RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B86 (2021), 177–198

Shafarevich 予想について
On the Shafarevich conjecture

By

高松　哲平 *
Teppei Takamatsu

Abstract

The Shafarevich conjecture, known as a geometric analogue of the Hermite-Minkowski theorem, states the finiteness of certain varieties over a fixed number field admitting good reduction away from a fixed finite set of finite places. In the abelian varieties of a fixed dimension case, this conjecture was proved by Faltings-Zarhin and applied to the Mordell conjecture. Moreover, the author proved a certain generalization of this conjecture in the K3 surfaces case. In the first part of this survey, we will sketch the proof of Faltings-Zarhin and its relation to the Mordell conjecture, and the second part we will present the result of the author.

Shafarevich 予想とは，数体上の代数多様体のある種の有限性を主張する予想である．以下，F を代数体，S を F の有限素点からなる有限集合とする．最初に，Hermite-Minkowski の定理と呼ばれる，代数的整数論における著名な結果を復習する．

定理 0.1.　d を正の整数とする．この時，F の d 次拡大体 E であって，S 外の有限素点が E で不分岐であるようなものは有限個である．

Shafarevich 予想とは，Hermite-Minkowski の定理の幾何学的類似物である．最初に，不分岐性に対応する概念として，良還元という用語を定義する．

定義 0.2.　(K, v) を離散付値体，R をその付値環とする．K 上の固有かつ滑らかな代数多様体 X が v において良還元を持つとは，R 上の固有かつ滑らかな algebraic space $\mathcal{X}$ が存在し，$\mathcal{X}_K := \mathcal{X} \times_R K$ が K 上 X と同型になること．

Received April 1, 2019. Revised July 25, 2020.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 11G35, 14J28
Key Words: *Shafarevich conjecture, abelian varieties, K3 surfaces*
* 東京大学大学院数理科学研究科 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1
Graduate School of Mathematical Science, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan.
e-mail: `teppei@ms.u-tokyo.ac.jp`

モデル $\mathcal{X}$ として，algebraic space でなくスキームを用いた定義も多いが，本稿では上の定義を採用する.（これらの定義は同値ではないことに注意する．例えば，X が K3 曲面の場合は，[Mat15, Example 5.2] に反例がある.）

数体の拡大における分岐の場合と同様に，数体 F 上の固有かつ滑らかな多様体 X に対し，X がスキームとして良還元を持たないような有限素点は有限個しかないことに注意する．実際，$\mathcal{O}_F$ 上の固有スキームモデル $\pi : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F$ がとれて（永田のコンパクト化），π が滑らかな部分は $\mathcal{X}$ の空でない開集合をなすため，その補集合の π による像は有限集合になる．

g を正の整数とする．Faltings-Zarhin は，F 上の g 次元 Abel 多様体であり，S 外の有限素点において良還元をもつようなもの（の F 上の同型類）が有限個であることを示した（定理 1.1）．これが，Abel 多様体の場合の Shafarevich 予想である．この定理は，Faltings が Mordell 予想の証明に用いたことで有名である．本稿の第一の目標は，この定理の証明の概略を説明することである．他方で，自然な疑問として，Abel 多様体以外のクラスについて Shafarevich 予想の成立を問うことができる．本稿の第二の目標は，K3 曲面の場合における著者の結果を説明することである．

§1. Abel 多様体の Shafarevich 予想について

本節では，Faltings-Zarhin による Abel 多様体の Shafarevich 予想の証明の概略を説明する．主な参考文献は，[FWG$^+$92] である．F を数体，S を F の有限素点の有限集合，g, d を正の整数とする．改めて，Abel 多様体の場合の Shafarevich 予想の主張を述べよう．

定理 1.1.

1. *F 上の d 次の偏極付き g 次元 Abel 多様体 (A, λ) であり，A が S 外の有限素点において良還元を持つようなもの（の F 上の同型類）は有限個である．*
2. *F 上の g 次元 Abel 多様体 A であり，S 外の有限素点において良還元を持つようなもの（の F 上の同型類）は有限個である．*

まず，Shafarevich 予想の系として，以下の主張が成立することに注意する．

系 1.2. *A を F 上の Abel 多様体とする．F 上の Abel 多様体 B であって，A と B とが F 上同種であるようなもの（の F 上の同型類）は有限個である．*

Faltings-Zarhin の証明においては，まず先に系 1.2（を少し弱めたもの）を証明することになる．以下，証明のあらすじを説明する．まず，系 1.2 を少し弱めたものを先に証明し（補題 1.22 を見よ），それを用いて Tate 予想（定理 1.20）を示す．その後，Tate 予想を用いて同種類の有限性を Galois 表現の有限性の結果に帰着させて示し（命題 1.23），他方で系 1.2 の証明を完結させて（命題 1.27）結論を導く，というものである．

系 1.2 およびそれを少し弱めたものの証明は，Abel 多様体のモジュライ空間における height 関数の理論を用いてなされる．本節ではまず，Abel 多様体の還元の基礎事項につ

いて述べ（§1.1），その後多様体の height 関数および Abel 多様体の Faltings height について述べて（§1.2），Tate 予想の証明と有限性の関係（§1.3），および定理導出の概略（§1.4）を解説する．最後に，Mordell 予想との関係および $\mathbb{Q}$ 上有限生成体上の場合の主張（§1.5）を説明する．

注意として，歴史的には定理 1.1 は最初 Faltings により 1 が示されて（[Fal83, Satz 6]），その後 Zarhin により 2 が示された（[Zar85, Theorem 1]）．しかし，本稿では 1 を経由せずに 2 の証明を行うことにする．

§ 1.1.　Abel 多様体の還元について

定義 1.3.　体 k 上の固有かつ滑らかな代数多様体 A が k 上の群スキーム構造を持つとき，A を Abel 多様体と呼ぶ.

Abel 多様体は Abel 群の構造を持ち，楕円曲線の高次元への一般化として知られている．以下，本稿に現れる基本的用語を定義しておく.

