RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B86 (2021), 021–030

$p = 2$ に対する岩澤理論について
Iwasawa theory for $p = 2$

By

熱田　真大 *
Mahiro Atsuta

Abstract

本稿では, 古典的なイデアル類群の $p = 2$ に対する岩澤理論について紹介する. §2 では岩澤加群の有限部分加群について, §3 では岩澤主予想について, §4 ではイデアル類群の Fitting イデアルについて p が奇素数の時と比較しながら知られている結果を述べる.
In this paper, we introduce classical Iwasawa theory for class groups with $p = 2$. In §2, we discuss about non-trivial finite submodules of Iwasawa modules. In §3, we discuss about the Iwasawa main conjecture. In §4, we discuss about Fitting ideals of class groups.

§1. 序論

古典的な岩澤理論とは, 素数 p を固定し, 代数体の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の最大不分岐アーベル p-拡大または最大 p-外不分岐アーベル p-拡大ガロア群 (岩澤加群) などの構造を調べるものである. この岩澤理論において, $p = 2$ の場合はしばしば例外視されることがある. 例えば岩澤理論において, CM 体のイデアル類群や岩澤加群をプラス成分とマイナス成分に分けて考えることが多いがこの時, $p = 2$ の場合のみ二つに直和分解しない. そのためプラス成分、マイナス成分の定義には $p = 2$ の場合のみ複数の定義が存在し、それらは若干の差が存在する. さらに、CM 体上の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大上の不分岐岩澤加群のマイナス商は $p = 2$ の場合にのみ、非自明な有限部分加群を持つことがある (§2 参照). これは、$p = 2$ の場合にのみ起こる特別な現象といえる. また, 岩澤理論の中で最も重要な予想として, 岩澤加群の特性イデアルと p 進 L 関数が一致するという岩澤主予想と呼ばれるものがあるが, これは $p = 2$ の場合のみ, 未だに完全には証明されていない (§3 参照).

Received April 5, 2019. Revised May 29, 2019.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 11R23
Key Words: *Iwasawa theory, ideal class group, p-adic L-function*
Supported by RIMS
*慶應義塾大学理工学部数理科学科
Department of Mathematics, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan
e-mail: atsuta0128@a7.keio.jp

このように $p=2$ が例外視される理由は数多くあり, 筆者には一般的に $p=2$ の場合は奇素数の時より難しいと思われる.

本稿では, 古典的な代数体の $p=2$ に対する岩澤理論について奇素数の場合と比較しながら述べる. §2 では CM 体上の不分岐岩澤加群のマイナス成分の有限部分加群について述べる. p が奇素数の時は, 岩澤によって不分岐岩澤加群のマイナス成分は非自明な有限部分加群を持たないことが証明されているが（定理 2.1）, $p=2$ の時はそのようなことは成り立たない. このことについて詳しく述べる. §3 では岩澤理論において最も重要なものの一つである岩澤主予想について紹介し, どこまで証明がなされているのかを述べる. p が奇素数の時は完全に証明されているが, $p=2$ の時は部分的にしか証明されていない. これについて詳しく紹介する. §4 では岩澤主予想の応用のひとつであるイデアル類群の Fitting イデアルについて知られている結果を述べる.

§ 2. 岩澤加群の有限部分加群について

p を素数とする. 代数体 F に対し, F_∞ で F の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大, F_n をその n-th layer, A_{F_n} を F_n のイデアル類群の p-Sylow 部分群とする ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). また, F_∞ の岩澤加群 X_{F_∞} を A_{F_n} のノルム写像に対する射影極限

$$X_{F_\infty} := \varprojlim_n A_{F_n}$$

で定義する. この X_{F_∞} には自然に $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_\infty/F)]]$ が作用する. 岩澤によって, X_{F_∞} は有限生成ねじれ $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_\infty/F)]]$-加群になることが示されている ([12]).

