辺形のうちで等辺[43]直角のもの，または，不等辺直角のものについては，実に，それの面積はあなたが長さを幅に掛けることである．そして到達したもの（積）が面積である．

··· Note ·····

p. 211, ll. 9–13．正方形と矩形の面積．長さを a，幅を b とすれば，面積 S は，$S = ab$．ただし，これと同じ内容が p. 203, l. 14 で既に述べられている．

·····



211, 14 それ（等辺直角の四辺形）の例．各辺が五ジラーアから成る四辺形の土地（arḍ）がある．それの面積は二十五ジラーア．そしてこれがそれ（等辺直角の四辺形）の図．[44]

··· Note ·····

p. 211, ll. 14–16．例題：正方形の面積．$S = 5 \times 5 = 25$ ḏirā‘-s．長さの単位名と面積の単位名がどちらも「ジラーア」であることに注意．以下同様．

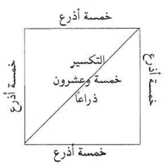
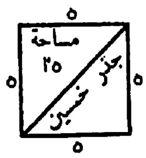
[39] ǧins はギリシア語の γένος の音訳．

[40] زواياها] $\mathrm{L_{ed}}$，زواياه $\mathrm{W_{ed}}$

[41] متساويان] $\mathrm{L_{ed}}$，مستويان $\mathrm{W_{ed}}$

[42] متساويان] $\mathrm{L_{ed}}$，مستويان $\mathrm{W_{ed}}$

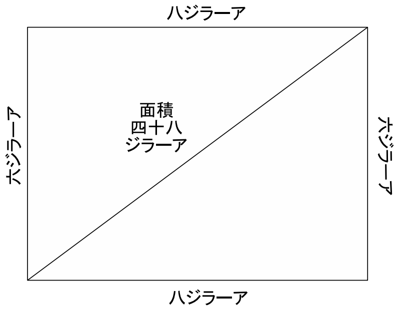
[43] متساوية] $\mathrm{L_{ed}}$，مستوية $\mathrm{W_{ed}}$

[44] ] $\mathrm{L_{ed}}$， $\mathrm{W_{ed}}$

....

二番目［の例］．四辺形の土地があり，それの長さは八ジラーア［と］八ジラーア，それの二つの幅は六ジラーア［と］六ジラーア[45]．それ（四辺形の土地）の面積は，あなたが八ジラーアを六ジラーアに[46]掛けるということであり，四十八ジラーアである．それ（四十八ジラーア）がそれ（四辺形の土地）の面積である． 213, 1

そしてこれがそれ（四辺形の土地）の図．[47] 213, 4



··· Note ···

p. 213, ll. 1–4. 例題：矩形の面積．$S = 8 \times 6 = 48$ ḏirāʿ-s.

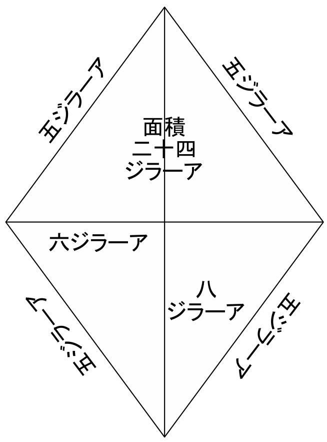
....

等辺の目形—それの各辺は五ジラーア，それの二本の対角線（quṭr）[48]の一方は八ジラーア[49]，他方は六ジラーア—については，次のことを知りなさい．それ（目形）の面積は，あなたが二本の対角線，または，二本のうちの一方を知ることである．もしもあなたが二本の対角線を両方とも知ったなら，実に，二本［の対角線］の一方を他方の半分に掛けたものから成るものは，それ（目形）の面積である．それ（目形の面積）は，あなたが八を三に，または，四を六に掛けることであり，二十四ジラーアである．それ（二十四ジラーア）がそれ（目形）の面積である． 213, 5

··· Note ···

p. 213, ll. 5–9. 例題：目形（菱形）の面積．2 本の対角線の長さ（8 と 6）が分かっている場合，$S = 8 \times \frac{6}{2} = 8 \times 3 = 24$ ḏirāʿ-s．または，$S = \frac{8}{2} \times 6 = 4 \times 6 = 24$ ḏirāʿ-s.

....

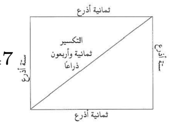


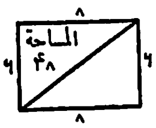
もしもあなたが一方の対角線を知ったのなら，既にあなたは次のことを知っている．その二つの三辺形があって，二つのうちの各々[50]の二辺は五ジラーア［と］五ジラーアであり，第三の辺は二本のうち［の一方］の対角線である．それから，三辺形の計算に則してその二つ［の三辺形の面積］を計算しなさい[51]． 213, 10

---

[45] ستة اذرع ستة اذرع] L_{ed}, ستة ستة W_{ed}

[46] ثمانية اذرع في ستة اذرع] L_{ed}, ثمانية في ستة W_{ed}

[47] 

] L_{ed}, 

W_{ed}

[48] quṭr は「対角線」だけでなく「直径」も意味する（p. 205, l. 1 の和訳参照）．

[49] ثمانية اذرع] L_{ed}, ثمانية W_{ed}

[50] كل واحدة] L_{ed}, كل واحد W_{ed}

[51] فاحسبهما] W_{ed}, فاحسبها L_{ed}

既に私たちはそのことを三辺形の章（bāb）において示した.[52]

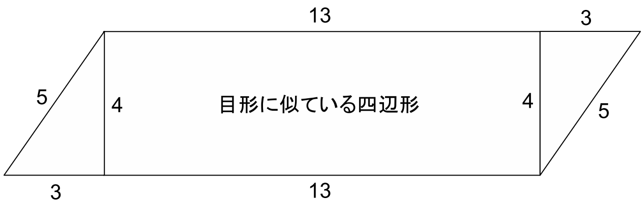
215, 3 そしてこれがそれ（目形）の図．[53]

··· Note ···

p. 213, l. 10–p. 215, l. 3. 例題：目形（菱形）の面積．一方の対角線の長さ（8 または 6）と各辺の長さ（5）が分かっている場合，対角線で目形を 2 つの三辺形に分割し,「三辺形の計算」から各々の面積を求める．フワーリズミーはこの「三辺形の計算」を既に示したとするため,「三辺形の章」は三平方の定理を扱った段落（p. 207, l. 17–p. 209, l. 17）を指すと考えられる．しかし実際には，三辺形について詳述されるのは p. 215, l. 7 以降.