定義 1.4.　A, B を k 上の Abel 多様体とする.

1. 群スキームの射 $\phi : A \to B$ が同種写像であるとは，ϕ が有限全射であること．ϕ が存在するとき，A と B とは（k 上）同種であるという.
2. A の双対アーベル多様体とは A の Picard スキームの単位元連結成分のこと．以下これを $A^\vee$ と書く.
3. A の偏極とは，同種写像 $\lambda : A \to A^\vee$ であり，以下の条件を満たすもの．ある $A_{\bar{k}}$ 上の ample 直線束 L が存在し，$\lambda_{\bar{k}} = \phi_L$ を満たす．ここで，ϕ_L は $x \mapsto T_x^* L \otimes L^{-1}$ が定める写像で，T_x は x による平行移動 $(a \mapsto a + x)$ である.
4. A の偏極 λ の次数とは λ の核の位数のこと．次数 1 の偏極を主偏極と呼ぶ.

以下は，Abel 多様体の良還元判定法と呼ばれる定理である.

定理 1.5 ([ST68, Theorem 1]).　(K, v) を離散付値体，A を K 上の *Abel* 多様体とする．以下は同値.

1. A は v において良還元を持つ.

2. v の剰余標数と素なる素数 ℓ について，$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-表現 $H^1_{\text{ét}}(A_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_l)$ に惰性群が自明に作用する（*i.e.* 表現が不分岐である）.

$1 \Rightarrow 2$ は，一般の固有滑らかな多様体の i 次 ℓ 進コホモロジーについて成立することに注意する（固有平滑底変換定理）．Abel 多様体には，以下に述べるような良い性質をもつモデルが存在する.

定理 1.6 ([BLR90, 1.4 Theorem 3]). R を *Dedekind* 環，K をその商体，A を K 上の *Abel* 多様体とする．以下を満たすような R 上の群スキーム $\mathcal{A}$ が存在する．

1. $\mathcal{A}$ は R 上滑らか，分離的かつ有限型で，$\mathcal{A}_K$ は K 上 X と同型．

2. 任意の R 上滑らかなスキーム Z に対し，値点の制限写像 $\mathcal{A}(Z) \to A(Z_K)$ は全単射．

上の $\mathcal{A}$ は存在すれば一意的である．これを，A の Néron モデルと呼ぶ．また，$\mathcal{A}$ の開部分群スキーム $\mathcal{A}^\circ$ であって，$\operatorname{Spec} R$ の任意の点 s に対してファイバー $\mathcal{A}_s^\circ$ が $\mathcal{A}_s$ の単位元連結成分を与えるものが定まる．$\mathcal{A}^\circ$ を A の連結 Néron モデルと呼ぶ．

K を離散付値体，R をその付値環，A を K 上の Abel 多様体とする．A が良還元を持つならば，A の R 上の滑らかかつ固有なモデルは一意的で，A の R 上の Néron モデル $\mathcal{A}$ と一致し，この時 $\mathcal{A}$ は Abel スキームをなすことが知られている（[BLR90, 1.4 Proposition 2]）．したがって，A が良還元をもつことと $\mathcal{A}$ が Abel スキームになることが同値である．この観察を踏まえて，semi-abelian 還元という用語を定義する．

定義 1.7.

1. S をスキーム，$\mathcal{X} \to S$ を滑らかな群スキームとする．$\mathcal{X}$ が（g 次元の）semi-abelian スキームであるとは，S の任意の点 s について，$\mathcal{X}_s$ が g 次元連結で，Abel 多様体によるトーラスの拡大になっていることをいう．

2. (K, v) を離散付値体，R をその付値環，A を K 上の Abel 多様体，A の R 上の連結 Néron モデルを $\mathcal{A}^\circ$ とする．A が v で semi-abelian 還元を持つとは，$\mathcal{A}^\circ \to \operatorname{Spec} R$ が semi-abelian スキームであること．

文献によっては，semi-abelian 還元のことを semi-stable 還元（半安定還元）と呼ぶこともあるが，これは通常の意味での半安定還元とは異なることに注意する．

Abel 多様体は潜在的には semi-abelian 還元をもつことが知られている．すなわち，適切に体を拡大すると semi-abelian 還元を持つ．

定理 1.8 (semi-abelian 還元定理，[GRR72, Exposé IX Proposition 4.7]). (K, v) を離散付値体，p を v の剰余標数，A を K 上の *Abel* 多様体とする．n を 3 以上の p と素な整数とし，A の n-捩れ点（$A[n] := \ker(A \xrightarrow{n} A)$ の $\bar{K}$-値点）は全て K 上不分岐拡大体で定義されているとする．この時，A は *semi-abelian* 還元を持つ．特に，数体 F 上の *Abel* 多様体 A について，ある有限次拡大 E/F があり，A_E は任意の有限素点で *semi-abelian* 還元を持つ．

また，以下のように，semi-abelian 還元を持つまで体を拡大してしまえば，それ以降の体拡大で Néron モデルはあまり変わらないことが知られている（ただし，特殊ファイバーの連結成分の個数は変化する）．

命題 1.9 ([BLR90, 7.4 Corollary 4]). 定義 *1.7* の *2* の状況で，A が v で *semi-abelian* 還元を持つとする．この時，離散付値環の忠実平坦拡大 R'/R について，$A_{\mathrm{Frac}(R')}$ の R' 上の連結 *Néron* モデルは $(\mathcal{A}^{\circ})_{R'}$ と一致する．