K を CM 体, j を複素共役とする. 岩澤加群 X_{K_∞} のマイナス成分 $X_{K_\infty}^-$ を

$$X_{K_\infty}^- := X_{K_\infty}/(1+j)X_{K_\infty}$$

で定義する. $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ とおく. $X_{K_\infty}^-$ の最大有限 Λ-部分加群を $X_{K_\infty,\mathrm{fin}}^-$ で表すことにする. p が奇素数の時, $X_{K_\infty,\mathrm{fin}}^-$ については以下のことが知られている.

定理 2.1 (岩澤, Proposition 13.26 in [21]). p を奇素数とする. この時, $X_{K_\infty,\mathrm{fin}}^- = 0$ である.

しかし, $p=2$ の時は, 定理 2.1 のようなことは成り立たない. K が虚二次体の時, Ferrero によって以下のことが証明されている.

定理 2.2 (Ferrero, Theorem 5 in [4]). $p=2$, K を虚二次体で $K_\infty/\mathbb{Q}_\infty$ で 2 が分岐しているものとする. この時, K が $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ 以外であれば,

$$X_{K_\infty,\mathrm{fin}}^- \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となる. また, $X_{K_\infty,\mathrm{fin}}^-$ は 2 の上の素イデアルの類によって生成される.

このように $p=2$ の時は, 岩澤加群のマイナス成分は非自明な有限部分加群を持つことがある．著者は [1] で定理 2.2 をある仮定の下, CM 体に一般化したので, それについて述べる．

$p=2$, K^+ を K の最大実部分体, $\mathscr{S}$ を 2 の上の K_∞/K_∞^+ で分岐している K^+ の素点と無限素点の集合とする．任意の有限次拡大 F/K^+ に対し, $\mathscr{S}(F)$ で $\mathscr{S}$ の上の F の素点の集合を表すことにする．また, $\mathrm{Cl}_{F,\mathscr{S}}$ で F の $\mathscr{S}$-イデアル類群を表すことし, その 2-Sylow 部分群を $A_{F,\mathscr{S}}$ とおき, $D_{F,\mathscr{S}}=\ker(A_F\to A_{F,\mathscr{S}})$ とする．さらに $\mathcal{O}_F^\times$ (resp. $\mathcal{O}_{F,\mathscr{S}}^\times$) を F の単数群, (resp. $\mathscr{S}$-単数群) とする．δ_1,δ_2 をそれぞれ

$$\delta_1=\mathrm{rank}_2\Big(\varprojlim_n\big((\mathcal{O}_{K_n,\mathscr{S}}^\times)^{1-j}/(\mathcal{O}_{K_n}^\times)^{1-j})\big)\Big),$$

$$\delta_2=\mathrm{rank}_2\big(\varprojlim_n\ker(D_{K_n^+,\mathscr{S}}\to D_{K_n,\mathscr{S}})\big),$$

と定義する．ここで射影極限はノルム写像によるもので, $\mathrm{rank}_2(A)$ は $A/2A$ の $\mathbb{F}_2$ ベクトル空間としての次元である．$0\le\delta_2\le\delta_1\le 1$ となることに注意する (Remark 1.4 in [1]).

定理 2.3 (Theorem 1.1 in [1])**.** K^+ に対する $p=2$ におけるレオポルド予想が成立すると仮定する．また, 自然な写像 $A_{K_n^+,\mathscr{S}}\to A_{K_n,\mathscr{S}}$ が十分大きな全ての $n\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ に対して単射であると仮定する．この時,

$$X_{K_\infty,\mathrm{fin}}^-=\varprojlim_n D_{K_n}/2\varprojlim_n D_{K_n}\cong\begin{cases}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus d} & (\mu_{2^\infty}\not\subset K_\infty)\\(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus d-\delta_1+\delta_2} & (\mu_{2^\infty}\subset K_\infty),\end{cases}$$

