RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B86 (2021), 003–020

超幾何関数と L 関数
Hypergeometric functions and L-functions

By

朝倉政典 *
Masanori Asakura

Abstract

This is a short survey on recent works by Rogers, Zudilin and others, which describe non-critical L-values by certain values of the hypergeometric functions. These were originally conjectured by Boyd from the theory of Mahler measure, while they are based on Beilinson's regulators on higher K-theory. We give an exposition on the works on hypergeometric functions and L-functions from the viewpoint of Beilinson's regulators. We also give a short survey on the author's work which is the p-adic counterpart of them.

§1. はじめに

超幾何関数はガウスに始まる, 長い歴史をもつ関数である. ガウス以降, 多くの研究者がさまざまな一般化を行い, 現在も活発な研究が行われている状況であるが, 本稿では超幾何関数といえば, 下記 §2.1 にあるような一変数の一般超幾何関数を意味するものとする.

複素解析および常微分方程式の一般論が確立された現代においては, 超幾何関数の基礎理論をひと通り修得するのは, それほど困難ではない. 注目すべきは, 超幾何関数の使い勝手の良さと適用範囲の広さ, そして群を抜く公式の数の多さではないかと思われる. 一方, 整数論においてはゼータ関数ないし L 関数が重要な関数として長い歴史をもつ. 奇妙なことに, このふたつの重要な関数について, 両者の接点が研究されたことは (筆者の知る限り) ほとんどなかった. 実際, 両者は大きくかけ離れた対象である. L 関数が極めて整数論的な関数である一方, 超幾何関数は代数幾何学などで多数の応用を有する, いわば幾何に密着した関数といえる. 両者をつなぐことはけして自明でない. L 関数の特殊値を幾何学的に解

Received May 13, 2019. Revised September 24, 2019.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 11G40, 11G05, 14G22, 33C20
Key Words: L 関数, 超幾何関数, p 進 L 関数, p 進超幾何関数
Supported by the JSPS kakenhi kiban(C) 19K03391
* 北海道大学大学院理学研究院 060-0810 札幌市北区
Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan.
e-mail: asakura@math.sci.hokudai.ac.jp

釈しようという発想は数論幾何学のトレンドのひとつだった (今もそうであろう). その最たる例のひとつとして, Beilinson 予想 (§2.4 参照) がある. だから, 幾何に密着した関数である超幾何関数と L 関数の関係を調べようという研究が, 特殊関数論の研究者たちでなく, 整数論の研究者たちによって推進されたことは, むしろ自然な流れだったのかも知れない.

近年, 超幾何関数の特殊値と L 関数の特殊値をつなぐ多くの公式が証明された (そして今も, 一部の研究者たちによって進展中である). これらの研究の出発点は, Boyd による, Mahler 測度と L 関数の特殊値に関する予想であった ([Bo]). この予想を解決しようという過程において, 超幾何関数と L 関数をつなぐ公式が数多く発見された. とりわけ Rogers と Zudilin による研究は重要なブレークスルーだったといえるだろう. 本稿の目的は, 彼らの公式およびその p 進類似の試みについて概説することである. ただし, 本稿ではその証明についてはほとんど触れていない. Rogers-Zudilin 以前にも, Rodriguez Villegas [RV] など, 多くの関連する先行結果が存在するのだが, 割愛させていただいた. これらの研究の背景にあるのは Beilinson 予想であり, それについて解説する方が示唆に富むだろうと考えた. Rogers-Zudilin 型公式の p 進類似は, [A2] において初めて定式化された. そこでは, 対数型 p 進超幾何関数という新しい特殊関数を導入している. 比較のために Dwork の p 進超幾何関数および単数根公式について解説を書いておいた (§3.2). ただし, 両者に直接の関係はない.

本稿は日本語による記事であるから, 人名を除き, できるだけアルファベットを使わず書くように努めた. しかしながら, いくつかの専門用語については適切な邦訳が見当たらないため英語表記をそのまま使用している.

謝辞. 本稿を執筆するにあたり, 大坪紀之氏からは多くの有益な助言を得た. 大坪氏に深甚なる謝意を表したい.

§2. 超幾何関数と L 関数の特殊値の公式

§2.1. 超幾何関数

K を標数 0 の体とする. 整数 $n \geq 0$ および $a \in K$ に対し, Pochhammer 記号 $(a)_n$ を次で定義する.

$$(a)_0 := 1, \quad (a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1),\ n \geq 1.$$

$a_i, b_j \in K, b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対し, べき級数

$$ {}_sF_{s-1}\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_s \\ b_1, \dots b_{s-1} \end{matrix} : t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_s)_n}{(b_1)_n \cdots (b_{s-1})_n} \frac{t^n}{n!} \in K[[t]]. \tag{2.1}$$

を **(一般) 超幾何級数**という. 特に $s=2$ のとき, **ガウス超幾何級数**という. $K=\mathbb{C}$ のとき, (有限級数でない限り) これは収束半径 1 のべき級数となり, 従って開円板 $\{|t|<1\}$ において正則関数を定める. 微分作用素

$$P := D(D+b_1-1)\cdots(D+b_{s-1}-1) - t(D+a_1)\cdots(D+a_s), \quad D := t\frac{d}{dt}$$

とおくと, 超幾何級数 $F(t)$ は

$$P(F(t))=0$$

を満たす. $Py=0$ は $t=0,1,\infty$ で確定特異点をもつ常微分方程式である. 従って, 常微分方程式の一般論より, 超幾何級数 (2.1) は全平面に解析接続され, $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ で局所正則な多価関数になる. また特異点 $t=0,1,\infty$ における局所的な表示は, t^a, $\log t$ を用いて表される (Frobenius の方法). こうして解析接続された関数を (一般) 超幾何関数とよんで区別するが, 一方で (2.1) を最初から超幾何関数とよんでいる文献も多い. さらに, 多価関数というのは特殊値を論じる上で扱いに支障をきたすので, しばしば, 複素平面内の半直線 $\mathbb{R}_{\geq 1}$ で切って, 超幾何関数を $-\pi\leq\arg(1-z)<\pi$ における正則な一価関数として与える ([NIST, 15.1] など). べき級数としての超幾何関数, 多価関数としての超幾何関数, 一価関数としての超幾何関数, これらは本来区別してよぶべきであるが, 一緒くたに "超幾何関数" とよんでいる文献も少なからず見受けられる. 本稿でも, 厳密な呼称の使い分けは行わないが, すべて文脈から判断できるので混乱の恐れはないと思う.

§ 2.2. 楕円曲線の L 関数

E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とする. p を素数とする. E が p で良い還元 (good reduction) をもつときは

$$1-a_p+p=\sharp E(\mathbb{F}_p)$$

によって整数 a_p を定義する. 悪い還元 (bad reduction) をもつときは, 分裂的乗法的還元 (split multiplicative reduction) をもつとき $a_p=1$, 分裂的でない乗法的還元 (non-split multiplicative reduction) をもつとき $a_p=-1$, それ以外のとき $a_p=0$ と定める. このとき

$$L(E,s)=\prod_{p:\text{good}}(1-a_pp^{-s}+p^{1-2s})^{-1}\prod_{p:\text{bad}}(1-a_pp^{-s})^{-1},\quad \operatorname{Re}(s)>\frac{3}{2}$$

を E の L 関数という. 右辺の Euler 積は, l 進コホモロジーを使えば, 次のように記述することができる. $D_p\subset\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を p における分解群, $I_p\subset D_p$ を惰性群, $\phi_p\in D_p/I_p\cong\widehat{\mathbb{Z}}$ を (arithmetic) Frobenius とする. p と異なる素数 l をひとつとり,

$$P_p(T):=\det(1-\phi_p^{-1}T\mid H^1_{\text{ét}}(E\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}_l)^{I_p})$$

を l 進コホモロジーにおける Frobenius ϕ_p^{-1} の固有多項式とする (これは l の取り方によらない). このとき,

$$L(E,s)=\prod_{p:\text{all}}P_p(p^{-s})^{-1}.$$

E と E' が $\mathbb{Q}$ 上同種であれば, l 進コホモロジーが一致することから, $L(E,s)=L(E',s)$ であることが従う. 逆に $L(E,s)=L(E',s)$ であれば, E と E' は $\mathbb{Q}$ 上同種である (Faltings).