§1.2. Height 関数

本小節では，height 関数の一般論およびその性質（Northcott property），および Abel 多様体の Faltings height について解説する．height 関数とは，数体 F 上の射影多様体の有理点に対するある関数のことである．本稿では，のちの便利のため，Arakelov 幾何を用いた定義を採用する．以下，$\mathcal{O}_F$ を F の整数環として，$\mathcal{X}$ を $\mathcal{O}_F$ 上の射影的スキームで，L を $\mathcal{X}$ 上の ample 直線束とする．さらに，$\{g_\sigma\}_{\sigma\in F(\mathbb{C})}$ を L の Hermite 計量とする．すなわち，各無限素点 $\sigma\colon F\hookrightarrow\mathbb{C}$ に対し，$L\times_{\mathcal{O}_F,\sigma}\mathbb{C}$ に C^∞ 級 Hermite 計量 g_σ が与えられているとする（この時，$(L,\{g_\sigma\})$ を Hermite 直線束と呼ぶ）．$x\in X(F)$ は一意的に $x\colon \operatorname{Spec}\mathcal{O}_F\to\mathcal{X}$ に拡張され，引き戻し $(x^*L,\{x^*(h_\sigma)\})$ は $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_F$ 上の Hermite 直線束になる．そこで，height 関数 $h_{(L,g_\sigma)}$ を以下のように定義する．

$$h_{(L,g_\sigma)}: X(F)\to\mathbb{R}; x\mapsto \frac{1}{[F:\mathbb{Q}]}\deg(x^*(L,g_\sigma))$$

ここで，deg は $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_F$ 上の Hermite 直線束に対して定義される Arakelov degree で，以下のように定義される．

$$\deg(x^*(L,\{g_\sigma\})) := \log\#(R/s) - \sum_{\sigma\in K(\mathbb{C})}\frac{1}{2}\log(g_\sigma(s,s)).$$

ここで，$R,\{g_\sigma\}$ は $x^*(L,g_\sigma)$ に対応する階数 1 平坦 $\mathcal{O}_F$ 加群およびその Hermite 計量であり，s は R の非零元である．上の定義は s の取り方によらないことが確かめられる．Northcott property とは，以下の性質のことである．

補題 1.10. C を正の実数とする．上の状況で，$h_\sigma(x)\le C$ を満たす $x\in X(K)$ は有限個である．

この補題は，計量が境界において log singularity をもつ場合まで拡張することができるが，詳細は省略する（[FWG+92, II §1 Theorem 1.2] 参照）．補題 1.10 の証明は，基本的に以下の場合に帰着される．

例 1.11. $F=\mathbb{Q}$，$\mathcal{X}=\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}=\operatorname{Proj}(\mathbb{Z}[X_0,\dots X_n])$，$L=\mathcal{O}(1)$ の場合を考える．L には以下の Hermite 計量が入ることに注意する．

$$g(X_i,X_j)=\frac{X_i\bar{X}_j}{\sqrt{X_0^2+\cdots X_n^2}}$$

この時，$x=(x_0:\cdots:x_n)\in\mathcal{X}(\mathbb{Z})=X(\mathbb{Q})$ について，

$$h_{L,g}(x)=\log(\prod_p \max|x_i|_p\cdot\sqrt{x_0^2+\cdots+x_n^2})$$

が従う．x_i たちの最大公約元を 1 としてよく，この時 $h_{L,g}(x) = \sqrt{x_0^2 + \cdots + x_n^2}$ を得るため，Northcott property が確かめられる．

上の例からわかるように，Arakelov 幾何を用いた height 関数の定義は，L の無限素点での計量として射影空間の $\mathcal{O}(1)$ から誘導されるものを用いたとき，古典的な射影多様体の height 関数の定義と一致する．Arakelov 幾何を用いた定義の利点は，無限素点での計量を計算しやすいものに取り換えることができる点である（補題 1.15 を見よ）．

次に，F 上の Abel 多様体に対して，Faltings height と呼ばれるものを定義する．height という概念の性質上，適切に体拡大してから定めればよいので，semi-abelian 還元定理（定理 1.8）より，A がいたるところ semi-abelian 還元を持つ場合で定義すれば応用上十分である．

定義 1.12. A を F 上の g 次元 Abel 多様体で，いたるところ semi-abelian 還元を持つとする．$\mathcal{A}$ を A の連結 Néron モデルとする．dualizing sheaf $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_F}$ の零切断 $s : \operatorname{Spec}\mathcal{O}_F \to \mathcal{A}$ による引き戻し $s^*\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_F}$ は直線束であり，以下の Hermite 構造 $\{g_\sigma\}$ を入れることができる．

$$g_\sigma(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^g} \left| \int_{\mathcal{A}_{\sigma,\mathbb{C}}(\mathbb{C})} \alpha \wedge \bar{\beta} \right|$$

積分の外の定数は文献により異なるが，本質的ではない．この時，A の Faltings height を，Arakelov degree を用いて

$$h_{\mathrm{F}}(A) := \frac{1}{[F\colon \mathbb{Q}]}\deg(s^*(\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_F}, \{g_\sigma\}))$$

と定義する．

いたるところ semi-abelian 還元をもつという仮定から，Faltings height は体拡大で保たれることが分かる（命題 1.9）．Faltings height の重要な性質の一つは，同種関係についての振舞いが良いことである．

命題 1.13 (同種公式)**.** *$\phi : A \to B$ をいたるところ semi-abelian 還元をもつ F 上の Abel 多様体の間の同種写像とする．$\mathcal{G}$ を $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の kernel とすると，以下が成立する．*

$$h_{\mathrm{F}}(B) = h_{\mathrm{F}}(A) + \frac{1}{2}\log(\deg(\phi)) - \frac{1}{[F : \mathbb{Q}]}\log(\# s^*\Omega^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_F}).$$

証明. 完全列

$$0 \to s^*(\Omega^1_{\mathcal{B}/\mathcal{O}_F}) \xrightarrow{\phi^*} s^*(\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_F}) \to s^*(\Omega^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_F}) \to 0$$

の存在に注意すると，$\# s^*\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_F}$ は $\#\operatorname{coker}(\wedge(\phi^*))$ と一致するので，Faltings height の定義（定義 1.12）およびその well-defined 性から従う． □