···

215, 4 目形に似ているものについては，目形の例[54]に従う．そしてこれがそれの図.[55]



··· Note ···

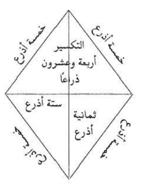
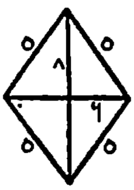
p. 215, l. 4. 例題：目形に似ている四辺形の面積.「目形の例に従う」と述べられているが，上図を見る限り，面積の求め方は目形の例題とは異なる．W_{ed} は mit̲āl mu‘ayyana「目形の例」ではなく，mit̲l mu‘ayyana「目形と同様に」と読む．これについて Gandz [1932: 76] は，写本マージンの注釈に基づき,「同様に」という語が矩形の面積の段落（p. 213, ll. 1–4）を指すという解釈を提示する．これに従えば，四辺形を一方の対角線で 2 つの三辺形に分割することになるが，上図は矩形と 2 つの三辺形に分割している.

···

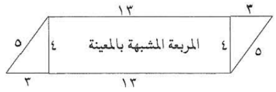
215, 5 残りの四辺形については，実に，それ（残りの四辺形）の面積は対角線から知られる．したがって三辺形の計算ということになる[56]．もしも至高なる神が望むなら[57]．そしてそのことを知りなさい.

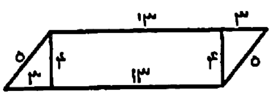
··· Note ···

[52] فقد بيّنا ذلك في باب المثلثات.] L_{ed}, om. W_{ed}

[53] ] L_{ed},  W_{ed}

[54] مثال] L_{ed}, مثل W_{ed}

[55] وهذه صورتها] L_{ed}, وهذه صورة المشبهة بالمعينة W_{ed}; 

] L_{ed},  W_{ed}（W_{ed} の文と図は次の段落の最後に書かれている）

[56] فيخرج] L_{ed}, فيخرح W_{ed}

[57] إن شاء الله تعالى] L_{ed}, om. W_{ed}

p. 215, ll. 5–6. 残りの四辺形の面積．四辺形を一方の対角線で 2 つの三辺形に分割する点は目形の例題（p. 213, l. 10–p. 215, l. 3）と一致し,「三辺形の計算」という語も共通する．

§ 3.10. ［3 種類の三辺形］

三辺形については，それ（三辺形）は三[58]種類である．すなわち直［角］（qā'ima），鋭 215, 7
［角］（ḥādda），鈍［角］（munfariǧa）[59].

··· Note

p. 215, l. 7. 3 種類の三辺形.（1）直角三辺形,（2）鋭角三辺形,（3）鈍角三辺形.

直［角］については[60]，それは三辺形である．もしもあなたがそれ（直角三辺形）のより小さな二辺の一つ一つを自乗し，その［自乗した］二つを集めたなら，それ（集めたもの）は自乗されたそれ（直角三辺形）の最も長い辺に等しい. 217, 1

··· Note

p. 217, ll. 1–2. 直角三辺形の性質（または一種の定義）.「より小さな二辺」を a，b,「最も長い辺」を c とすれば，$a^2 + b^2 = c^2$.

鋭［角］については，各々の三辺形である．もしもあなたがそれ（鋭角三辺形）のより小さな二辺の一つ一つを自乗し，さらに，その［自乗した］二つを集めたなら，それ（集めたもの）は自乗された最も長い辺よりも大きい. 217, 3

··· Note

p. 217, ll. 3–4. 鋭角三辺形の性質（または一種の定義）．$a^2 + b^2 > c^2$.

鈍［角］については，各々の三辺形である．もしもあなたがそれ（鈍角三辺形）のより小さな二辺の一つ一つを自乗し，その［自乗した］二つを集めたなら，それ（集めたもの）は自乗された最も長い辺よりも小さい. 217, 5

··· Note

p. 217, ll. 5–7. 鈍角三辺形の性質（または一種の定義）．$a^2 + b^2 < c^2$.

直角については，それは二つの垂線（'amūd）と対辺（quṭr）[61]を有するものであり，四辺形の半分である．それ（直角三辺形）の面積の知識（ma'rifa）は，直角を取り囲んでいる二辺のうちの一方を他方の半分にあなたが掛けることである．それが到達したもの（結果）がそれ（直角三辺形）の面積. 217, 8

[58] ثلاثة] L_{ed}, ثلثة W_{ed}

[59] munfariǧa は語根 faraǧa から派生した形容詞であり，元の意味は「開いた」「広い」.

[60] فأما] L_{ed}, واما W_{ed}

[61] これまで quṭr は「対角線」や「直径」の意味で用いられてきたが，ここでは「対辺」を意味する．フワーリズミーが述べるように，直角三辺形を「四辺形の半分」とみなせば，直角三辺形の対辺と四辺形の対角線は同一のものとなる.

··· Note ···

p. 217, ll. 8–10. 直角三辺形の面積.「二つの垂線」を a，b とすれば，面積 S は，$S = \frac{ab}{2}$.