となる．ここで, d は K_∞/K_∞^+ で分岐している 2 の上の素点の個数, μ_{2^∞} は 1 の 2 べき根全体のなす集合である．

$X_{K_\infty,\mathscr{S}}$ を $\mathscr{S}$-イデアル類群の 2 成分のノルムに関する射影極限

$$X_{K_\infty,\mathscr{S}}=\varprojlim_n A_{K_n,\mathscr{S}}$$

で定義し, そのマイナス成分を $X_{K_\infty,\mathscr{S}}^-=X_{K_\infty,\mathscr{S}}/(1+j)X_{K_\infty,\mathscr{S}}$ で定義する．K_∞/K_∞^+ で 2 の上の素点が全て不分岐の時, $X_{K_\infty,\mathscr{S}}=X_{K_\infty}$ であることに注意する．次の結果は, 定理 2.3 を証明するための重要なものである．

定理 2.4 (Theorem 1.3 in [1])**.** $X_{K_\infty,\mathscr{S}}^-$ は非自明な有限部分 Λ-加群を持たない．

定義より自然な全射 $X_{K_\infty}^-\to X_{K_\infty,\mathscr{S}}^-$ があり, その kernel は有限であることがすぐにわかる．この写像の kernel を計算することで, 定理 2.3 を証明することができる．

注意 2.5. 岩澤理論において, 岩澤加群が非自明な有限部分加群を持つかどうかということは大事な問題の一つである．§3 で述べる岩澤主予想というのは岩澤加群の特性イ

デアルと p 進 L 関数が一致するというものであるが, この特性イデアルというのは岩澤加群の有限部分加群の情報を持っていない不変量である. また, Fitting イデアルは特性イデアルと似た不変量であるが, 岩澤加群が非自明な有限部分加群を持つ場合, 両者は一致しない (注意 4.2 参照). つまり, 岩澤加群が非自明な有限部分加群を持つと, その Fitting イデアルは p 進 L 関数と一致しないのである.

§ 3. 岩澤主予想

この節では岩澤主予想を定式化し, どの程度まで証明されているのかについて解説する. 岩澤主予想の定式化には, いくつかのパターンがあるが, ここでは不分岐岩澤加群に対する定式化のみ紹介する. まず最初に, 定式化の準備として Stickelberger 元について簡単に触れる.

k を総実代数体, K/k を有限次アーベル拡大, K を CM 体とする. $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ に対し, $\mathrm{Re}(s) > 1$ で定義される部分ゼータ関数

$$\zeta(s,\sigma) = \sum_{(\mathfrak{a},K/k)=\sigma} N(\mathfrak{a})^{-s}$$

を考える. ここで無限和は K/k の導手 $\mathfrak{f}_{K/k}$ と互いに素で, Artin 記号 $(\mathfrak{a}, K/k) = \sigma$ が σ となるような k の整イデアル $\mathfrak{a}$ をはしり, $N(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ のノルムである. この部分ゼータ関数は全平面に有理型に解析接続され, $s = 1$ を除いて正則になる. 部分ゼータ関数を使って定義される Stickelberger 元

$$\theta_{F/K} = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/k)} \zeta(0,\sigma)\sigma^{-1}$$

を考える. Klingen と Siegel の結果により, $\theta_{K/k} \in \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(K/k)]$ となることが知られている.

補題 3.1 (cf. Lemma 2.1 in [14]). *M を K/k の中間体とし, S_K(resp. S_M) を K/k(resp. M/k) で分岐している k の有限素点の集合とする.*

$$c_{K/M} : \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(K/k)] \longrightarrow \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(M/k)]$$

をガロア群の制限写像によって誘導される自然な準同型写像とする. この時,

$$c_{K/M}(\theta_{K/k}) = \big(\prod_{v\in S_K\setminus S_M} (1-\mathrm{Frob}_v^{-1})\big)\theta_{M/k},$$

が成り立つ. ここで, $\mathrm{Frob}_v \in \mathrm{Gal}(M/k)$ は v の Frobenius 写像である.

p を素数, 任意の代数体 F に対し, F_∞/F を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大, F_n をその n-th layer とする. ここからは簡単のために, $K \cap k_\infty = k$ としておく. $d = [k : \mathbb{Q}]$ とおく.