Faltings height のもう一つの重要な性質として，モジュライ空間において適切な意味での Northcott property を満たすということが挙げられる．このことは，本小節最初に定義した height 関数と Faltings height が近いものであることを用いて示される．定式化のために，Abel 多様体のモジュライについて簡単に説明する．

命題 1.14.　$\mathcal{A}_{g,\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ 上の g 次元主偏極付き *Abel* 多様体のモジュライスタックとする．すなわち，*groupoid* 値関手

$$(S \to \operatorname{Spec}\mathbb{Q}) \mapsto \{(\alpha : \mathcal{A} \to S, \lambda) | \alpha \text{ は Abelian scheme, } \lambda \text{は} \alpha \text{ の主偏極 }\}$$

で定まるものとする．ここで，α の主偏極とは，S 上の同型 $\lambda\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathrm{t}}$ のことである．

$\mathcal{A}_{g,\mathbb{Q}}$ は準射影的な粗モジュライ空間 $A_{g,\mathbb{Q}}$ を持つ．また，普遍 *Abel* スキーム $\mathcal{A}^{\mathrm{univ}} \to \mathcal{A}_{g,\mathbb{Q}}$ とその零切断 s に対し，$s^*\omega_{\mathcal{A}^{\mathrm{univ}}/\mathcal{A}_{g,\mathbb{Q}}}$ の適切な冪（r 乗と置く）は $A_{g,\mathbb{Q}}$ 上の *very ample* な直線束 L に降下する．

L による埋め込み $A_{g,\mathbb{Q}} \to \mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}$ における Zariski 閉包を $\mathcal{X}$ とおく．$\mathcal{O}(1)|_{\mathcal{X}}$ も L であらわすことにする．L には，$A_{g,\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ において，定義 1.12 を用いて Hermite 計量 $\{h_\sigma\}$ が入る．さらに，詳細は省略するが，この計量は $\mathcal{X}(\mathbb{C}) - A_{g,\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ において log singularity を持つことが示される．したがって，$h_{(L,\{h_\sigma\})}$ は $A_{g,\mathbb{Q}}$ において Northcott property を持つことが分かる（補題 1.10 の下の注意を参照）．よって，Faltings height についての Northcott property を示すためには，以下の補題を示せばよい．

補題 1.15.　$x \in A_{g,\mathbb{Q}}(F)$ をいたるところ *semi-abelian* な還元をもつ F 上の *Abel* 多様体 A からくる点とする．x によらない定数 D が存在し，

$$|h_{(L,\{h_\sigma\})}(x) - r \cdot h_{\mathrm{F}}(x)| \leq D$$

が成立する．

この補題の証明は省略するが，簡単に概略を説明する．$\mathcal{A}$ を A の Néron モデルとおく．L の制限と $s^*\omega^r_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_F}$ とは，generic な部分（すなわち $\mathbb{Q}$ テンソルした部分）では一致する．両者の height を関連付ける上では，$\mathbb{Z}$ 上での両者の違いを評価する必要がある．そこで，これらの中間的存在として，$\mathcal{X}$ 上の semi-stable curve の族で，その Jacobian が，（$A_{g,\mathbb{Q}}$ 上で）普遍的 Abel スキーム $\mathcal{A}^{\mathrm{univ}}$ を商として持つようなものを構成する（正確には局所的に構成して被覆する）．さらにその semi-stable curve 族に関連付ける形で $\mathcal{X}$ 上の直線束 M を構成し，M と L との関係を評価する．また，Néron モデルの性質から semi-stable curve の Jacobian と $\mathcal{A}$ とを関係づけて，M と $s^*(\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_F})$ との関係を評価することで，主張が証明される．

系 1.16.　C を正の実数とする．この時，F 上の主偏極付き *Abel* 多様体 (A, λ) であり，A はいたるところ *semi-abelian* 還元を持ち，$h_{\mathrm{F}}(A) \leq C$ を満たすもの（の F 上の同型類）は有限個である．

$A_{g,\mathbb{Q}}$ は粗モジュライでしかなかったため，補題 1.15 から系 1.16 は直ちには出ない．この部分の証明には，Hermite-Minkowski の定理（定理 0.1）および偏極付き Abel 多様体の twist の有限性を用いる．なお，レベル構造を考えて fine モジュライを使って議論した場合でも同じ問題が起こる．

最後に，以下の主張を証明する．

系 1.17. C を正の実数とする．この時，F 上の *Abel* 多様体 A であり，いたるところ *semi-abelian* 還元を持ち，$h_{\mathrm{F}}(A) \le C$ を満たすもの（の F 上の同型類）は有限個である．

証明には，Zarhin のトリックと呼ばれる技法を用いる．

定理 1.18 (Zarhin のトリック)**.** k を体，A を k 上の *Abel* 多様体とする．

1. $A^4 \times A^{\vee 4}$ は k 上の主偏極を持つ．

2. A の k 上の *Abel* 多様体としての直和因子の同型類は有限個である．

1 は適切に $\alpha : A^4 \times A^4 \to A^4 \times A^{\vee 4}$ を構成して $A^4 \times A^4$ の偏極を降下させることで証明される．α の定義にあらわれる 4×4 行列の構成に Lagrange の四平方定理（の弱い形）を用いるため，4 乗することが重要となるのだが，詳細は省略する．2 は，A の自己準同型環に Jordan-Zassenhaus の定理を適用することで示される．

さらに，以下の補題が成り立つ．

補題 1.19. A, B を F 上の *Abel* 多様体として，いたるところ *semi-abelian* 還元を持つとする．この時，$h_{\mathrm{F}}(A \times B) = h_{\mathrm{F}}(A) + h_{\mathrm{F}}(B)$ および $h_{\mathrm{F}}(A) = h_{\mathrm{F}}(A^\vee)$ が成立する．

前者の等式は Arakelov degree の加法性から容易に証明できる．後者の等式は非自明である．計算技術の都合上，証明の概略の説明は §1.3 の最後に回す．