···

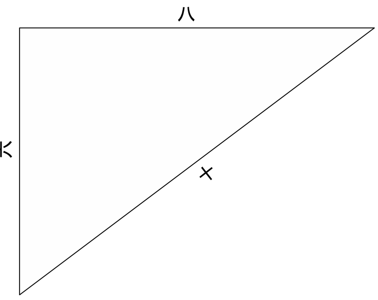
217, 11 それ（直角三辺形）の例．直角三辺形があり，それの辺は六ジラーア，それの辺は八ジラーア，対辺は十ジラーア[62]．それの計算は，あなたが六を四に掛けることである．したがって二十四ジラーアであり，それがそれ（直角三辺形）の面積である．

··· Note ···

p. 217, ll. 11–13. 例題：直角三辺形の面積．$S = 6 \times \frac{8}{2} = 6 \times 4 = 24$ ḏirāʿ-s.

···

217, 14 もしもあなたが垂線により[63]それ（直角三辺形の面積）[64]を計算することを望むなら，実に，それ（直角三辺形）の垂線は最も長い辺以外には落ちない．というのは，短い二辺が［互いに対する］垂線であるから．もしもあなたがそれ（面積計算）を望むなら，それ（直角三辺形）の垂線を底辺（qāʿida）の半分に掛けなさい．そして生じたものがそれ（直角三辺形）の面積．そしてこれがそれ（直角三辺形）の図.[65]



··· Note ···

p. 217, ll. 14–19. 直角三辺形の面積．垂線を h，底辺を c とすれば，$S = \frac{ch}{2}$.「垂線は最も長い辺以外には落ちない」の「垂線」は，おそらく「短い二辺」（6 と 8）の間の直角から「最も長い辺」（10）に対して引かれたもの．確かに「短い二辺が［互いに対する］垂線で」あれば，その間には直角が形成されるので，そこから引かれた垂線は必ず「最も長い辺」の上に落ちる．これに対して，垂線が底辺の延長線上に落ちる場合が p. 225, ll. 1–2 に述べられている（ただし，直角三辺形ではなく鈍角三辺形）.

···

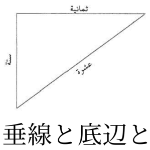
219, 1 二番目の種類については，各辺十ジラーアから成る等辺鋭角三辺形がある．実に，それ（等辺鋭角三辺形）の面積はそれの垂線とそれの石が落ちる所（masqaṭ ḥağar）[66]から知られる[67].

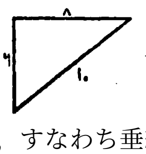
··· Note ···

[62] عشرة اذرع] L_{ed}, عشر W_{ed}

[63] بالعمود] L_{ed}, من قبل العمود W_{ed}

[64] 内容から考えれば，非分離形の三人称代名詞 hā（sg. f.）が指示するのは直角三辺形の面積が望ましい．しかし，面積を意味する taksīr は男性名詞であり，hā と性が一致しない．

[65] 

] L_{ed}, 

W_{ed}

[66] 垂線と底辺との交点，すなわち垂線の足を指す．Gandz [1932: 78] は “its foot-point”，Rashed [2009: 218] は “its foot” とそれぞれ意訳している．

[67] يعرف] L_{ed}, تعرف W_{ed}

p. 219, ll. 1–3. 等辺鋭角三辺形の面積．これ以降は「等辺」の場合，p. 221, l. 1 からは「不等辺」の場合について述べられる．

…………………………………………………………………………………

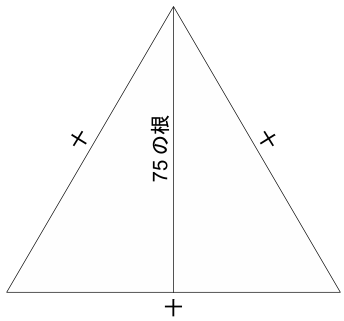
次のことを知りなさい．三辺形のうちで二等[68]辺のものについては全て，その二［等辺］の間で，垂線が底辺へと引かれる[69]．そして実に，垂線の石が落ちる所は直角に落ち，底辺のちょうど[70]半分に落ちる，もし二辺が互いに等しい[71]ならば．そしてもし［二辺が］互いに異なるならば，石が落ちる所は底辺の半分とは異なる．しかしながら，既に私たちは次のことを知っている．この三辺形の石が落ちる所は，あなたが作った辺のどれに対しても，それ（あなたが作った辺）の半分，すなわち[72]五ジラーア以外には落ちない．垂線の知識は次のことである，あなたは五を自乗し，二辺のうちの一方，すなわち十を自乗し，百になる．あなたはそれ（百）から五の自乗，すなわち二十五を引き，七十五が残る．それ（七十五）の根を取りなさい．それが垂線である．そして既に二直角に対する三辺形二つの[73]一辺になった． 219, 4

… Note ………………………………………………………………………

p. 219, ll. 4–12. 二等辺三辺形の垂線．二等辺の場合には垂線の足が底辺を二等分するが，二等辺でない場合には二等分しない．フワリズミーは一辺 10 ジラーアの正三角形を想定し，その垂線 h を次のように求める．$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75}$.