重さ $k\geq 2$ の正規化された尖点形式 $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$ に対して, f の L 関数は

$$L(f,s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=(2\pi)^s\Gamma(s)^{-1}\int_0^{\infty}f(it)t^{s-1}dt$$

と定義される. 任意の $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対し, E の導手を N とするとき, 重さ 2, レベル N の Hecke eigen new form f がただひとつ存在して,

$$L(E,s)=L(f,s)$$

が成り立つ (Wiles, Taylor, Breuil, Conrad, Diamond). 従って, $L(E,s)$ は全平面に解析接続されて一価正則関数になり, また関数等式を満たす.

§2.3. 超幾何関数と L 関数の特殊値に関する Rogers-Zudilin 公式

Rogers と Zudilin は, [RZ] などいくつかの文献において, 楕円曲線の L 関数の $s=2$ における特殊値と, 超幾何関数の特殊値を関係付ける公式を多数証明した. そのうちの一部を抜粋する.

定理 2.1.

(1) ([RZ, Theorem 2]) E を導手 24 の $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とする[1]. このとき

$$L(E,2)=\frac{\pi^2}{12}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,\frac{3}{2}\end{matrix};\frac{1}{4}\right).$$

(2) ([R, (43)]) E を導手 27 の $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とする[2]. このとき

$$L(E,2)=\frac{\pi^2}{81}\left(4\log 6+\frac{1}{27}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{4}{3},\frac{5}{3},1,1\\2,2,2\end{matrix};-\frac{1}{8}\right)\right).$$

Rogers と Zudilin が動機としたのは, Mahler 測度と L 関数の特殊値についての Boyd 予想 [Bo] であった. Boyd は, Mahler 測度と Dirichlet L 関数の特殊値に関する Smyth の先行研究 [Sm] を受けて, それを楕円曲線の L 関数など, 高次元化する予想を定式化した. Boyd 予想に関しては, Deninger [De], Rodriguez Villegas [RV], Bertin [Ber], Brunault [Bru], Lalín-Rogers [LR], 大坪 [O1] など, 多くの人たちによる先行結果が存在していた. Rogers-Zudilin [RZ] の注目すべき点は, ([RZ] の冒頭に書いてあるように) 初等的に証明する方法を与えたことではないかと思われる. 実際, それがゆえに, 先行結果に比して, より多数の公式を得ることができたし, また Samart [Sa], 伊東良純 [It] などの研究が続いたといえるだろう. 本稿では, L 関数の特殊値を超幾何関数を用いて表示する公式を総称して **Rogers-Zudilin 型公式**とよぶことにする. さて, すべての Rogers-Zudilin 型公式に共通するのは, それが “各個撃破” によって証明されているという点である. 従って例えば, 無限個の楕円曲線の族 $\{E_i\}_i$ に対して証明されたという報告は, 今のところ存在しない (Rogers-Zudilin 型公式が有限個しかないという意味ではない. 例えば (2.3) をみよ.). その理由は, 証明の方法による. E の導手を N とする. このとき, 重さ 2, レベル N の Hecke eigen new form f があり,

$$L(E.s)=L(f,s)=(2\pi)^s\Gamma(s)^{-1}\int_0^\infty f(it)t^{s-1}dt$$

[1] 導手 24 の $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線は同種を除いてひとつしかない. $y^2=x(1-x)(1+3x)$ など.
[2] 同じく同種を除いてひとつしかない. $x^3+y^3=1$ など.

が成り立つのであった. [RZ] の証明では, 右辺の積分を, 初等的だが巧妙な変数変換を行うことによって, 超幾何関数が現れる形へと式変形する. その際, モジュラー形式のテータ関数表示を頻繁に使用する. 従って, N がある程度小さくないと証明は困難であるし, また N を一般にして議論することはほとんど不可能である.

§2.4. Beilinson 予想

超幾何関数と L 関数は全く異なる関数である. にもかかわらず, 特殊値に関してのみ, Rogers-Zudilin 型公式が存在するというのは, まことに不思議なことである. 実は, この背景にあるのは, 数論幾何学における, **Beilinson 予想**という Dirichlet の解析類数公式の高次元化に相当する予想である. これは, 一般の代数多様体に対して定式化された予想であるが, ここでは, Beilinson 予想を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線の K_2 に対してのみ解説する (定理 2.1 の背景を理解するには, それで十分である).

E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とする. $H^i_{\mathscr{M}}(E,\mathbb{Q}(j))$ を E のモチヴィックコホモロジーとする. モチヴィックコホモロジーの一般的定義は, ここでは述べない. 我々に必要なのは $(i,j)=(2,2)$ のときである. このときには, シンボルによる具体的な表示がある. $\mathbb{Q}(E)$ を E の関数体とする. 可換群

$$K_2^M(\mathbb{Q}(E)) := \mathbb{Q}(E)^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(E)^\times / \langle f \otimes (1-f); f \neq 0,1\rangle$$

を Milnor の K_2 という. $f\otimes g$ の同値類の定める $K_2^M(\mathbb{Q}(E))$ の元を $\{f,g\}$ と書く. $\{f,g\}$ たちの線形和を K_2 シンボルとよぶ (本稿では, Milnor K_2 の演算を加法的に書く). P を E の閉点, $k(P)$ を剰余体とするとき, tame symbol 写像

$$\tau_P : K_2^M(\mathbb{Q}(E)) \longrightarrow k(P)^\times, \quad \{f,g\} \longmapsto (-1)^{\mathrm{ord}_P(f)\,\mathrm{ord}_P(g)} \left(\frac{f^{\mathrm{ord}_P(g)}}{g^{\mathrm{ord}_P(f)}}\right)(P)$$

が定まる. $\tau := \bigoplus_P \tau_P$ とおく. このとき

$$H^2_{\mathscr{M}}(E,\mathbb{Q}(2)) \cong \mathrm{Ker}\left[\tau : K_2^M(\mathbb{Q}(E)) \to \bigoplus_P k(P)^\times\right] \otimes \mathbb{Q}$$

という自然な同型があることが知られている. 今後, モチヴィックコホモロジー $H^2_{\mathscr{M}}(E,\mathbb{Q}(2))$ と右辺を同一視する. $H^i_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \subset H^i_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Q}(j))$ を Scholl [Sc] の意味での整部分 (integral part) を表すとする. $X=E$ が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合は, $\mathscr{E}$ を $\mathbb{Z}$ 上の固有かつ平坦で正則なモデルとするとき,

$$H^i_{\mathscr{M}}(E,\mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Im}[H^i_{\mathscr{M}}(\mathscr{E},\mathbb{Q}(j)) \to H^i_{\mathscr{M}}(E,\mathbb{Q}(j))]$$

で与えられる. 一般の X に対しては de Jong のオルタレーションを使って定義するが, 本稿においては必要ないので省略する.