定理 3.2 (Deligne-Ribet, [3])**.** 十分大きな正の整数 n と, K_n/k と互いに素な任意の整イデアル $\mathfrak{c}$ に対して,

$$(N(\mathfrak{c})-\mathrm{Frob}_{\mathfrak{c}})\theta_{K_n/k}\in 2^{d-1}(1-j)\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_n/k)]$$

が成り立つ. ここで, $j\in\mathrm{Gal}(K_n/k)$ は複素共役である.

自然な制限写像 $c_{K_{n+1}/K_n}:\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(K_{n+1}/k)]\to\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(K_n/k)]$ を考える. 補題 3.1 より, 十分大きな n に対して, $c_{K_{n+1}/K_n}(\theta_{K_{n+1}/k})=\theta_{K_n/k}$ が成り立つ. また, 定理 3.2 により, 以下の二つの性質を満たす元 $\theta_{K_\infty/k}\in\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]])$ の存在がわかる. ここで, $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]])$ は完備群環 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]]$ の全商環である.

(1) 任意の Teichmüller 指標でない奇指標 $\chi\in\widehat{\mathrm{Gal}(K/k)}$ に対し, χ によって誘導される自然な写像 $f_\chi:\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]])\to\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}(\chi)][[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]])$ を考える. この時, $f_\chi(\theta_{K_\infty/k})\in 2^d\mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}(\chi)][[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ となる.

(2) 自然な制限写像によって誘導される準同型 $c_{K_\infty/K_n}:\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]]\to\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/k)]$ を $c_{K_\infty/K_n}:\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]]\theta_{K_\infty/k}\to\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(K_n/k)]$ に拡張する. この時, 十分大きな正の整数 n に対して, $c_{K_\infty/K_n}(\theta_{K_\infty/k})=\theta_{K_n/k}$ が成り立つ.

ここで、岩澤主予想を定式化する. k を総実代数体, χ を Teichmüller 指標でない k に対する一次元 Artin 指標とし, k^χ をそれに対応する体とする (i.e., $\mathrm{Gal}(k^\chi/k)\simeq\mathrm{Im}(\chi)$). k^χ を CM 体と仮定する. 簡単のために $k_\infty\cap k^\chi=k$ とする. $\Lambda_\chi=\mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}(\chi)][[\mathrm{Gal}(k^\chi_\infty/k^\chi)]]$ とおき, $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k^\chi_\infty/k)]]$ が χ で作用するものとする. §2 で定義された岩澤加群 $X_{k^\chi_\infty}$ の χ 成分 $X^\chi_{k^\chi_\infty}$ を $X^\chi_{k^\chi_\infty}=X_{k^\chi_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k^\chi_\infty/k)]]}\Lambda_\chi$ で定義する. また, χ によって誘導される自然な写像 $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k^\chi_\infty/k)]])\to\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}(\chi)][[\mathrm{Gal}(k^\chi_\infty/k^\chi)]])$ による $\theta_{k^\chi_\infty/k}$ の像を $\theta^\chi_{k^\chi_\infty/k}$ とする. χ は Teichmüller 指標でないので, 上の性質 (1) より, $\frac{1}{2^d}\theta^\chi_{k^\chi_\infty/k}\in\Lambda_\chi$ であることに注意する. π を $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}(\chi)]$ の素元とし, $\mu(k^\chi_\infty)=\max\{a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\mid \pi^a|\frac{1}{2^d}\theta^\chi_{k^\chi_\infty/k}\}$ と定義する (μ-不変量). 岩澤主予想は以下のように定式化される.