…………………………………………………………………………………

もしもあなたが［等辺鋭角三辺形の］面積を望むのなら，七十五の根を底辺の半分，すなわち五に掛けなさい．そのことは[74]，七十五の根掛け二十五の根になるように，あなたが五を自乗するということである．七十五を二十五に掛けなさい．千八百[75]七十五になる．これ（千八百七十五）の根を取りなさい．それがそれ（等辺鋭角三辺形）の面積であり，四十三とわずかな物（šay' qalīl）である．そしてこれがそれ（等辺鋭角三辺形）の図.[76] 219, 13



… Note ………………………………………………………………………

[68] مستويين] L_{ed}, متساويين W_{ed}

[69] يخرج بينهما] L_{ed}, تخرج منهما W_{ed}

[70] سواء] L_{ed}, سوا W_{ed}

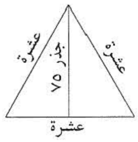
[71] استوى] L_{ed}, استوا W_{ed}

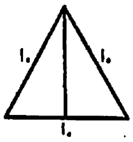
[72] وذلك] L_{ed}, فذلك W_{ed}

[73] للمثلثين على زاويتين قائمتين] L_{ed}, على مثلثين قائمتين W_{ed}

[74] هو] L_{ed}, ذلك W_{ed}

[75] ثمانمائة] L_{ed}, ثمانىماية W_{ed}

[76] 

] L_{ed}, 

W_{ed}

p. 219, ll. 13–19．例題：等辺鋭角三辺形の面積．$S = \sqrt{75} \times \frac{10}{2} = \sqrt{75} \times 5 = \sqrt{75} \times \sqrt{25} = \sqrt{1875} = 43.301\ldots$

…………………………………………………………………………………

221, 1 この鋭角[77]［三辺形］の中には不等辺のものがあるかもしれない．次のことを知りなさい．それ（不等辺鋭角三辺形）の面積は，それの石が落ちる所とそれの垂線から知られる．それ（不等辺鋭角三辺形）とは，十五ジラーアの辺，十四ジラーアの辺，十三ジラーアの辺から成る三辺形のことである．もしもあなたがそれの石が落ちる所を知りたいのなら，あなたが望むどの辺であれ，底辺としなさい．私たちはそれ（底辺）を十四とする．そしてそれ（十四）は[78]石が落ちる所である．それの石が落ちる所は，それ（底辺）のうちで，あなたが望んだ二辺のうちどちらでも近い方からのシャイ（šay': 物）[79]へと落ちる．私たちは，そのシャイを十三に近い方から，とし，それ（シャイ）を自乗する．そしてマール（māl: 財産）になる．私たちはそれ（マール）を十三[80]の自乗，すなわち百六十九から引く．したがって，それ（結果）は百六十九引く一マールになる[81]．私たちはそれ（百六十九引く一マール）の根が垂線であることを知る．既に私たちには，底辺のうちに，十四引くシャイが残っている．私たちはそれ（十四引くシャイ）を自乗する．百九十六と一マール引く二十八シャイになる．私たちはそれ（百九十六と一マール引く二十八シャイ）を十五の自乗から引く．二十九ディルハム（dirham）[82]と二十八シャイ引く一マールが残る．それ（二十九ディルハムと二十八シャイ引く一マール）の根が垂線である．それ（二十九ディルハムと二十八シャイ引く一マール）の根になったこれが垂線であり，百六十九引く一マールの根も垂線であるのだから，私たちはその二つが互いに等しいことを知る．そしてその二つをはち合わせなさい[83]．それは，あなたがマールをマールで突き合わせる[84]，ということである．というのは，マール二つが減じているから．二十九ジラーア[85]と二十八シャイに等しい百六十九が[86]残る．二十九を百六十九から突き合わせ

---

[77] الزوايا الحادة] L_{ed}, الحادة الزوايا W_{ed}

[78] و هو] L_{ed}, و هر W_{ed}

[79]「シャイ」は未知の量を表す．鈴木 [1987: 323] は，シャイは「根」という意味は持たないが，マールに対してはジズルと同じ関係にある，とする．ジズルとマールの関係については p. 203, ll. 12–13 に対する Note 参照.

[80] ثلاثة عشر] L_{ed}, ثلثة عشر W_{ed}

[81]「百六十九引くマール」の「引く」には，定動詞ではなく，illā（if not, except, less, etc.）という語が用いられている．

[82]「0 次の量は貨幣単位の "ディルハム"（dirham）や "ディーナール"（dīnār）で表されることが多く，"財産" という意味をもつマールとともに，ジャブルの学が商業計算と深い関わりをもっていたことを示している.」（鈴木 [1987: 323]）

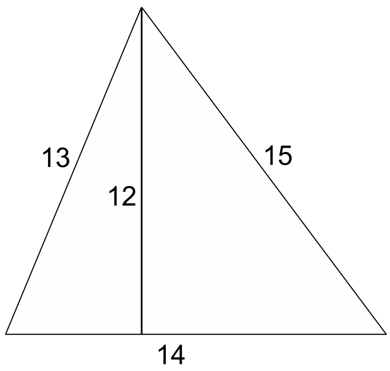
[83]「はち合わせなさい」と訳した qābil は語根 qabila の Ⅲ 2nd sg. ipv. m．ここでは，左辺と右辺を向かい合わせる，という操作を表す．

[84]「あなたが突き合わせる」と訳した tulqiya は語根 laqiya の Ⅳ subj. 2nd sg. impf. m．ここでは，方程式の両辺に等しいもの（この場合は 1 マール）を加えて負の項を消去する，という操作を表す．一般にこの操作は「ジャブル」と呼ばれる（鈴木 [1987: 322] 参照）．

[85]貨幣単位ディルハムで表されていた 0 次の量が，今度はジラーアという長さの単位で表されている．

[86] مَاءة وتسعة وستون تعدل تسعة وعشرين ذراعا وثمانية وعشرين شيئا] L_{ed},
تسعة وعشرون وثمانية وعشرون شيئا يعدل ماية وتسعة وستين W_{ed}

なさい[87]．二十八シャイに等しい百四十が残る．一シャイは五単位であり，十三に近いものからの石が落ちる所である．他辺に近いものからの底辺の補完（tamām）は九．もしもあなたが垂線を知ることを望むのなら，この五を自乗しなさい．そしてそれ（積）をそれ（五）に近い，自乗された辺，すなわち十三掛け十三[88]から引きなさい．百四十四が残る．それ（百四十四）の根が垂線，すなわち十二．垂線は常に底辺に対して二つの直角に落ちる．それ故,「垂線」（‘amūd）と呼ばれる．なぜなら，それ（垂線）は真っ直ぐだから.[89]そして垂線を底辺の半分，すなわち七に掛けなさい．八十四になる．それ（八十四）がそれ（不等辺鋭角三辺形）の面積.