系 1.17 の証明に戻る．補題 1.19 より，

$$h_{\mathrm{F}}(A^4 \times A^{\vee 4}) = 8h_{\mathrm{F}}(A) < 8C$$

で，定理 1.18 の 1 および系 1.16 より $A^4 \times A^{\vee 4}$ の F 上の同型類は有限個．よって，定理 1.18 の 2 より，A は有限個である．

§ 1.3. Tate 予想

本小節では，前節の応用及び，Shafarevich 予想の証明のための 1 ステップとして，Abel 多様体の Tate 予想の証明を紹介する．以下，F を数体，A, B を F 上の Abel 多様体とする．Abel 多様体 A に対し，Tate 加群を $T_\ell(A)$，有理 Tate 加群を $V_\ell(A)$ と置く．すなわち，

$$T_\ell(A) := \varprojlim_n A[\ell^n](\bar{F}), \qquad V_\ell(A) := T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

これらには自然に Galois 群 $G_F := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ が作用する．

定理 1.20.

1. G_F-表現 $V_\ell(A)$ は半単純である．

2. 自然な写像

$$\mathrm{Hom}_F(A,B)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A),T_\ell(B))^{G_F}$$

は同型である．

注意として，定理 1.20 の 2 は，Abel 多様体の余次元 1 のサイクルについての Tate 予想を導く．実際，$B=A$ として定理 1.20 の 2 を用いて $\mathbb{Z}_\ell$ 上 $\mathbb{Q}_\ell$ をテンソルし，その両辺で，固定した A の偏極一つに対応する Rosatti 対合で不変な部分をとると，左辺には $NS(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$, 右辺には $H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{F}},\mathbb{Q}_l)^{G_F}$ が現れる．また，定理 1.20 は一般の有限生成体の場合で正しい．

以下，定理 1.20 の証明の概略を述べる．最初にいくつか注意を行う．まず，定理 1.20 の 2 の写像は単射であり，cokernel が torsion-free であることが比較的容易に示せる（基本的には「準同型 $f:A\to B$ が $A[\ell]$ で自明な時，f は ℓ で割れる」という考察から従う）．また，定理 1.20 は $B=A$ の場合に示せば十分であることが示せる．実際，一般の場合は $A\times B$ に対して主張を適用すればよい．さらに，F を有限次拡大に取り換えて示せば十分であることが簡単に分かる．したがって，以下，A はいたるところ semi-abelian 還元を持つと仮定する．

まず，定理 1.20 を以下の主張に帰着する．

定理 1.21.　*任意の $\mathbb{Q}_\ell[G_F]$-部分加群 $W\subset V_\ell(A)$ に対し，$u\in\mathrm{End}_F(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$ が存在し，$u(V_\ell(A))=W$ が成立する．*

定理 1.21 $\Rightarrow$ 定理 1.20 を説明する．定理 1.20 の 1 を示す．任意の $\mathbb{Q}_\ell[G_F]$-部分加群 $W\subset V_\ell(A)$ に対し，$u(V_\ell(A))=W$ なる u をとり，

$$u\in\{v\in\mathrm{End}_F(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell | v(V_\ell(A))\subset W\}$$

の右辺が半単純代数 $\mathrm{End}_F(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$ の右イデアルであることに注意すると，その生成元 u_0 を $u_0(V_\ell(A))=W$ かつ $u_0^2=u_0$ としてとれる．これは Galois 表現としての射影子を与えるので，示された．次に，定理 1.20 の 2 を示す．自然な写像 $\mathrm{End}_F(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell\to\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))^{G_F}$ が全射であることを示せば十分である（証明最初の注意を見よ）．$\phi\in\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))^{G_F}$ をとる．$\mathrm{End}_F A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$ の $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A))$ における centralizer を C とかく．double centralizer theorem より，ϕ が C の元と可換であることを示せば十分である．ϕ のグラフ $\Gamma(\phi)\subset V_\ell(A\times A)$ は $\mathbb{Q}_\ell[G_F]$-部分加群をなし，仮定をみたす $u\in\mathrm{End}_F(A\times A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$ をとれる．$\alpha\in C$ に対し，$\alpha\times\alpha\in\mathrm{End}(V_\ell(A\times A))$ は $\mathrm{End}_F(A\times A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$ と可換であり，ゆえに u と可換である．したがって $(\alpha\times\alpha)(uV_\ell(A\times A))=(\alpha\times\alpha)\Gamma(\phi)\subset\Gamma(\phi)$ を

得て，$\alpha\phi = \phi\alpha$ が示された．以下．定理 1.21 を証明する．W に対して，

$$T_n := T_\ell(A) \cap W + \ell^n T_\ell(A),$$
$$G_n := T_n/\ell^n T_\ell(A) \subset A[\ell^n](\bar{F}).$$

とおく．この時 G_n は A の F 上の有限部分群スキームを定め，A における ℓ^n 倍写像は以下のように分解する．

$$A \xrightarrow{p_n} A/G_n \xrightarrow{f_n} A$$

この時，$f_n T_\ell(A/G_n) = T_n$ が確かめられる．ここで，無限個の n について，A/G_n が互いに同型であることを仮定する．すなわち，添え字の無限集合 $I \subset \mathbb{Z}_{>0}$ があり，任意の $i \in I$ について $g_i : A/G_{i_0} \simeq A/G_i$ が存在するとする（$i_0 = \min(I)$ とした）．$u_i \in \mathrm{End}_F(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$ を合成 $f_i \circ g_i \circ f_{i_0}^{-1}$ で定義すると，u_i は Tate 加群において T_{i_0} を T_i に送る．$\{u_i\}_{i \in I} \subset \mathrm{End}(T_{i_0})$ の部分点列をとることで，極限 $u \in \mathrm{End}(T_{i_0}) \subset \mathrm{End}(V_\ell(A))$ が存在するとしてよい．各 u_i が閉部分集合 $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \subset \mathrm{End}(V_\ell(A))$ に入っているので，u もまたそうであり，Galois 不変性より $\mathrm{End}_F A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$ の元となる．$u(T_{i_0}) = \bigcap_{i \in I} T_i$ が成立するので（右辺の元はある $\{t_i\} \in T_{i_0}$ について $u_i(t_i)$ の極限でかけて，t_i の集積点を t とすると $u(t)$ と一致する），u は欲しい条件 $u(V_\ell(A)) = W$ を満たす．