予想 3.3 (岩澤主予想)**.**

$$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X^\chi_{k^\chi_\infty})=(\frac{1}{2^d}\theta^\chi_{k^\chi_\infty/k}).$$

予想 3.3 は p が奇素数の時は, 完全に証明されている. また, $p=2$ のときもある程度の仮定の下, 証明されている.

定理 3.4 (Greenberg [7], Mazur-Wiles [18], Wiles [22])**.** p を奇素数とする. この時, 予想 3.3 が成り立つ. また, $p=2$ で, $k=\mathbb{Q}$ ならば予想 3.3 が成り立つ.

もう少し詳しく述べておくと, p が奇素数の時, 予想 3.3 は, $k=\mathbb{Q}$ の場合は Mazur, Wiles [18], 一般の総実代数体 k の場合は Wiles [22], Greenberg [7] によって証明されている. p が奇素数の時, Wiles は [22] において, 一般の総実代数体 k に対する予想 3.3 の大部分を証明した. しかし, 指標 χ の位数が p で割れるときは, 両辺の μ-不変量が一致していることは証明していない. この μ-不変量の部分を解決したのが, Greenberg [7] である.

また, $p=2$ で $k=\mathbb{Q}$ の時も Wiles [22] によって証明されている. しかし, $p=2$ で k が一般の総実代数体の時は, 完全には証明されていない. Wiles は [22] で $p=2$ のとき, $\mu(k_\infty^\chi)=0$ の仮定の下, p 進 L 関数が自明な零点を持たない場合にのみ予想 3.3 を証明した. 筆者は最近, $p=2$ の時, $\mu(k_\infty^\chi)=0$ の仮定のみで予想 3.3 が成り立つことを証明した ([2]).

定理 3.5 ([2], Wiles [22]). $p=2$ とする. この時, $\mu(k_\infty^\chi)=0$ ならば予想 3.3 が成り立つ.

注意 3.6. Wiles [22] の総実代数体上の岩澤主予想の証明は, 保型形式 (肥田族) に付随するガロア表現を用いるものであり, アイデアの根本は Mazur-Wiles [18] の手法である. $k=\mathbb{Q}$ の時は, Ferrero-Washington [6] により, $\mu(k_\infty^\chi)=0$ が証明されており (一般の場合は岩澤により成り立つであろうと予想されている), また, Ferrero-Greenberg [5] の結果により, p 進 L 関数の自明な零点ははっきりとわかっている (一般の場合は Gross 予想). 一般の総実代数体上ではこれらの結果は未解決であるが, Wiles は [22] でこの二つの困難を乗り越えて証明している. 筆者は [2] で, $\mu(k_\infty^\chi)=0$ の仮定の下, Wiles [22] と同様の手法で p 進 L 関数が自明な零点を持つ場合の $p=2$ の岩澤主予想を証明した.

注意 3.7. $k=\mathbb{Q}$ の時の岩澤主予想の証明は, Mazur-Wiles [18], Wiles [22] による保型形式 (肥田族) に付随するガロア表現を用いるものと Kolyvagin [13], Rubin (e.g. [19]), Greither [8] によるオイラー系によるものの二種類ある. 後者については, p が奇素数の時は, Kolyvagin [13] の理論を Rubin (e.g. [19]) が発展させて証明され, $p=2$ の場合は Greither [8] によって証明された.

§4. イデアル類群の Fitting イデアルについて

岩澤主予想の精密化の一つとして, イデアル類群の Fitting イデアルを Stickelberger 元を用いて記述するというものがある. まず, Fitting イデアルの定義を述べる ([17] §3 参照).

R を可換環, M を有限表示 R 加群とする. 定義より, ある自然数 $m,n\geq 0$ と完全系列

$$R^m \xrightarrow{\phi} R^n \to M \to 0$$

が存在する.

定義 4.1. M の (0 次) Fitting イデアル $\mathrm{Fitt}_R(M)$ とは, ϕ に対応する行列の $n\times n$ 次小行列式全体が生成する R のイデアルである.