次に Beilinson のレギュレーター写像を定義しよう. $E(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, E)$ で E の複素点の集合を表し, これを自然に複素トーラスとみなす. $F_\infty : E(\mathbb{C}) \to E(\mathbb{C})$ を複素共

役 $z \mapsto \bar{z}$ の引き起こす反正則写像 (anti-holomorphic map) とする (F_∞ を infinite Frobenius 写像と呼ぶ). 定義より $F_\infty^2 = \mathrm{id}$ である. F_∞ は $E(\mathbb{C})$ の Betti (co)homology 群に作用する. $(-)^\pm$ でそれぞれ F_∞ が ± 1 倍で作用する部分を表すとする. このとき **実レギュレーター写像 (real regulator map)** は

$$\mathrm{reg}_\mathbb{R} : H^2_\mathscr{M}(E, \mathbb{Q}(2)) \longrightarrow H^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{R})^- = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^-, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{reg}_\mathbb{R}\{f, g\} = \left[\gamma \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \log|f| d\arg(g) - \log|g| d\arg(f)\right]$$

と定義される[3]. ここで $\arg(z) := \mathrm{Im}\log(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ である.

予想 2.2 (Beilinson 予想)**.** 次が成り立つ.

(1) $H^2_\mathscr{M}(E, \mathbb{Q}(2))_\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$,

(2) 零でない $\xi \in H^2_\mathscr{M}(E, \mathbb{Q}(2))_\mathbb{Z}$ について,

$$\mathrm{reg}_\mathbb{R}(\xi) \sim_{\mathbb{Q}^\times} L'(E, 0)$$

が成り立つ. ここで $x \sim_{\mathbb{Q}^\times} y$ は $x = ay$ ($\exists a \in \mathbb{Q}^\times$) を意味する. L 関数の関数等式により, $L'(E, 0) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \pi^{-2}L(E, 2)$ であることに注意しておく.

上の予想は, 部分的には Beilinson 自身によって解決されていることを付記しておく.

定理 2.3 ([Be, Theorem 1.3])**.** ある $\xi \in H^2_\mathscr{M}(E, \mathbb{Q}(2))_\mathbb{Z}$ が存在して, $\mathrm{reg}_\mathbb{R}(\xi) \sim_{\mathbb{Q}^\times} L'(E, 0)$ が成り立つ[4].

いくつかの楕円曲線については, 実レギュレーターを超幾何関数を用いて記述することが可能である[5].

定理 2.4 ([A1, Thm. 5.2])**.** $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ とする. E_α を $y^2 = x(1-x)(1-\alpha x)$ で定義される楕円曲線とする.

$$\xi := \left\{\frac{y - x + 1}{y + x - 1}, \frac{\alpha x^2}{(x-1)^2}\right\} \in H^2_\mathscr{M}(E_\alpha, \mathbb{Q}(2))$$

とおく. $\alpha > 0$ のとき

$$\mathrm{reg}_\mathbb{R}(\xi) = \mathrm{Re}\left[-\log 16 + \log(1-\alpha) + \frac{1-\alpha}{4}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1 \\ 2, 2, 2\end{matrix}; 1 - \alpha\right)\right].$$

---

[3] 通常, レギュレーター写像は, 高次チャーン類を用いて定義される (e.g. [Sch]). その場合, 上の積分は "定義" ではなく "公式" であるから証明が必要である (その証明は, 例えば [Ra, 4.4.4] に書かれている).

[4] こうして, 予想 2.2 (2) は解決されたといってよいが, (1) は全く未解決である. 意外にこれが難しい. $H^2_\mathscr{M}(E, \mathbb{Q}(2))_\mathbb{Z}$ が有限次元かどうかすら分かっていない.

[5] Mahler 測度を超幾何関数と対数関数によって表示するという研究は, Rodriguez Villegas らによる. 一方, Deninger が指摘したように, いくつかのケースにおいては, Mahler 測度は実レギュレーターと解釈できる. こうして実レギュレーターと超幾何関数の関係は (一部の専門家には) すでに知られていた. ただし, [A1] では, より広範な楕円曲線に対し, Mahler 測度を経由せず, 直接関係を示している.

また $\alpha < 0$ のとき

$$\mathrm{reg}_{\mathbb{R}}(\xi) = (1-\alpha)^{-\frac{1}{2}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, \frac{3}{2}\end{matrix}; (1-\alpha)^{-1}\right).$$

[A1] では, その他のタイプの楕円曲線 ($3y^2 = 2x^3 - 3x^2 + \alpha$ など) に対しても同様な超幾何関数による記述が得られている（しかしながら, すべての $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の実レギュレーターが, このような超幾何表示を持つわけではないように思われる).

Rogers-Zudilin の公式 (定理 2.1) を振り返ってみよう. 定理 2.4 で $\alpha = -3$ の場合を考える. このとき ξ は整部分に含まれるシンボルであることが簡単な議論によって分かる. Beilinson 予想 2.2 が成り立つと仮定しよう. 従って $\mathrm{reg}_{\mathbb{R}}(\xi) \sim_{\mathbb{Q}^\times} L'(E,0) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \pi^{-2}L(E,2)$ であるが, これは上記の定理より, 定理 2.1 (1) に相当する. 定理 2.1 (2) も [A1, Thm.5.6] を使えば, やはり Beilinson 予想から従う.

[A1, 5.4] では, Beilinson 予想の観点から期待される Rogers-Zudilin 型公式がいくつか記載されている. 例えば, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線

$$E_n : 3y^2 = 2x^3 - 3x^2 + 1 - \frac{1}{6n}$$

とするとき, Milnor シンボル

$$\xi_n = \left\{\frac{y-x+1}{y+x-1}, 12n(x-1)^3\right\} \in H^2_{\mathscr{M}}(E_n, \mathbb{Q}(2))$$

が, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について整であることから, Beilinson 予想を認めれば,

$$L'(E_n,0) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \log(2^5 3^4 n) - \frac{5}{216n}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{7}{6}, \frac{11}{6}, 1, 1 \\ 2, 2, 2\end{matrix}; \frac{1}{6n}\right) \tag{2.3}$$

が従う.

§3.　対数型 p 進超幾何関数と p 進 Rogers-Zudilin 型公式

Rogers-Zudilin 型公式の p 進類似は, [A2] において, 初めて定式化された. この節では, 最初に Dwork の p 進超幾何関数について解説し, その後, 対数型 p 進超幾何関数を導入する. 両者に直接の関係はないが, 比較のためにそうする. 最後に p 進 Rogers-Zudilin 型公式についての予想を紹介する.

§3.1.　Dwork のプライム

$a \in \mathbb{Z}_p$ に対し, 整数 $l \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ で $a + l \equiv 0 \bmod p$ なるものをとり,

$$a' := \frac{a+l}{p}$$

とおく. これを **Dwork のプライム**という. Dwork の i 次プライム $a^{(i)}$ を $a^{(i)}=(a^{(i-1)})'$, $a^{(0)}=a$ で定義する. 定義より

$$a=-l_0-l_1p-l_2p^2-\cdots-l_np^n-\cdots,\quad l_i\in\{0,1,\ldots,p-1\}$$

を p 進展開とすれば,

$$a^{(i)}=-l_i-l_{i+1}p-\cdots-l_{i+n}p^n-\cdots$$

である. 従って例えば, 次が分かる.

$$a^{(i)}=a^{(j)}\ (\exists i<j)\quad\Longleftrightarrow\quad a\in\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_p. \tag{3.1}$$

§3.2. Dwork の p 進超幾何関数

$s\geq 1$ を正整数とする. p 進整数の s 個の組 $\underline{a}=(a_i)\in\mathbb{Z}_p^s$ に対して, 超幾何級数

$$F_{\underline{a}}(t):={}_sF_{s-1}\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_s\\1,\ldots,1\end{matrix};t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n}{n!}\cdots\frac{(a_s)_n}{n!}t^n\in\mathbb{Z}_p[[t]]$$

と書く. このとき **Dwork の p 進超幾何関数**は次で定義されるべき級数である

$$F_{\underline{a}}^{\mathrm{Dw}}(t):=\frac{F_{\underline{a}}(t)}{F_{\underline{a}'}(t^p)}\in\mathbb{Z}_p[[t]].$$

ここで $\underline{a}'=(a_1',\ldots,a_s')$ (a_i' は Dwork のプライム) とおいた.