そしてこれがそれ（不等辺鋭角三辺形）の図．[90] 223, 7

··· Note ···

p. 221, l. 1–p. 223, l. 7. 例題：不等辺鋭角三辺形の面積．以下の計算では，シャイ，マールをそれぞれ x，x^2 と表す．各辺の長さが 15，14，13 ジラーアの三辺形があり，底辺（14 ジラーア）と 13 ジラーアの辺との交点から垂線 h との交点までの長さをシャイ x とおけば,

$$h = \sqrt{13^2 - x^2} = \sqrt{169 - x^2} \tag{3.1}$$

$$h = \sqrt{15^2 - (14-x)^2} = \sqrt{225 - (196 - 28x + x^2)} = \sqrt{29 + 28x - x^2} \tag{3.2}$$

(3.1) と (3.2) を自乗して「はち合わせ」ると

$$169 - x^2 = 29 + 28x - x^2$$

「マールをマールで突き合わせる」と

$$29 + 28x = 169$$

「二十九を百六十九から突き合わせ」ると

$$28x = 140$$

$$x = 5$$

よって,「他辺に近いものからの底辺の補完」は

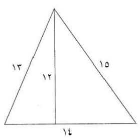
$$14 - 5 = 9$$

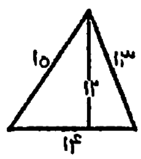
---

[87]「突き合わせなさい」と訳した alqi は語根 laqiya の Ⅳ 2nd sg. ipv. m. ここでは，左辺と右辺で同類項を向かい合わせて簡約する（または，両辺から等しいものを除去する），という操作を表す．一般にこの操作は「ムカーバラ」と呼ばれる（鈴木 [1987: 322] 参照）.

[88] في ثلاثة] L_{ed}, om. W_{ed}

[89] この部分は「垂線」（‘amūd）の語源説明．本来 ‘amūd は「柱」「杭」「棒」などを意味する．

[90] وهذه صورتها] L_{ed}, وذلك ضورتها W_{ed}; 

] L_{ed}, 

W_{ed}

ここで，$x = 5$ を (3.1) に代入して

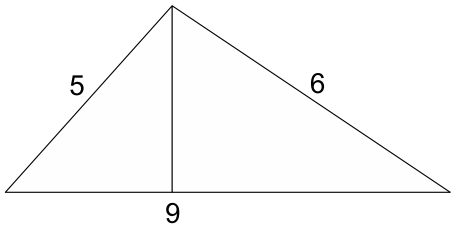
$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

したがって，不等辺鋭角三辺形の面積 S は

$$S = 12 \times \frac{14}{2} = 12 \times 7 = 84$$

…………………………………………………………………………

223, 8 三番目の種類は鈍角［三辺形］である．それ（鈍角三辺形）は鈍角を持つ[91]ものであり，各辺が異なる数から成る三辺形である．その［三辺形］は一辺が六，一辺が五，一辺が九から成る．それ（鈍角三辺形）の面積は[92]それの垂線とそれの石が落ちる所から知られる．[93]この三辺形の石が[94]落ちる所は，それ（三辺形）の内部において，最も長い辺以外には落ちない．それ（最も長い辺）を底辺としなさい．もしもあなたがより小さな二辺のうちの一つを底辺とするなら，それの石が落ちる所はそれ（三辺形）の外部に落ちる．それの石が落ちる所とそれの垂線は，鋭角［三辺形］において私があなたに実演した例に基づいて，そして，その類推（qiyās）[95]に基づいて知られる．



225, 4 そしてこれがそれ（鈍角三辺形）の図．[96]

⋯ Note ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

p. 223, l. 8–p. 225, l. 4. 例題：鈍角三辺形の面積．具体的な計算手順は示されていないが，不等辺鋭角三角形の例（p. 221, l. 1–p. 223, l. 7）から「類推」すれば次の通り．

$$h = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2} \tag{3.1}$$

$$h = \sqrt{6^2 - (9 - x)^2} = \sqrt{36 - (81 - 18x + x^2)} = \sqrt{-45 + 18x - x^2} \tag{3.2}$$

(3.1) と (3.2) を自乗して「はち合わせ」ると

$$25 - x^2 = -45 + 18x - x^2$$

$$x = \frac{35}{9}$$

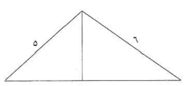
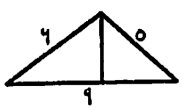
[91] لها] $\mathrm{W_{ed}}$, فيها $\mathrm{L_{ed}}$

[92] تكسير ها] $\mathrm{L_{ed}}$, تكسير هذه $\mathrm{W_{ed}}$

[93] 直訳は「それ（鈍角三辺形）の面積の知識はそれの垂線とそれの石が落ちる所からである」．

[94] حجر] $\mathrm{L_{ed}}$, <حجر> $\mathrm{W_{ed}}$

[95] qiyās はイスラーム法の用語であり,「類推および類推による判断抽出」を意味する.「キヤース」．『岩波イスラーム辞典』．岩波書店, 2009, p. 308. Gandz [1932: 81] と Rashed [2009: 224] はそれぞれ “computation”, “mode of inference” と訳す．ここでは暫定的に qiyās を「類推」と和訳した．

[96] ] $\mathrm{L_{ed}}$, 

$\mathrm{W_{ed}}$

ここで，$x = \frac{35}{9}$ を (3.1) に代入して

$$h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{35}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{800}{81}} = \frac{2\sqrt{200}}{9}$$