注意 4.2. p を素数, $\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次拡大の整数環, $\Lambda=\mathcal{O}[[T]]$, M を有限生成ねじれ Λ-加群とする. この時, M が非自明な有限部分加群を持たないならば,

$$\mathrm{char}_\Lambda(M)=\mathrm{Fitt}_\Lambda(M)$$

である.

Mazur, Wiles は [18] で, 虚アーベル体 K のイデアル類群のマイナス成分の Fitting イデアルはどうなるであろうかという問題を提起した ([18] Introduction §5). また岩澤主予想の帰結として, $[K:\mathbb{Q}]$ が奇素数 p で割れないときに, イデアル類群の p-Sylow 部分群のマイナス成分の Fitting イデアルを決定した (注意 4.3 参照). そして栗原 [14] が Stickelberger 元を用いて Stickelberger イデアルを定義し, 栗原と三浦 [15] によって任意のアーベル体に対し, イデアル類群のマイナス成分の Fitting イデアルが Stickelberger イデアルと一致することが証明された.

注意 4.3. p を奇素数, $K/\mathbb{Q}$ を有限次アーベル拡大で, p は $[K:\mathbb{Q}]$ を割らないとする. この時,

$$\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})] = \bigoplus_{\chi \in \widehat{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})}/\sim} \mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}(\chi)]$$

と直和分解する. ここで, $\widehat{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}), \bar{\mathbb{Q}}_p)$, 指標 χ_1 と χ_2 が同値というのは, ある $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ が存在して, $\sigma\chi_1 = \chi_2$ となることである. よって, $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$ は完備離散付値環の直和になるので, 任意の有限 $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$-加群 M の Fitting イデアルを計算するということは, M の χ-成分の位数を求めることと同値である.

栗原が [14] で定義した Stickelberger イデアルについて紹介する. $K/\mathbb{Q}$ を有限次虚アーベル拡大, F を $K/\mathbb{Q}$ の中間体とする. $c_{K/F}$ を $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ から $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ への自然な制限写像とする. $\mathbb{Z}$-加群の準同型, $\nu_{K/F} : \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})] \to \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$ を $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ に対し, $\sigma \mapsto \displaystyle\sum_{c_{K/F}(\tau)=\sigma} \tau$ で定義する. $a_i \in \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$ $(1 \le i \le r)$ に対し, $\langle a_i \mid 1 \le i \le r \rangle_{\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]}$ で, a_i $(1 \le i \le r)$ が生成する $\mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$ の部分 $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$-加群を表すとする.

定義 4.4 (栗原 [14], Stickelberger イデアル)**.** $K/\mathbb{Q}$ を有限次虚アーベル拡大, $p_1, ..., p_r$ を $K/\mathbb{Q}$ で分岐する素数, p_i の惰性群を I_{p_i} とする $(1 \le i \le r)$.

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = I_{p_1} \times I_{p_2} \times ... \times I_{p_r} \qquad \text{(A)}$$

とする (これを条件 (A) と書くことにする).

$$\Theta'_{K/\mathbb{Q}} = \left\langle \nu_{K/F}(\theta_{F/\mathbb{Q}}) \mid \mathbb{Q} \subset F \subset K \right\rangle_{\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]} \subset \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$$

とする. $K/\mathbb{Q}$ の Stickelberger イデアル $\Theta_{K/\mathbb{Q}}$ を

$$\Theta_{K/\mathbb{Q}} = \Theta'_{K/\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$$

と定義する. 一般の有限次虚アーベル拡大 $K'/\mathbb{Q}$ に対し, K を $K' \subset K$, $K/\mathbb{Q}$ は条件 (A) を満たし, K/K' は不分岐拡大となるアーベル体とする. [14] の lemma 2.3 より, この条件を満たすアーベル体 K は一意に存在する. K' の Stickelberger イデアル $\Theta_{K'/\mathbb{Q}}$ を

$$\Theta_{K'/\mathbb{Q}} = c_{K/K'}\Big(\Theta_{K/\mathbb{Q}}\Big)$$

と定義する.