したがって，系 1.17 とあわせて，定理 1.21 は以下の補題に帰着された．

補題 1.22. 上の状況（A はいたるところ *semi-abelian* を仮定していた）で，A/G_n の *Faltings height* $h_{\mathrm{F}}(A/G_n)$ は十分大きな n において一定である．

補題 1.22 の証明の概略を説明する．同種写像 $A \to A/G_n$ の連結 Néron モデルへの延長の核を $\mathcal{G}_n$ とおく．$\mathcal{G}_n$ は $\mathcal{O}_F$ 上有限とは限らないことに注意する．ℓ の上の F の素点 v に対し，$\mathcal{O}_{F,v}$ を v における完備化とし，$\mathcal{G}_{n,v} := (\mathcal{G}_n)_{\mathcal{O}_{F,v}}$ を有限部分 $\widetilde{\mathcal{G}}_{n,v}$ と一般部分（特殊ファイバーが空になる部分）とに分解しておく（Hensel の補題からこのような分解がとれる）．$\{\widetilde{\mathcal{G}}_{n,v}\}_n$ は $\mathcal{O}_{F,v}$ 上の ℓ-可除群になるとは限らないが，簡単のため（全ての $v|\ell$ について）ℓ-可除群をなすことを仮定する（例えば A が $\mathcal{O}_{F,v}$ 上良還元を持つ場合は $\mathcal{G}_{n,v}$ 自身が有限となり，この仮定は満たされる）．一般の場合は，十分大きな N について $\{\widetilde{\mathcal{G}}_{N+n,v}/\widetilde{\mathcal{G}}_{N,v}\}_n$ が ℓ-可除群になることを示し，A を A/G_N で取り換えることで上記の場合に帰着させることができるが（Tate によるトリック [Tat67, p.182]），詳細は省略する．以下，上記仮定のもと，任意の n について $h_{\mathrm{F}}(A) = h_{\mathrm{F}}(A/G_n)$ となることを示す．F 上の ℓ-可除群 $\{G_n\}_n$ の高さを h，$\mathcal{O}_{F,v}$ 上の ℓ-可除群 $\{\widetilde{\mathcal{G}}_{n,v}\}_n$ の次元を d_v と置く．ここで，ℓ-可除群 $\{G_n\}_n$ の高さとは，$\deg G_n = \ell^{nh}$ なる整数 h のことで，高さ関数とは関係が無いことに注意する．

同種公式（命題 1.13）を用いると，写像の次数が h，微分加群が d_v と結びつき，以下の等式を得る．

$$h_{\mathrm{F}}(A/G_n) - h_{\mathrm{F}}(A) = n\log(\ell) \cdot \left(\frac{h}{2} - \sum_{v|\ell} \frac{[F_v : \mathbb{Q}_\ell]}{[F : \mathbb{Q}]} d_v \right).$$

最後の項が 0 となることを見ればよい．すなわち，問題は Abel 多様体の中に実現される ℓ-可除群の高さと次元との関係に帰着された．この等号を示すためには，ℓ-可除群の有理 Tate 加群 $U := V_\ell(\bigcup_n G_n)$ に着目する．U は h 次元 Galois 表現である．Galois 表現の誘導 $U' := \mathrm{Ind}_{G_F}^{G_\mathbb{Q}} U$ を考える．基本的には，$\det U'$ を二通りの方法で計算することで結論を示す．

まず，$U' \subset T_\ell(\mathrm{Res}_\mathbb{Q}^F A)$ に注意すると（Res は Weil 制限），Weil 予想より，$\mathrm{Res}_\mathbb{Q}^F A$ が良還元を持つような素数 $p \neq \ell$ について，$\det U'(F_p)$ は代数的整数で，任意の複素埋め込みについて絶対値が $p^{h\cdot[F:\mathbb{Q}]/2}$ となることが分かる（U' の次元が $h \cdot [F:\mathbb{Q}]$ であることを用いた）．ここで，F_p は算術的 Frobenius 写像のリフトである．

他方で，誘導表現の一般論から，

$$\det U' = \mathrm{sgn}^h \cdot (\det U \circ \mathrm{Ver}_{G_F}^{G_\mathbb{Q}})$$

がわかる．ここで，$\mathrm{sgn} : G_F \to \{\pm 1\}$ は $G_F/G_\mathbb{Q}$ への置換の符号，$\mathrm{Ver} : G_\mathbb{Q} \to G_F$ は移相写像である．そこで，各 $v|\ell$ に制限して $\det U$ の Hodge-Tate 重さを計算する．有限部分として，$\widetilde{U} := V_\ell(\bigcup_n \widetilde{\mathcal{G}}_{n,v,F_v})$ とおく（$U = U|_{G_{F_v}}$ の部分表現となる）．

$$\det U \simeq \det \widetilde{U} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \det(U/\widetilde{U})$$