定理 3.1 (Dwork の合同関係, [Dw, p.37, Thm.2])**.** $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ に対して, 記号 $[f(t)]_{<k}$ (または単に $f(t)_{<k}$) を $[f(t)]_{<k}:=\sum_{n=0}^{k-1}a_nt^n$ で定義する. このとき

$$F_{\underline{a}}^{\mathrm{Dw}}(t)\equiv\frac{[F_{\underline{a}}(t)]_{<p^n}}{[F_{\underline{a}'}(t^p)]_{<p^n}}\mod p^n\mathbb{Z}_p[[t]]. \tag{3.2}$$

この定理が意味することは, Dwork の p 進超幾何関数が, 右辺の有理関数列の, ノルム $||f(t)||:=\sup\{|a_i|_p\mid i\geq 0\}$ に関する極限になっているということである. このような関数を p 進正則関数 (または Krasner 解析関数) と呼ぶ ([FP, 2.2]) [6]. より正確には次のようになる.

$$[F_{\underline{a}}(t^p)]_{<p}=1,\quad [F_{\underline{a}}(t^p)]_{<p^n}\equiv\left([F_{\underline{a}}(t)]_{<p^{n-1}}\right)^p\mod p\mathbb{Z}_p[[t]]$$

[6] 以下に述べるように, 一部の場合, 例えば $F^{\mathrm{Dw}}_{\frac12,\frac12}(t)$ などはリジッドコホモロジーの Frobenius の作用に現れるという事実から, Dwork の合同関係を経由せずに p 進正則関数 (より強く p 進過収束関数) であることが分かる. ただし, 具体的な特殊値計算を行うには, Dwork の合同関係なしでは何もできない.

に注意すれば, (3.2) より, $\underline{a}^{(i)}=(a_1^{(i)},\dots,a_s^{(i)})$ として

$$\begin{aligned}[F_{\underline{a}}(t)]_{<p^n} &\equiv [F_{\underline{a}}(t)]_{<p}\Big([F_{\underline{a}'}(t)]_{<p^{n-1}}\Big)^p \\ &\equiv [F_{\underline{a}}(t)]_{<p}\Big([F_{\underline{a}'}(t)]_{<p}\Big)^p\Big([F_{\underline{a}^{(2)}}(t)]_{<p^{n-1}}\Big)^{p^2} \\ &\;\;\vdots \\ &\equiv \prod_{i=0}^{n-1}\Big([F_{\underline{a}^{(i)}}(t)]_{<p}\Big)^{p^i}\end{aligned}$$

modulo $p\mathbb{Z}_p[[t]]$ が成り立つ. $\mathbb{F}_p$ 係数の多項式の集合 $\{[F_{\underline{a}^{(i)}}(t)]_{<p} \bmod p\mathbb{Z}_p[t] \mid i\geq 1\}$ は有限集合であるから, $h(t):=\prod_{i=1}^N F_{\underline{a}^{(i)}}(t)_{<p}$ $(N\gg 1)$ として

$$F_{\underline{a}}^{\mathrm{Dw}}(t)\in\mathbb{Z}_p\langle t,h(t)^{-1}\rangle := \varprojlim_{n\geq 1}\Big(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[t,h(t)^{-1}]\Big)\hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[t]]$$

を得る. 従って $\mathbb{C}_p:=\widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$, $O_{\mathbb{C}_p}:=\{|t|_p\leq 1\}$ とすると, $F_{\underline{a}}^{\mathrm{Dw}}(t)$ は $\mathbb{C}_p$ のアフィノイド部分集合 $\{|t|_p\leq 1\}\cap\{|h(t)|_p\geq 1\}$ 上の p 進正則関数である. このとき, 特殊値 $F_{\underline{a}}^{\mathrm{Dw}}(\alpha)$ を合成写像

$$\mathbb{Z}_p\langle t,h(t)^{-1}\rangle\to O_{\mathbb{C}_p}\langle t,h(t)^{-1}\rangle\to O_{\mathbb{C}_p}\langle t,h(t)^{-1}\rangle/(t-\alpha)\cong O_{\mathbb{C}_p}$$

の像として定義できる. より具体的に書くと,

$$F_{\underline{a}}^{\mathrm{Dw}}(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\left(\left.\frac{[F_{\underline{a}}(t)]_{<p^n}}{[F_{\underline{a}'}(t^p)]_{<p^n}}\right|_{t=\alpha}\right)\in O_{\mathbb{C}_p} \tag{3.3}$$

である. ここで右辺の括弧内は有理関数の $t=\alpha$ における通常の代入値を表す.

Dwork の p 進超幾何関数は, 次の定理の研究と並行に導入された関数だったと思われる.

定理 3.2 (Dwork の単数根公式, [Dw, Theorem (8.1)], [VdP, 7.14])**.** $p\neq 2$ とする. E を $\mathbb{F}_p$ 上定義された楕円曲線 $y^2=x(1-x)(1-\alpha x)$, $(\alpha\in\mathbb{F}_p\setminus\{0,1\})$ とする. E は通常楕円曲線 (ordinary elliptic curve), つまり $p\nmid a_p$ であると仮定する. $\epsilon\in\mathbb{Z}_p$ を E の単数根 (unit root), すなわち, Frobenius 固有多項式 x^2-a_px+p の根であって $|\epsilon|_p=1$ を満たすものとする ($p\nmid a_p$ だから, Hensel の補題より, このような ϵ が唯一つ存在する). このとき

$$\epsilon=(-1)^{\frac{p-1}{2}}F_{\frac12,\frac12}^{\mathrm{Dw}}(\hat{\alpha}).$$

ここで $\hat{\alpha}\in\mathbb{Z}_p^\times$ は α の Teichmüller 持ち上げ (すなわち $\hat{\alpha}^{p-1}=1$ かつ $\hat{\alpha}\equiv\alpha \bmod p$ を満たす唯一の $\hat{\alpha}\in\mathbb{Z}_p$) である.

Dwork の単数根公式の証明の概略を説明しよう. $A=\mathbb{Z}_p[t,(t-t^2)^{-1}]$ とし, $A^\dagger=\mathbb{Z}_p[t,(t-t^2)^{-1}]^\dagger$ を弱完備化とする. より具体的に, $A^\dagger$ は $\mathbb{Z}_p\langle t,(t-t^2)^{-1}\rangle$ の部分環であっ

て, $f(t)=\sum_n a_n t^n=\sum_n b_n(t-1)^n\in\mathbb{Z}_p\langle t,(t-t^2)^{-1}\rangle$ について

$$f(t)\in A^\dagger \quad\Longleftrightarrow\quad \exists r\in\mathbb{R}_{>1},\ \lim_{n\to\infty}|a_n|_p r^n=\lim_{n\to\infty}|a_{-n}|_p r^n=\lim_{n\to\infty}|b_n|_p r^n=0.$$

$A^\dagger_{\mathbb{Q}}:=A^\dagger\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ と書く. $S=\operatorname{Spec}A$ とし, 楕円曲線の Legendre 族

$$f:X\longrightarrow S,\quad X_t=f^{-1}(t):y^2=x(1-x)(1-tx)$$

を考える. $a\in\mathbb{Z}_p$ を $a\not\equiv 0,1 \bmod p$ なるものとし, $\mathbb{Z}_p$ に値をもつ点 $t=a\in S(\mathbb{Z}_p)=\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p,S)$ におけるファイバー $f^{-1}(\operatorname{Spec}A/(t-a))$ を X_a と書く. また $X_{\mathbb{F}_p}:=X\times_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p$, $X_{a,\mathbb{F}_p}:=X_a\times_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p$ 等と書く. このとき リジッドコホモロジー群