注意 4.5. K が円分体の時, 定義 4.4 の Stickelberger イデアルは, 岩澤, Sinnott [20] によって定義された Stickelberger イデアルと一致する. しかし, K が一般のアーベル体の時, 両者は一致しないことに注意しておく.

$K/\mathbb{Q}$ を有限次虚アーベル拡大, Cl_K を K のイデアル類群とする. p を素数, $j \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を複素共役とする. $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^- := \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]/(1+j)$ と定義して, 任意の $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$-加群 M に対し, M のマイナス成分 M^- を

$$M^- = M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]} \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^-$$

で定義する.

定理 4.6 (栗原, 三浦 [15]). 任意の奇素数 p に対して,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^-}\big((\mathrm{Cl}_K \otimes \mathbb{Z}_p)^-\big) = (\Theta_{K/\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Z}_p)^-$$

が成り立つ.

注意 4.7. k を総実代数体, K/k を有限次アーベル拡大で K を CM 体とする. 上で述べたように, 有理数体上のアーベル拡大の場合は, Stickelberger イデアルとイデアル類群のマイナス成分の Fitting イデアルは 2-成分を除いて一致することが示されている. しかし, 一般の K/k に対し, K のイデアル類群のマイナス成分の Fitting イデアルを決定するのは $k = \mathbb{Q}$ の時より遥かに難しい. 本稿では詳しくは述べないが, 例えば Greither [9], [10], 栗原, 三浦 [15], [16], Wiles [23], などの結果がある.

2-成分に関しては $k = \mathbb{Q}$ の時にさえ, 未だに完全にはわかっていない. Greither [8] によって, ガロア群の 2-Sylow 部分群が巡回群の時は次のことが知られている.

定理 4.8 (Greither [8]). $K/\mathbb{Q}$ を有限次虚アーベル拡大で, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の 2-Sylow 部分群は巡回群であるとする. この時,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_2[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^-}\big((\mathrm{Cl}_K \otimes \mathbb{Z}_2)^-\big) = (\frac{1}{2}\Theta_{K/\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Z}_2)^-$$

が成り立つ.

注意 4.9. $K/\mathbb{Q}$ を有限次虚アーベル拡大で, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の 2-Sylow 部分群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})_2$ は巡回群であるとする. $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \Delta \times \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})_2$ と書く. $j \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を複素共役, ψ を $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})_2$ の忠実な指標 (すなわち, $\psi(j) = -1$ を満たす指標) とする. この時,

$$\mathbb{Z}_2[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^- = \bigoplus_{\chi \in \hat{\Delta}/\sim} \mathbb{Z}_2[\mathrm{Im}(\chi\psi)]$$

と直和分解する ([8] Remark 参照). よってこの場合も注意 4.3 の時と同様に, 任意の有限 $\mathbb{Z}_2[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^-$-加群 M の Fitting イデアルを計算するということは, M の $\chi\psi$-成分の位数を求めることと同値である.

筆者は [2] で, Greither [8] と同様の手法で K/k は有限次アーベル拡大, k は総実代数体で K は CM 体, $\mathrm{Gal}(K/k)$ の 2-Sylow 部分群が巡回群のとき, 定理 4.8 と同様の結果を証明した．しかし, p 進 L 関数が自明な零点をもつ場合や岩澤加群が非自明な有限部分加群を持つ場合は若干の仮定がついている．

$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の 2-Sylow 部分群が巡回群でない場合は定理 4.8 の両辺は一般には一致しない．小島 [24] によって, K が円分体の時ですら一致しないことが計算で確かめられている．