よって，鈍角三辺形の面積 S は

$$S = \frac{2\sqrt{200}}{9} \times \frac{9}{2} = \sqrt{200} = 14.142\ldots$$

垂線の足は,「最も長い辺」を底辺とした場合は三辺形の「内部」に落ち,「より短い二辺のうちの一つ」を底辺とした場合は三辺形の「外部」に落ちる，とされる．これは鈍角三辺形の性質，または一種の定義と考えることができる．

· ·

§ 3.11. ［円］

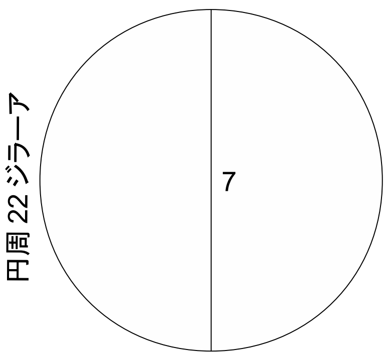
諸々の円—既に[97]私たちはそれの性質（ṣifa）とそれの面積[98]を書物の冒頭[99]において 225, 5
完了した—については，それらの中には一つの円がある．それ（円）の直径は七ジラーアであり，二十二ジラーアがそれ（円）を囲む．実に，それ（円）の面積は，あなたが直径の半分，すなわち三と半分をそれ（円）を囲む周の半分，すなわち十一ジラーア[100]に掛けることである．そして三十八ジラーア[101]と半分になり，それがそれ（円）の面積である．

· · · Note ·

p. 225, ll. 5–9. 例題：円の面積．$S = \frac{7}{2} \times \frac{22}{2} = 3\frac{1}{2} \times 11 = 38\frac{1}{2}$ ḏirā‘-s. ここには「書物の冒頭」（p. 205, ll. 8–11）に示された公式 $S = \frac{d}{2} \times \frac{c}{2}$ が用いられている．

· ·

もしもあなたが望むなら，直径，すなわち七を自乗しなさい．四十九になる．それ（四十九）からそれの七分の一とそれの七分の一の半分，すなわち十と半分を引きなさい．三十八と半分が残る．それ（三十八と半分）がそれ（円）の面積[102]．そしてこれがそれ（円）の図.[103] 225, 10



· · · Note ·

p. 225, ll. 10–14. 別解．$S = 7^2(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{14}) = 49 - 10\frac{1}{2} = 38\frac{1}{2}$ ḏirā‘-s. ここには「書物の冒頭」（p. 205, ll. 12–13）に示された

[97] قد] L_{ed}, om. W_{ed}

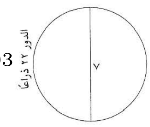
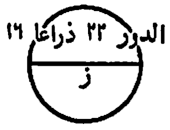
[98] ここには「面積」としか述べられていないが，円周や直径なども含意されていると思われる．

[99] L_{ed} の p. 205, l. 1–p. 207, l. 10 を指す．

[100] ذراعا] L_{ed}, om. W_{ed}

[101] ذراعا] L_{ed}, om. W_{ed}

[102] تكسيرها] L_{ed}, تكسير W_{ed}

[103] ] L_{ed}, 

W_{ed}

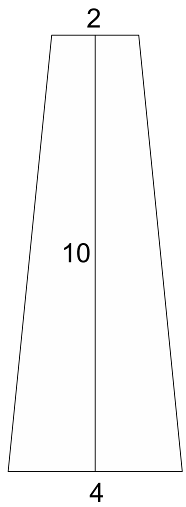
公式 $S = \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) d^2$ が用いられている.

. . . .

§ 3.12. ［錐の柱（角錐台）・円錐］

227, 1 もし語り手（qāil）が[104]次のように言ったなら.[105]錐の柱（‘amūd maḫrūṭ: 角錐台）があって，それの底（asfal）は四ジラーア掛け四ジラーア，それの高さ（irtifā‘）は十ジラーア，それの頭（ra’s）は二ジラーア掛け二ジラーア.

227, 3 既に私たちが示したように，頭が尖らされた（muḥaddad）[106]錐については全て，実に，垂線に掛けられた底面積の三分の一が[107]それの体積である.[108]これ（頭）が尖らされていないから，それ（錐の柱）の頭が消えて，そこ（錐の柱）に頭がなくなるまで，どれ程上昇するかを私たちは知りたい．そして私たちは次のことを知る．それ（角錐）の全長に対するこの十は，四に対する二の量（qadr）に等しく[109]，二は[110]四の半分である．もしもそれ（角錐の全長に対する十）がそのよう（四に対する二）であるなら，十は［全］長の半分であり，その全長は二十ジラーア．私たちは長さを知っているから，底面積の三分の一，すなわち五と三分の一を取り，それ（底面積の三分の一）を［全］長，すなわち二十ジラーアに掛ける．それ（積）は百六ジラーアと三分の二ジラーアに到達する．そして，角錐になる[111]ためにそれ（錐の柱）に加えたものを，それ（百六ジラーアと三分の二ジラーア）から除去する[112]ことを私たちは望む．それは一と三分の一，すなわち二掛け二の面積の三分の一であり，十に掛けられたら[113]十三と三分の一．そしてそれ（十三と三分の一）は，角錐になるために私たちがそれ（錐の柱）に加えたものの体積．もしも私たちがそれ（十三と三分の一）を百六ジラーアと三分の二ジラーアから除去したなら，九十三ジラーアと三分の一が残る．そしてそれ（九十三ジラーアと三分の一）が錐の柱の体積.



227, 16 そしてこれがそれ（錐の柱）の図. [114]

---

[104] قائل] L_{ed}, om. W_{ed}

[105] この文には条件文しかなく，主文がない．Gandz [1932: 82, fn. 53a] は كم تكسيره “which is its volume?” を補っている.