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X_{\mathbb{F}_p}/S_{\mathbb{F}_p})$$

が定まる (cf. [LS]). これは $A^\dagger_{\mathbb{Q}}$ 加群であり, Frobenius 写像 $\sigma:A^\dagger\to A^\dagger$ を固定したとき, リジッドコホモロジー $H^*_{\mathrm{rig}}(X_{\mathbb{F}_p}/S_{\mathbb{F}_p})$ 上の Frobenius 写像 Φ が定まり, これは σ 線形写像 (i.e. $\Phi(g(t)u)=g(t)^\sigma\Phi(u)$) である. $H^*_{\mathrm{dR}}(X/S)=H^*(X_{\mathrm{zar}},\Omega^\bullet_{X/S})$ を代数的 de Rham コホモロジーとする. このとき, 自然な同型 (比較同型)

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X_{\mathbb{F}_p}/S_{\mathbb{F}_p})\cong H^*_{\mathrm{dR}}(X/S)\otimes_A A^\dagger_{\mathbb{Q}}$$

がある. $a\in\mathbb{Z}_p$ を $a\not\equiv 0,1 \bmod p$ かつ $\sigma(t)|_{t=a}=a$ を満たすとする. このとき, X_a の代数的 de Rham コホモロジーには, 同型

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X_a/\mathbb{Q}_p)=H^*_{\mathrm{dR}}(X/S)\otimes_A A^\dagger_{\mathbb{Q}}/(t-a)A^\dagger_{\mathbb{Q}} \tag{3.4}$$

によって, 自己準同型写像 $\Phi_a=\Phi|_{X_a}$ が引き起こされる. このとき Φ_a の固有値が, $X_{a,\mathbb{F}_p}$ の Frobenius 固有値である (実際, (3.4) はクリスタリンコホモロジー $H^*_{\mathrm{crys}}(X_{a,\mathbb{F}_p}/\mathbb{Z}_p)\otimes\mathbb{Q}$ と同型であり, Φ_a はクリスタリンフロベニウスに一致する. クリスタリンフロベニウスの固有多項式は, l 進コホモロジー $H^*_{\text{ét}}(X_a\times_{\mathbb{F}_p}\overline{\mathbb{F}}_p,\mathbb{Q}_l)$ のフロベニウスの固有多項式に一致する). 以下では

$$\sigma(t)=t^p,\quad a:=\hat{\alpha}\ (\text{Teichmüller 持ち上げ}) \tag{3.5}$$

とする.

$$F(t):={}_2F_1\left({\frac12,\frac12 \atop 1};t\right)$$

とおく. このとき

$$X_a\times_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p \text{が通常楕円曲線} \quad\Longleftrightarrow\quad F(a)_{<p}\not\equiv 0 \mod p \tag{3.6}$$

に注意しよう (e.g. [AEC, V, Thm. 4.1 (a)]). Gauss-Manin 接続

$$\nabla:\mathbb{Q}_p((t))\otimes_A H^1_{\mathrm{dR}}(X/S)\longrightarrow\mathbb{Q}_p((t))dt\otimes_A H^1_{\mathrm{dR}}(X/S)$$

を考える. 微分作用素 $D := \nabla_{\frac{d}{dt}}$ とおく. べき級数 $f(t)$ の形式微分を $f'(t)$ と書く. Picard-Fuchs 微分方程式の計算により, ∇ の核は,

$$\widehat{\eta} := (t-t^2)F'(t)\omega - (t-t^2)F(t)D(\omega), \quad \omega := \frac{dx}{y}$$

で生成される 1 次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間であることが示される (ここは標準的な代数幾何の議論). (3.5) の σ を $\mathbb{Q}_p((t))$ 上の自己準同型写像に延長し, それに伴い Φ も $\mathbb{Q}_p((t)) \otimes_A H^1_{\mathrm{dR}}(X/S)$ 上の自己準同型写像に延長しておく. このとき

$$\Phi(\widehat{\eta}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\widehat{\eta} \tag{3.7}$$

が成り立つ ([Dw, 6.29], [VdP, p.55] [7]). また一方, [Dw, (3.14)] より,

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \equiv \frac{F'(t)_{<p^n}}{F(t)_{<p^n}} \mod p^n\mathbb{Z}_p[[t]] \tag{3.8}$$

従って, $(1/2)' = 1/2$ (§3.1 参照) に注意して

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \in \mathbb{Z}_p\langle t, F(t)^{-1}_{<p}\rangle =: \widehat{B}$$

である. 従って

$$\widetilde{\eta} := F(t)^{-1}\widehat{\eta} \in H^1_{\mathrm{dR}}(X/S) \otimes_A \widehat{B} \tag{3.9}$$

となり[8], 従って, (3.7) より

$$\Phi(\widetilde{\eta}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{F(t)}{F(t^p)}\widetilde{\eta} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}F^{\mathrm{Dw}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t)\,\widetilde{\eta} \in H^1_{\mathrm{dR}}(X/S) \otimes_A \widehat{B}$$

を得る. $\widehat{B}$ の素イデアル $(t-\widehat{\alpha})$ による還元をとることで, p 進数

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}F^{\mathrm{Dw}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}) \in \mathbb{Z}_p \tag{3.10}$$

は $\Phi_{\widehat{\alpha}}$ のふたつある固有値のひとつであることが分かった. Dwork の合同関係および (3.6) より

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}F^{\mathrm{Dw}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}F(\alpha)_{<p} \not\equiv 0 \mod p$$

ゆえ, (3.10) は p 進単数である. すなわち (3.10) は, $\Phi_{\widehat{\alpha}}$ の単数根 ϵ である.

---

[7] (3.7) の証明について, [Dw] と [VdP] の議論は全く異なる. [VdP] にある議論では, (明記されていないが) 対数的クリスタリンコホモロジーの理論を必要とする.

[8] [VdP] では, (3.8) を経由せずに, 全く異なる方法で (3.9) を導いている. この方が理論的に美しく, また適用範囲が広いなどの利点があるが, やはり, 具体的な数値計算をするには, Dwork の合同関係 (3.8) が必要である.

§ 3.3. p 進ポリガンマ関数

複素ポリガンマ関数とは

$$\psi^{(r)}(z) := \frac{d^r}{dz^r}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right), \quad r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

と定義される複素関数である. この関数の p 進類似は, J. Diamond [D] によって定義された. 一方, [A2] では, それとは異なる関数を定義し[9], それを使って対数的 p 進超幾何関数を定義している.