のように，有限部分と一般部分とに分けて考える．有限部分の Hodge-Tate 重さは，ℓ-可除群の有理 Tate 加群の一般論として Tate により計算されていて（$D^i_{\mathrm{HT}}(\widetilde{U}^\vee)$ と $\{\widetilde{\mathcal{G}}_{n,v}\}$，$\{\widetilde{\mathcal{G}}^\vee_{n,v}\}$（Cartier 双対）の接空間とが結びつく），$\widetilde{U}$ は Hodge-Tate 重さ 0 および 1 をもち，0 の重複度は $d_v^\vee$，1 の重複度は d_v となる（ここで，$d_v^\vee$ は $\{\widetilde{\mathcal{G}}^\vee_{n,v}\}$ の次元）．他方，一般部分については，v において semi-abelian 還元を持つことから，Grothendieck による直交性定理を用いて形式トーラスに附随する Galois 表現と関連付けることができて，不分岐性が示せる．以上を合わせて，$\det U$ の v における Hodge-Tate 重さは d_v となる．(実際はより強く，惰性群 I_v の表現として $\det U \simeq \mathbb{Q}_\ell(d_v)$ が分かることを注意しておく．[FWG+92, III Theorem 5.1] 参照)．したがって，$\det U'$ の ℓ における Hodge-Tate 重さは $\sum_{v|\ell}[K_v : \mathbb{Q}_\ell]d_v$ となり，$\mathbb{Q}$ 上の Hodge-Tate 指標の分類より $\det U'$ は $\mathbb{Q}_\ell(\sum_{v|\ell}[K_v : \mathbb{Q}_\ell]d_v)$ と有限位数の指標の積であらわされ，$\det U'(F_p)$ の絶対値が $\sum_{v|\ell}[K_v : \mathbb{Q}_\ell]d_v$ であることが従う（なお，$\mathbb{Q}$ 上のいたるところ不分岐な拡大が存在しないことを用いると，先の注意と併せて，より強く $\det U' \simeq \mathrm{sgn}^h(\sum_{v|\ell}[K_v : \mathbb{Q}_\ell]d_v)$ が言える）．これで求める等式を得た．

証明の歴史についての注意

本小節で紹介した証明は，[Fal83] に沿った，[FWG+92, IV] での Schappacher による証明である．証明における，定理 1.21 を経由して Abel 多様体の有限性の主張へと帰着させるステップは， Tate による，有限体上の Abel 多様体の Tate 予想の証明に既に現れていることに注意する．しかし，Tate の証明においては，定理 1.21 より少し弱い主張 （A の偏極を固定し，W として極大等方的な物のみを考える）と，G_F の生成する $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell(V_\ell(A))}$ の部分代数についての主張との二つの主張に帰着させていた（[Tat66, Proposition 1, Proposition 2] 参照）．実際は，前者の主張のみで十分であることが Zarhin により考察されている（[Zar74]）．なお，Faltings は，本小節の証明の代わりに，系 1.17 を用いず，系 1.16 を用いて上記の「定理 1.21 より少し弱い主張」を示して，Zarhin の議論を用いて定理 1.20 を導いている．[Fal83, Section 5] 参照．

補題 1.19 の証明の概略

最後に，§1.2 で残していた補題 1.19 の等式 $h_{\mathrm{F}}(A) = h_{\mathrm{F}}(A^\vee)$ の証明の概略を説明する．F を適当に有限次拡大すると A が主偏極 Abel 多様体と同種になるため，等式は $h_{\mathrm{F}}(A) - h_{\mathrm{F}}(A^\vee)$ が同種不変量であることに帰着される．すなわち，F 上の同種写像 $\phi : A \to B$ に対して，$h_{\mathrm{F}}(A) - h_{\mathrm{F}}(B) + h_{\mathrm{F}}(B^\vee) - h_{\mathrm{F}}(A^\vee) = 0$ を示せばよい．同種写像の次数を素数 ℓ としてよい．ϕ および $\phi^\vee$ の連結 Néron モデルへの延長についての核を $\mathcal{G}$ および $\mathcal{G}^\vee$ とおき，ℓ の上の F の素点 v における有限部分を $\widetilde{\mathcal{G}}$ および $\widetilde{\mathcal{G}^\vee}$ とおいて，以前と同様に同種公式（命題 1.13）を用いて計算すると，以下の式に帰着される．

$$\#(s^*\Omega^1_{\widetilde{\mathcal{G}}/\mathcal{O}_{F,v}})\#(s^*\Omega^1_{\widetilde{\mathcal{G}^\vee}/\mathcal{O}_{F,v}}) = \#(\mathcal{O}_{F,v}/\ell\mathcal{O}_{F,v}).$$

この等式の証明は省略するが，基本的には，$\widetilde{\mathcal{G}}$ の具体的記述（Oort-Tate による位数 ℓ 有限群スキームの分類）および，$\widetilde{\mathcal{G}}$ と $\widetilde{\mathcal{G}^\vee}$ との双対性（Grothendieck の直交性定理を用いて示す）から証明される．[FWG+92, IV §3 Proposition 3.7] 参照．

§ 1.4. Abel 多様体の Shafarevich 予想の証明

本小節では，Abel 多様体の Shafarevich 予想（定理 1.1）の証明を完結させる．同型類の有限性を示すために，まず Tate 予想を用いて同種類の有限性を示し，その後，height の計算を用いて各同種類に同型類が有限個しかないことを示す．

以下，F を数体，S を F の有限素点の有限集合，g を正整数とする．同種類の有限性とは，すなわち以下の命題である．

命題 1.23. *F 上の g 次元 Abel 多様体であり，S 外の有限素点において良還元を持つようなものの，F 上の同種類は有限個である．*

証明. 素数 ℓ を止めて考える．Tate 予想より，F 上の Abel 多様体 A, B が F 上同種であることと，有理 Tate 加群 $V_\ell(A), V_\ell(B)$ が Galois 表現として同型であることとが同値であるため，Galois 表現 $V_\ell(A)$ の有限性を示せば十分である．必要なら S を大きくしてよいので，以下 $\{v \mid v|\ell\} \subset S$ を仮定する．A が S 外良還元を持てば，$V_\ell(A)$ は $2g$ 次元の S 外不分岐な表現を与える．

補題 1.24. *(ρ_V, V)，(ρ_W, W) を $\mathbb{Q}_\ell$ 上の d-次元半単純 G_F-表現とする．ρ_V，ρ_W は S 外で不分岐であると仮定する．この時，S, ℓ, d のみに依存する F の有限素点の有限集合 T がとれて，T は S と交わらず，*

$$\det(t - \rho_V(F_v)) = \det(t - \rho_W(F_v)) \in \mathbb{Q}_\ell[t] \quad (\text{for all } v \in T) \Rightarrow \rho_V \simeq \rho_W$$