[106] muḥaddad は語根ḥadda の II 形の受動分子であり,「尖らされた」「境界が定められた」「定められた」等を意味する．この部分について，Rashed [2009: 226] と Gandz [1932: 82] はそれぞれ “whose summit is determinate”, “with a pointed top” と訳している.

[107] فهو] L_{ed}, هو W_{ed}

[108] L_{ed} の p. 207, ll. 15–16 に示された角錐・円錐の体積の公式 $V = \frac{1}{3}ch$ を指す.

[109] كقدر] L_{ed}, كعد W_{ed}

[110] والاثنان] L_{ed}, فالاثنان W_{ed}

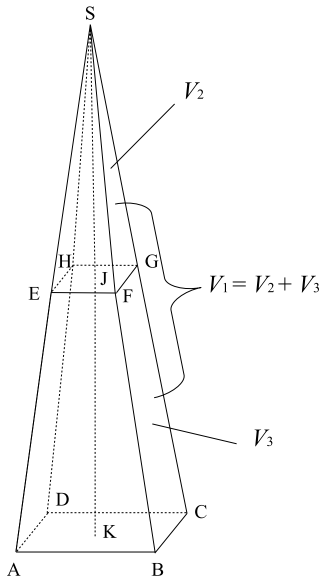
[111] انخرط] L_{ed}, يخرط W_{ed}

[112]「除去する」と訳した nulqiya は語根 laqiya の IV subj. 1st pl. impf. ここでは方程式を解く際の特殊な操作ではなく，引き算を表す（p. 227, l. 17 の alqi 参照）.

[113] مضروب في عشرة] L_{ed}, في عشرة W_{ed}

··· Note ···

p. 227, ll. 1–16．例題：錐の柱（角錐台）の体積．角錐 SABCD の体積を V_1，角錐 SEFGH の体積を V_2，V_1 から V_2 を切り取ってできる角錐台の体積を V_3 とする．このとき，正方形 $ABCD$ の一辺 $=4$，正方形 $EFGH$ の一辺 $=2$，$JK=10$ なので



$$V_1 = \frac{4\times 4}{3} \times 20 = 5\frac{1}{3} \times 20 = 106\frac{2}{3}$$

$$V_2 = \frac{2\times 2}{3} \times 10 = 1\frac{1}{3} \times 10 = 13\frac{1}{3}$$

$$V_3 = V_1 - V_2 = 106\frac{2}{3} - 13\frac{1}{3} = 93\frac{1}{3}$$

ただし，長さ，面積，体積の単位名はいずれも「ジラーア」．フワーリズミーは $JK : SK = EF : AB = 1 : 2$ として，$SK = 20$ と $SJ = 10$ を得ている．以上の求積法は数値も含めて Mishnat ha-Middot の方法と同じであり（Gandz [1932: 32–4] 参照），古代エジプトのモスクワ・パピルス問題 14 では上底 2，下底 4，高さ 6 の場合が扱われる（三浦 [2012: 111–16] 参照）．Katz [1998: 163] はヘロンが次の公式を用いることを指摘する．

$$V = h\left[\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2 + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}(a-b)\right\}^2\right]$$

ここで，a と b はそれぞれ底面と上面の長さ，h は高さ．これと同じ公式はバビロニアの数学でも用いられている（室井 [2000: 88–93] 参照）．

···

もしも錐が円形であるなら，それ（円）の直径の自乗から，それ（直径の自乗）の七分 227, 17
の一とその七分の一の半分を除去しなさい[115]．残ったものがそれ（円錐）の［底］面積．

··· Note ···

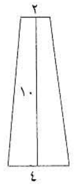
p. 227, ll. 17–18．円錐．フワーリズミーは円錐の底面積の計算 $S = \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) d^2$ にしか言及せず，体積を求めるための残りの操作（$\times \frac{1}{3}h$）を省略している．

···

§ 3.13.　［二等辺三辺形に内接する正方形］

もしも，その二辺が十ジラーア［と］十ジラーアから成る三辺形の土地があって，底辺 229, 1

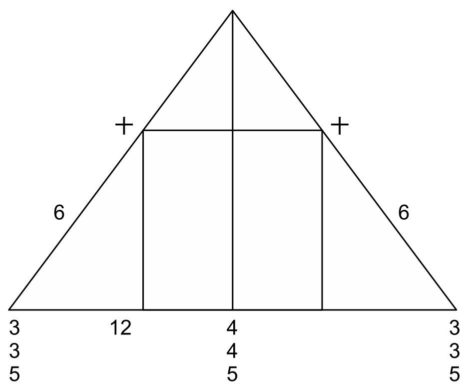
---

114 ] $\mathrm{L_{ed}}$,  $\mathrm{W_{ed}}$

115「除去しなさい」と訳した alqi は語根 laqiya の IV 2nd sg. ipv. m．ここでは引き算を表す（p. 227, l. 10 の nulqiya 参照）．

は十二ジラーア，それ（三辺形）の内側には四辺形の土地があると言われたなら，四辺形の各辺［の長さ］はどれ程か．

229, 3 それの類推（qiyās）は次の通り．あなたは三辺形の垂線を知る．底辺の半分，すなわち六を自乗すると，三十六になる．それ（三十六）を自乗されたより短い二辺の一方，すなわち百から引きなさい．六十四が残る．それ（六十四）の根を取りなさい．八，それが垂線である．それ（三辺形）の面積は四十八ジラーアである．そしてそれ（四十八ジラーア）は，あなたが垂線を底辺の半分，すなわち六に掛けたものである．私たちは四辺形の諸辺のうちの一つをシャイとし，それ（シャイ）を自乗して，マールとなり，それ（マール）を保持する．さらに，私たちは次のことを知る．既に私たちには四辺形の両側から三辺形二つが残っており，それ（四辺形）の上には一つの三辺形が［残っている］．四辺形の両側にある三辺形二つについては，その二つは互いに等しく，それらの二本の垂線は同一（wāḥid）であり，その二本［の垂線］は直角［の状態］にある．それら（三辺形二つ）の面積は，あなたがシャイを六引くシャイの半分に掛けることであり，六シャイ引くマールの半分になる．そしてそれ（六シャイ引くマールの半分）が四辺形の両側にある[116]二つの三辺形全体の面積．