[A2, §2] に従って, p 進ポリガンマ関数 $\psi_p^{(r)}(z)$ を定義しよう. $\log : \mathbb{C}_p^\times \to \mathbb{C}_p$ を岩澤対数関数とする. これは $\log(p) = 0, \log(xy) = \log(x) + \log(y)$ および

$$\log(1-px) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} x^n, \quad x \in O_{\mathbb{C}_p}$$

で特徴付けられる連続な準同型写像である. p 進 Euler 定数を次で定義する[10].

$$\gamma_p := -\lim_{s\to\infty} \frac{1}{p^s} \sum_{0\leq j<p^s, p\nmid j} \log(j).$$

整数 $r \in \mathbb{Z}$ および $z \in \mathbb{Z}_p$ に対し,

$$\widetilde{\psi}_p^{(r)}(z) := \lim_{n\in\mathbb{Z}_{>0}, n\to z} \sum_{1\leq k<n, p\nmid k} \frac{1}{k^{r+1}}$$

とおく. ここで "$n \to z$" は p 進距離について極限をとることを意味する. $\zeta_p(z)$ は p 進ゼータ関数とする ([CS, 4.2]). これは, $\mathbb{Z}_p \setminus \{1\}$ 上の連続関数で,

$$\zeta_p(-k) = (1-p^k)\zeta(-k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

で特徴づけられる関数である. r 次 p 進 ポリガンマ関数を

$$\psi_p^{(r)}(z) := \begin{cases} -\gamma_p + \widetilde{\psi}_p^{(0)}(z) & r = 0 \\ -\zeta_p(r+1) + \widetilde{\psi}_p^{(r)}(z) & r \neq 0 \end{cases}$$

で定義する. $r = 0$ のときは $\psi_p(z)$ と略記し, これを p 進ディガンマ関数という.

§ 3.4. 対数型 p 進超幾何関数

k を標数 $p > 0$ の完全体とし, $W = W(k)$ を Witt 環とする. F を W 上の Frobenius 写像とする. $c \in 1 + pW$ をひとつ固定し, Frobenius 写像 $\sigma : W[[t]] \to W[[t]]$ を $\sigma(t) = ct^p$, $\sigma(a) = F(a)$ $(a \in W)$ で定める. このとき対数型 p 進超幾何関数を

$$\mathscr{F}_{\underline{a}}^{(\sigma)}(t) := \frac{1}{F_{\underline{a}}(t)}\left[\psi_p(a_1) + \cdots + \psi_p(a_s) + s\gamma_p - p^{-1}\log(c) + \int_0^t (F_{\underline{a}}(t) - F_{\underline{a}'}(t^\sigma))\frac{dt}{t}\right] \in W[[t]]$$

[9] ただし定義は似ている.

[10] Diamond [D, §7] の p 進 Euler 定数と $p/(p-1)$ 倍ずれている.

で定義する ([A2, 3.1]).

対数型 p 進超幾何関数は, 複素関数

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}_{\underline{a}}(t) := &\sum_{i=1}^{s}\psi(a_i)+s\gamma+\log(t)+\int_0^t (F_{\underline{a}}(t)-1)\frac{dt}{t}\\ =&\sum_{i=1}^{s}\psi(a_i)+s\gamma+\log(t)+a_1\cdots a_s t\cdot {}_{s+2}F_{s+1}\left(\begin{matrix}a_1+1,\ldots,a_s+1,1,1\\ 2,\ldots,2\end{matrix};t\right).\end{aligned}$$

の p 進版という位置づけである. ここで, $\psi(z)=\psi^{(0)}(z)$ は複素ディガンマ関数, $\gamma=-\psi(0)$ はオイラー定数である. $s=2$ のときは, $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}_{\underline{a}}(t)$ は実レギュレーターを記述する関数として現れる ([A1, 3.2,4.2]).

Dwork の p 進超幾何関数のときと同様に, 次の合同関係が成り立つ.

定理 3.3 ([A2, Thm.3.2])**.** 各 $a_i \notin \mathbb{Z}_{\le 0}$ とする. $\mathscr{F}^{(\sigma)}_{\underline{a}}(t)=G_{\underline{a}}(t)/F_{\underline{a}}(t)$ と書く. $c\in 1+2pW$ のとき,

$$\mathscr{F}^{(\sigma)}_{\underline{a}}(t)\equiv\frac{G_{\underline{a}}(t)_{<p^n}}{F_{\underline{a}}(t)_{<p^n}} \mod p^nW[[t]]$$

が成り立つ. $p=2, c\in 1+2W$ ($c\in 1+4W$ と限らない) のときは, 上は modulo $p^{n-1}W[[t]]$ で成り立つ.

§3.5. サントミックレギュレーター

W を標数 p の完全体の Witt 環とする. Y を W 上スムーズで射影的なスキームとする. このとき, Fontaine-Messing のサントミックコホモロジー

$$H^i_{\mathrm{syn}}(Y,\mathbb{Q}_p(j))$$

が定義される ([FM], [Ka]). これは, 実レギュレーター写像に現れる Deligne-Beilinson コホモロジーの p 進版と考えてよい. 実レギュレーター写像のときと同様に, サントミックレギュレーター写像

$$\mathrm{reg}_{\mathrm{syn}} : H^i_{\mathscr{M}}(Y,\mathbb{Q}(j)) \longrightarrow H^i_{\mathrm{syn}}(Y,\mathbb{Q}_p(j))$$

が定義される ([NN], [Bes, §7]). この論説では, $(i,j)=(2,2)$ のときのみを扱う. このときは, $K=\mathrm{Frac}\,W$ を商体とし, $Y_K:=Y\times_W K$ としたとき,

$$H^2_{\mathrm{syn}}(Y,\mathbb{Q}_p(2))\cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y_K/K)$$

という自然な同型があるので, サントミックレギュレーター写像は

$$\mathrm{reg}_{\mathrm{syn}} : H^2_{\mathscr{M}}(Y,\mathbb{Q}_p(2)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(Y_K/K) \tag{3.11}$$

となる (前述の実レギュレーター写像 (2.2) と比較せよ).

Dwork の p 進超幾何関数は, 単数根公式 (定理 3.2) の研究と並行して発見された p 進特殊関数であった. 一方, 対数型 p 進超幾何関数は, サントミックレギュレーター写像 (3.11) を記述しようという過程で生じた関数である. 次は, [A2] における主結果のひとつである.

定理 3.4 ([A2, Thm.4.8]). $p>2$ を素数, $W=W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を Witt 環, $K:=\mathrm{Frac}\,W$ を商体とする. $S=\mathrm{Spec}\,W[t,(t-t^2)^{-1}]$ とおく. $f:X\to S$ を S 上の楕円曲線の Legendre 族で, 一般ファイバー $X_t=f^{-1}(t)$ は $y^2=x(1-x)(1-(1-t)x)$ で定義されているとする. $\alpha\in W$ を $\alpha\not\equiv 1,0 \bmod p$ を満たすものとする. Milnor K_2 のシンボル

$$\xi_\alpha=\left\{\frac{y-1+x}{y+1-x},\frac{\alpha x^2}{(1-x)^2}\right\}\in H^2_{\mathscr{M}}(X_\alpha,\mathbb{Q}(2)) \tag{3.12}$$

とおく. $\sigma(t)=\alpha^{F-p}t^p$ (F は W 上の Frobenius) とする. このとき, 自然な同型

$$H^2_{\mathrm{syn}}(X_\alpha,\mathbb{Q}_p(2))\cong H^1_{\mathrm{dR}}(X_\alpha/K)=K\frac{dx}{y}+K\frac{xdx}{y}$$

の下, 次が成り立つ.

$$\mathrm{reg}_{\mathrm{syn}}(\xi_\alpha)=\mathscr{F}^{(\sigma)}_{\frac12,\frac12}(\alpha)\frac{dx}{y}+C\cdot\widetilde{\eta}|_{X_\alpha},\quad \exists C\in K,$$

ここで $\widetilde{\eta}|_{X_\alpha}$ は (3.9) にある第 2 種微分の X_α への制限である.