例 4.10. l を奇素数, ζ_{l^n} を 1 の原始 l^n 乗根とし, l^n 分体 $K=\mathbb{Q}(\zeta_{l^n})$ を考える．この時, $\Theta_{K/\mathbb{Q}}=\langle\theta_{K/\mathbb{Q}}\rangle_{\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]}\cap\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$ となる．また, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の 2-Sylow 部分群は巡回群である．$j\in\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を複素共役, $f:\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]\to\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^-:=\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]/(1+j)$ を自然な写像とする．この場合, 定理 4.6, 定理 4.8 より,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^-}(\mathrm{Cl}_K\otimes\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]^-)=\frac{1}{2}f\Big(\langle\theta_{K/\mathbb{Q}}\rangle_{\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]}\cap\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]\Big)$$

となる．

参考文献

[1] M. Atsuta, Finite Λ-submodules of Iwasawa modules for a CM-field for $p=2$, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **30** (3) (2018), 1017–1035.

[2] M. Atsuta, Iwasawa theory for class groups of CM fields with $p=2$, *J. Number Theory* **204** (2019), 624–660.

[3] P. Deligne, K. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, *Invent. Math.* **59** (1980), 227–286.

[4] B. Ferrero, The cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of imaginary quadratic fields, *Amer. J. Math.* **102** (1980), 447–459.

[5] B. Ferrero, R. Greenberg, On the behavior of the p-adic L-function at $s=0$, *Invent. Math.* **62** (1981), 443–457.

[6] B. Ferrero, L. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.* **109** (1979), 377–396.

[7] R. Greenberg, On p-adic Artin L-functions II, in *Iwasawa Theory 2012*, 227–245, Contrib. Math. Comput. Sci., 7, Springer, Heidelberg, 2014.

[8] C. Greither, Class groups of abelian fields and the main conjecture, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), 449–499.

[9] C. Greither, Some cases of Brumer's conjecture for abelian CM extensions of totally real fields, *Math. Z.* **233** (2000), 515–534.

[10] C. Greither, Determining Fitting ideals of minus class groups via the equivariant Tamagawa number conjecture, *Compos. Math.* **143** (2007), 1399–1426.

[11] C. Greither, M. Kurihara, Stickelberger elements, Fitting ideals of class groups of CM fields, and dualisation, *Math. Z.* **260** (2008), 905–940.

[12] K. Iwasawa, On $\mathbb{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.* **98** (1973), 246–326.

[13] V. A. Kolyvagin, Euler systems, in *The Grothendieck Festschrift, vol.2*, 435-483, Progr. Math., **87**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
[14] M. Kurihara, Iwasawa theory and Fitting ideals, *J. Reine Angew. Math.* **561** (2003), 39–86.
[15] M. Kurihara, and T. Miura, Stickelberger ideals and Fitting ideals of class groups for abelian number fields, *Math. Ann.* **350** (2011), 549–575.
[16] M. Kurihara, and T. Miura, Ideal class groups of CM-fields with non-cyclic Galois action, *Tokyo J. Math.* **35** (2012), no. 2, 411–439.
[17] D. G. Northcott, *Finite free resolutions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1976.
[18] B. Mazur, A. Wiles, Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, *Invent. Math.* **76** (1984), 179–330.
[19] K. Rubin, The main conjecture, Appendix to *Cyclotomic Fields I and II* (S. Lang), Springer-Verlag, Berlin/New York, 1990.
[20] W. Sinnott, On the Stickelberger ideal and circular units of an abelian field, *Invent. Math.* **62** (1980), 181–234.
[21] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields 2nd ed.*, GTM **121**, Springer-Verlag, 1997.
[22] A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, *Ann. of Math.* **131** (1990), 493–540.
[23] A. Wiles, On a conjecture of Brumer, *Ann. of Math.* **131**, (1990), 555–565.
[24] 小島　翔平, 円分体のイデアル類群の 2 成分について, 慶應義塾大学大学院理工学研究科 2013 年度 修士論文.