最も高い三辺形の面積については，あなたが八引
229, 13 く[117]シャイ，すなわち［最も高い三辺形の］垂線をシャイの半分に掛けることであり，四シャイ引くマールの半分になる．以上が四辺形の面積と三辺形三つの面積．そしてそれは四十八に等しい十シャイであり，最も大きな三辺形の面積．この［十シャイの］うちの一シャイは四ジラーアと五分の四ジラーアであり，四辺形の各辺［の長さ］である．

231, 3 そしてこれがそれ（三辺形に内接する四辺形）の図．[118]

··· Note ··

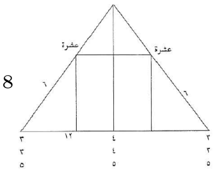
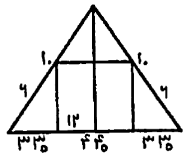
p. 229, l. 1–p. 231, l. 3．例題：二等辺三辺形に内接する正方形．二辺が 10，底辺が 12 の二等辺三辺形の垂線 h と面積 S は

$$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

$$S = 8 \times \frac{12}{2} = 8 \times 6 = 48 \tag{3.1}$$

[116] اللّتان] W_{ed}, اللّتين L_{ed}

[117]「引く」には ġayr という前置詞が用いられている．

[118] ] L_{ed},  W_{ed}

内接する正方形の一辺をシャイ x とおくと，その面積 s_1 は

$$s_1 = x^2$$

得られたマール x^2 を「保持する」．正方形の両側に接する 2 つの三辺形の面積の合計 $s_2 + s_3$ と，上部に接する三辺形の面積 s_4 は

$$s_2 + s_3 = x\left(6 - \frac{x}{2}\right) = 6x - \frac{x^2}{2}$$

$$s_4 = \frac{x}{2}(8 - x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

したがって

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = x^2 + \left(6x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right) = 10x \tag{3.2}$$

(3.1)，(3.2) より

$$10x = 48$$
$$x = 4\frac{4}{5}$$

....

謝辞

大阪経済大学名誉教授の楠葉隆徳先生にはアラビア語原典の読み方をご指導いただいた．神戸大学名誉教授の三浦伸夫先生には『ジャブルとムカーバラ』の先行研究の書誌情報を提供していただき，数学的内容に関する貴重なご助言をいただいた．ここに心より感謝の意を表したい．もし本稿に誤りがあれば，それらは全て筆者の責任である．

参考文献

[1] Gandz, Solomon. “On the Origin of the Term “Root”,” *American Mathematical Monthly* 33, 1926, 261–265.

[2] Gandz, Solomon. “The Mishnat ha Middot and the Geometry of Muhammad ibn Musa al=Khowarizmi,” *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik.* Abteilung A Quellen 2, 1932.

[3] Gandz, Solomon. “The Sources of al-Khowārizmī’s Algebra,” *Osiris* 1, 1936, 263–277.

[4] Katz, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction.* 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1998. 『カッツ数学の歴史』. ヴィクター J. カッツ (著). 上野健爾・三浦伸夫 (監訳). 中根美知代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡 (翻訳). 東京: 共立出版, 2005.

[5] Mathews, Jerold. “A Neolithic Oral Tradition for the van der Waerden/Seidenberg Origin of Mathematics,” *Archive for History of Exact Sciences* 34, 1985, 193–220.

[6] Miura, Nobuo. “The Algebra in the *Liber Abaci* of Leonardo Pisano,” *Historia Scientiarum* 21, 1981, 57–65.

[7] Mušarrafa, ‘Alī Muṣṭafā and Muḥammad Mursī Aḥmad. *Kitāb al-ǧabr wa-'l-muqābala*. Cairo: The Faculty of Science, 1939.
[8] Rashed, Roshdi. *Al-Khwārizmī: Le Commencement de L'Algèbre*. Texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed. Paris: Albert Blanchard, 2007.
[9] Rashed, Roshdi. *Al-Khwārizmī: The Beginnings of Algebra*. Edited, with Translation and Commentary by Roshdi Rashed. London: Saqi, 2009.
[10] Rosen, Frederic. *The Algebra of Mohammed ben Musa*, edited and translated by Frederic Rosen. London: The Oriental Translation Fund, 1831.
[11] 大塚和夫・小杉泰・小松久男・東長靖・羽田正・山内昌之 (共編).『岩波イスラーム辞典』. 東京: 岩波書店, 2009.
[12] 金原和子.「アル・クワリズミ：代数 << 方程式の解法 >>」.『数学教室』35, 1957, 38–43.
[13] 金原和子.「アル・クワリズミ：代数（つづき）」.『数学教室』36, 1958, 51–56.
[14] 楠葉隆徳.「アラビア数学とインド数学との 2 次方程式解法の幾何学的証明」.『大阪経大論集』52(1), 2001, 255–277.
[15] 鈴木孝典.「第 2 節 アラビアの代数学」. 伊東俊太郎 (編).『中世の数学』数学の歴史 2. 東京: 共立出版, 1987, 322–344.
[16] 三浦伸夫.『古代エジプトの数学問題集を解いてみる』. 東京: NHK 出版, 2012.
[17] 三浦伸夫.『フィボナッチ［アラビア数学から西洋中世数学へ］』双書 15・大数学者の数学. 京都: 現代数学社, 2016.
[18] 室井和男.『バビロニアの数学』. 東京: 東京大学出版会, 2000.