定理 3.4 の証明の概略を簡単に説明する. シンボル

$$\xi=\left\{\frac{y-1+x}{y+1-x},\frac{tx^2}{(1-x)^2}\right\}\in H^2_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Q}(2))$$

に対応して, リジッドコホモロジーの完全列

$$0\longrightarrow H^1_{\mathrm{rig}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}/S_{\overline{\mathbb{F}}_p})\longrightarrow M_\xi(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}/S_{\overline{\mathbb{F}}_p})_{\mathrm{rig}}\longrightarrow\mathscr{O}_{S_K}\longrightarrow 0$$

が定まる ([AM, Proposition 2.11]). リジッドコホモロジーと de Rham コホモロジーの比較同型を用いることで, $1\in\mathscr{O}_{S_K}$ の持ち上げ $e_\xi\in M_\xi(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}/S_{\overline{\mathbb{F}}_p})_{\mathrm{rig}}$ が唯一つ定まる. こうして,

$$e_\xi-\Phi(e_\xi)\in H^1_{\mathrm{rig}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}/S_{\overline{\mathbb{F}}_p})\cong H^1_{\mathrm{dR}}(X_K/S_K)\otimes_A A^\dagger_{\mathbb{Q}} \tag{3.13}$$

が定まる. このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}_{\mathrm{syn}}(\xi|_{X_\alpha})&=e_\xi-\Phi(e_\xi)\bmod (t-\alpha)A^\dagger_{\mathbb{Q}}\\&\in H^1_{\mathrm{dR}}(X_K/S_K)\otimes_A A^\dagger_{\mathbb{Q}}/(t-\alpha)A^\dagger_Q=H^1_{\mathrm{dR}}(X_\alpha/K)\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, (3.13) を計算すればよいが, そのために Gauss-Manin 接続 ∇ を用いて

$$\begin{aligned}\nabla\Big(e_\xi-\Phi(e_\xi)\Big)&=\nabla(e_\xi)-\Phi(\nabla(e_\xi))\\&=\frac{dt}{t}\frac{dx}{y}-\Phi\left(\frac{dt}{t}\frac{dx}{y}\right)\end{aligned}$$

を利用する. ここで上の等式中, $\Phi\nabla=\nabla\Phi$ および $\nabla(e_\xi)=d\log(\xi)$ を用いた. リジッドコホモロジー $H^1_{\mathrm{rig}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}/S_{\overline{\mathbb{F}}_p})$ における Frobenius 写像 Φ の記述は, 定理 3.2 の証明において計算されているので, その結果を用いて (3.13) を計算していく (その詳細は高度にテクニカルなので略する).

[A2] では, より一般に, 次の代数曲線を一般ファイバーにもつようなファイブレーション (超幾何ファイブレーション) $f:X\to\mathbb{P}^1$ に対しても同様な結果を得ている.

- **(Gauss 型)** $y^N=x^A(1-x)^B(1-(1-t)x)^{N-B}$
- **(Fermat 型)** $(x^N-1)(y^M-1)=t$
- **(楕円ファイブレーション)** $3y^2=2x^3-3x^2+1-t$ など (cf. [A1, §5])

特に Fermat 型超幾何ファイブレーションに対して定理 3.4 と同様な公式を得たことで, Fermat 曲線の Ross の K_2 シンボルのサントミックレギュレーターの超幾何表示が得ることができた[11].

定理 3.5 ([A2, Thm.4.19])**.** $N,M\geq 2$ を整数, p を $N|(p-1)$ かつ $M|(p-1)$ を満たす素数とする.

$$F: z^N+w^M=1$$

を $W=W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 上定義された Fermat 曲線とする. 次のシンボルを Ross のシンボルという ([Ro]),

$$\xi:=\{1-z,1-w\}\in H^2_{\mathscr{M}}(F,\mathbb{Q}(2)).$$

このとき, 自然な同型

$$H^2_{\mathrm{syn}}(F,\mathbb{Q}_p(2))\cong H^1_{\mathrm{dR}}(F/K)=\bigoplus_{(i,j)\in I}K\cdot z^{i-1}w^{j-M}dz,$$

$$I:=\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid 0<i<N,\, 0<j<M,\, \frac{i}{N}+\frac{j}{M}\neq 1\right\},$$

の下,

$$\mathrm{reg}_{\mathrm{syn}}(\xi)=\sum_{\frac{i}{N}+\frac{j}{M}<1}\mathscr{F}^{(\sigma)}_{\frac{i}{N},\frac{j}{M}}(1)M^{-1}z^{i-1}w^{j-M}dz+\sum_{\frac{i}{N}+\frac{j}{M}>1}C_{i,j}z^{i-1}w^{j-M}dz,\quad \exists C_{i,j}\in K$$

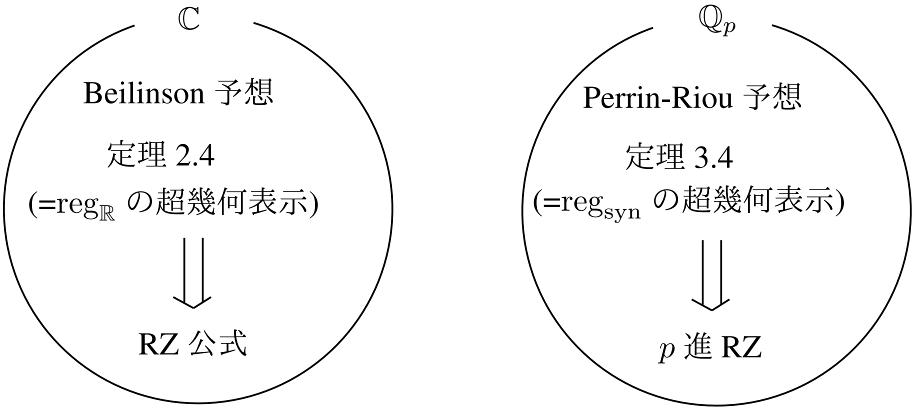
が成り立つ. ここで $\sigma(t)=t^p$ とおいた.

§3.6. p 進 Rogers-Zudilin 型公式

Dwork の p 進超幾何関数の特殊値は, 楕円曲線の固有値を与えるのであった (定理 3.2). 一方, 対数型 p 進超幾何関数の特殊値は, 楕円曲線の p 進 L 関数の特殊値を与えると予想される.

[11] Ross の K_2 シンボルの実レギュレーターの超幾何表示は, [O2] で与えられている.

§2.4 で述べたように, Rogers-Zudilin 公式は, Beilinson 予想 2.2 および定理 2.4 から ($\mathbb{Q}^\times$ 倍を除いて) 従うのであった. 定理 2.4 の p 進類似が定理 3.4 である. Beilinson 予想の p 進類似は, Perrin-Riou により定式化された ([P, 4.2.2] または [Co, Conj.2.7]). それは, 標語的な言い方をすれば, “サントミックレギュレーター=p 進 L 関数の特殊値” という内容の予想である[12]. Rogers-Zudilin 公式が Beilinson 予想を背景としたように, Rogers-Zudilin 型公式の p 進類似は Perrin-Riou 予想を背景としたものになっている.



予想 3.6. $p > 2$ とする. $\alpha \in \mathbb{Q}$ とし, 楕円曲線 $X_\alpha : y^2 = x(1-x)(1-(1-\alpha)x)$ は p で良い通常還元 (good ordinary reduction) をもつとする. $\epsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$ を X_α の p での単数根とする. $L_p(X_\alpha, \chi, s)$ を Mazur, Swinnerton-Dyer [MS] の p 進 L 関数とする. ω を Teichmüller 指標とする. シンボル (3.12) の制限 $\xi|_{X_\alpha}$ が整部分に含まれるとする (つまり $\xi|_{X_\alpha} \in H^2_{\mathscr{M}}(X_\alpha, \mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$) のとき[13], p によらない有理数 $C_\alpha \in \mathbb{Q}^\times$ が存在して

$$(1-p\epsilon^{-1})\mathscr{F}^{(\sigma_\alpha)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\alpha) = C_\alpha L_p(X_\alpha, \omega^{-1}, 0)$$

が成り立つ. ここで $\sigma_\alpha(t) = \alpha^{1-p}t^p$ とおいた.

計算機による数値計算により, C_α は次の値になると予想される.

α	-1	2	4	8	16	-2	-4	-8	-16
C_α	-2	-1	-1	$-\frac{1}{4}$	-2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-4

[A2, 4.9] では, 上と同様な予想が

$$\mathscr{F}^{(\sigma_\alpha)}_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}(\alpha),\quad \mathscr{F}^{(\sigma_\alpha)}_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}(\alpha),\quad \mathscr{F}^{(\sigma_\alpha)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(\alpha),\quad \mathscr{F}^{(\sigma_\alpha)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\alpha),\quad \mathscr{F}^{(\sigma_\alpha)}_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}}(\alpha),\quad \mathscr{F}^{(\sigma_\alpha)}_{\frac{1}{6},\frac{5}{6}}(\alpha)$$

[12] ただしこの言い方は問題がある. 楕円曲線など特別な場合を除き, モチーフの p 進 L 関数は, 今のところ定義の候補すらないからである. 定義がなければ予想を定式化することはできない. Perrin-Riou は, 逆転の発想で, “サントミックレギュレーター=p 進 L 関数の特殊値” をみたすような p 進 L 関数 (ないし p 進測度) の存在をもって予想とした. それってずるくね？と思った読者がおられるかも知れないから, 一言断っておく. p 進測度の存在をもって予想とする以上, 等号に $\mathbb{Q}^\times$ 倍の曖昧さを残してはならない. Perrin-Riou は, この “$\mathbb{Q}^\times$ 部分” を, Beilinson レギュレーターを使って正確に記述している. その記述の精密さは, さすがであると言わざるを得ない. Beilinson 予想の “$\mathbb{Q}^\times$ 部分” を記述したものというと, Bloch-Kato の玉河数予想がよく知られているが, Perrin-Riou 予想はそれとは内容的に異なる.

[13] $\alpha = -1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{16}$ のときは整部分に含まれる. これ以外の α でそうなる例を筆者は知らない.

に対しても定式化されている.

参考文献

[A1] Asakura, M., Regulators of K_2 of Hypergeometric Fibrations, *Res. Number Theory* **4** (2018), no. 2, Art. 22, 25 pp.

[A2] ———, New p-adic hypergeometric functions and syntomic regulators, arXiv.1811.03770.

[AM] Asakura, M. and Miyatani, K., F-isocrystal and syntomic regulators via hypergeometric functions, arXiv:1711.08854.

[Be] Beilinson A.A., Higher regulators of modular curves, *Contemp. Math.* **55**, 1–34 (1986)

[Ber] Bertin, J.M., Mahler's measure and L-series of K3 hypersurfaces, *Mirror symmetry.* V, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 3–18.

[Bes] Besser, A., Syntomic regulators and p-adic integration. I. Rigid syntomic regulators, *Proceedings of the Conference on p-adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations* (Jerusalem, 1998). *Israel J. Math.* **120** (2000), part B, 291–334.

[Bo] Boyd, D., Mahler's measure and special values of L-functions, *Experiment. Math.* **7** (1998), 37–82.

[Bru] Brunault, F., Version explicite du théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_1(N)$, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **343** (2006), 505–510.

[CS] Coates, J. and Sujatha, R., *Cyclotomic fields and zeta values*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+113 pp.

[Co] Colmez, P., *Fonctions L p-adiques*. Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99, Astérisque No. 266 (2000), Exp. No. 851, 3, 21–58.

[De] Deninger, C., Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbb{Z}^n$-actions, *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), 259–281.

[D] Diamond, J., The p-adic log gamma function and p-adic Euler constants, *Trans. Amer. Math. Soc.* **233** (1977), 321–337.

[Dw] Dwork, B., p-adic cycles, *Publ. Math. IHES*, tome **37** (1969), 27–115.

[FM] Fontaine, J.-M. and Messing, W., p-adic periods and p-adic etale cohomology, *Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry* (Ribet, K. A. ed.), Contemp. Math. **67**, pp. 179–207, Providence, Amer. Math. Soc., 1987.

[FP] Fresnel, J., and van der Put, M., *Rigid analytic geometry and its applications*. Progress in Mathematics, **218**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[It] Ito, R., The Beilinson conjectures for CM elliptic curves via hypergeometric functions, *Ramanujan J.* **45** (2018), no. 2, 433–449.

[Ka] Kato, K., On p-adic vanishing cycles (application of ideas of Fontaine-Messing). *Algebraic geometry, Sendai, 1985* (Adv. Stud. Pure Math. 10), pp. 207–251, Amsterdam, North-Holland, 1987.

[LR] Lalín, M. and Rogers, M., Functional equations for Mahler measures of genusone curves, *Algebra Number Theory* **1**, 87–117 (2007).

[MS] Mazur, B. and Swinnerton-Dyer, P., Arithmetic of Weil curves, *Invent. Math.* **25** (1974) 1–61.

[NN] Nekovar, J., and Niziol, W., Syntomic cohomology and p-adic regulators for varieties over p-adic fields, With appendices by Laurent Berger and Frederic Deglise. *Algebra Number Theory* **10** (2016), no. 8, 1695–1790.

[O1] Otsubo, N., Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions, *J. Number Theory* **131** (2011), 648-660.

[O2] ______, On the regulator of Fermat motives and generalized hypergeometric functions, *J. reine angew. Math.* **660** (2011), 27-82.

[P] Perrin-Riou, B., *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229** (1995).

[VdP] Van der Put, M., The cohomology of Monsky and Washnitzer, *Introductions aux cohomologies p-adiques* (Luminy, 1984). Mem. Soc. Math. France (N.S.) No. 23 (1986), 33–59.

[Ra] Ramakrishnan, D., Regulators, algebraic cycles, and values of L-functions. *Algebraic K-theory and algebraic number theory* (Honolulu, HI, 1987), 183–310, Contemp. Math., **83**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[RV] Rodriguez Villegas, F., *Modular Mahler measures. I*, Topics in number theory (University Park, PA, 1997), Math. Appl., vol. 467, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 17–48.

[R] Rogers, M., Hypergeometric formulas for lattice sums and Mahler measures, *Int. Math. Res. Not.* (2011), 4027–4058.

[RZ] Rogers, M. and Zudilin, W., From L-series of elliptic curves to Mahler measures, *Compos. Math.* **148** (2012), no. 2, 385–414.

[Ro] Ross, R., K_2 of Fermat curves and values of L-functions, *C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I.* **312** (1991), 1–5.

[Sa] Samart, D., Mahler measures as linear combinations of L-values of multiple modular forms, *Canad. J. Math.* **67** (2015), no. 2, 424–449.

[Sch] Schneider. P., Introduction to the Beilinson conjectures, *Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions* (M. Rapoport, N. Schappacher and P. Schneider, ed), Perspectives in Math. Vol.4, 1–35, 1988.

[Sc] Scholl, A. J., Integral elements in K-theory and products of modular curves, *The arithmetic and geometry of algebraic cycles*, Banff, 1998, (Gordon, B. B., Lewis, J. D., Müller-Stach, S., Saito, S., Yui, N. ed) NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, 467–489, Dordrecht, Kluwer, 2000.

[AEC] Silverman, J., *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate Texts in Math. **106**, Springer.

[LS] Le Stum, B., *Rigid cohomology.* Cambridge Tracts in Mathematics, **172** Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xvi+319 pp.

[Sm] Smyth, C.J., On measures of polynomials in several variables, *Bull. Austral. Math. Soc.,* **23** (1981), 49–63.

[NIST] *NIST Handbook of Mathematical Functions.* Edited by Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert and Charles W. Clark. Cambridge Univ. Press, 2010.