を満たす．

証明．Hermite-Minkowski の定理（定理 0.1）より，有限次 Galois 拡大 E/F であり，F の S 外不分岐な ℓ^{2d^2} 次以下の拡大をすべて含むようなものがとれる．E/F で不分岐な F の有限素点 v について，v の定める Frobenius 共役類を $F_{v,E} \subset \mathrm{Gal}(E/F)$ とおく．Chebotarev 密度定理より，S 外の素点の有限集合 T であり，

$$\mathrm{Gal}(E/F) = \bigcup_{v \in T} F_{v,E}$$

なるものがとれる．仮定より，ある S 外不分岐な有限次拡大 $\widetilde{F}/F$ が存在し，ρ_V および ρ_W は $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F)$ を経由する．

$$\rho_V \times \rho_W : \mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F)] \to \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(W)$$

の像を M とおく．半単純表現の一般論から $(m, m') \in M$ について $\mathrm{tr}\, m = \mathrm{tr}\, m'$ を見ればよく，仮定より $v \in T$ に対し $\rho_V \times \rho_W(F_v)$ では正しいので，F_v の共役類の像が M を生成することを見ればよい．中山の補題より，$M/\ell M$ を生成することが言えれば十分だが，$\#(M/\ell M)^\times < \ell^{2d^2}$ なので，$\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F) \to (M/\ell M)^\times$ は拡大次数 ℓ^{2d^2} 以下の部分拡大 F'/F について $\mathrm{Gal}(F'/F)$ を経由する．これは $\mathrm{Gal}(E/F)$ の商なので，主張が示された．□

命題 1.23 の証明に戻る．$d = 2g$ として補題にある T をとると，S 外不分岐な Abel 多様体に対し，Frobenius 特性多項式 $\{\det(t - \rho_{V_\ell(A)}(F_v))\}_{v \in T}$ の候補が有限個であることを示せばよい．しかし，Weil 予想よりこれらは整係数多項式であり，根の絶対値がおさえられているので，明らかに有限通りである．□

次に，各同種類の中に同型類が有限個しかないことを示す．まず，以下の補題を証明する．

補題 1.25.　*N を素数からなる有限集合，A を F 上の Abel 多様体とする．N のみによる正の整数 n と，A と F 上同種な Abel 多様体 $A_1, \ldots, A_n$ が存在し，以下が成立する．B を A と F 上同種な Abel 多様体としたとき，ある整数 $1 \leq i(B) \leq n$ と同種写像 $\phi : B \to A_{i(B)}$ とが存在し，$\deg \phi$ は N と素になる．*

証明．Jordan-Zassenhaus の定理より，$V_\ell(A)$ の $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$-不変格子の同型類は有限個である．したがって，ある n，$A_1, \ldots, A_n$ が存在し以下を満たす．A と F 上同種な Abel 多様体 B について，ある i_B が存在し，任意の $\ell \in N$ で $T_\ell(B) \simeq T_\ell(A_{i_B})$ を満たす．Tate 予想および近似の議論により，この時条件を満たす ϕ が取れることが分かる．□

したがって，同種な Abel 多様体の有限性を示すためには，以下の命題が本質的である．

命題 1.26. A を F 上のいたるところ *semi-abelian* 還元を持つ *Abel* 多様体とする．この時，素数の有限集合 N が存在し，以下が成立する．F 上の同種写像 $\phi : B \to A$ で $\deg\phi$ が N と素なものについて，$h_{\mathrm{F}}(B) = h_{\mathrm{F}}(A)$ が成り立つ．

証明は省略する．基本的な計算の流れは §1.3 と同じであるが，ℓ 可除群の問題ではなくなるので ℓ 進表現の代わりに $\mathrm{mod}\,\ell$ 表現を用いなくてはならない．以下に注意すべき点を述べる．

$\deg\phi$ が素数の場合を考えれば十分であるので，これを ℓ とおく．N を十分広くとると，ℓ の上の F の任意の素点 v で A は良還元を持つとしてよく，さらに ℓ が F で不分岐としてよい．この時，同種写像の延長の核である $\mathcal{O}_{F,v}$ 上の有限群スキームに対して Raynaud の理論を用いることができて，$\mathrm{mod}\,\ell$ 表現と微分加群の位数とを関連付けることができる（§1.3 において，ℓ 進表現の Hodge-Tate 重さと d_v を関連付けたことの類似）．あとは，Weil 予想を用いて §1.3 と同様に同種公式（命題 1.13）を計算していけばよい．詳しくは [FWG$^+$92, V Section 3.4] を見よ．

目標の主張は，以下の命題であった．

命題 1.27 (系 1.2)**.** A を F 上の *Abel* 多様体とする．F 上の *Abel* 多様体 B であって，A と B とが F 上同種であるようなもの（の F 上の同型類）は有限個である．

証明. 系 1.17，補題 1.25 および命題 1.26 より，A がいたるところ semi-abelian 還元を持つ場合は正しい．

一般の場合は，semi-abelian 還元定理（定理 1.8）を用いる．まず，主偏極付き Abel 多様体 (B, λ) で，A と B が同種であるようなものの同型類の有限性を示すことができる．実際，A が F の有限次拡大 E 上で semi-abelian 還元を持つと仮定すると，(B_E, λ_E) の候補は系 1.16 より有限である．偏極付き Abel 多様体の自己同型群の有限性から，(B, λ) の候補が有限であると分かる．後は，Zarhin のトリック（定理 1.18）を用いればよい． □

したがって，命題 1.23 と併せて定理 1.1 の 2 の証明が完結した．最後に，定理 1.1 の 1 についてコメントする．2 から 1 を出すことも可能であるが（偏極のつけ方の有限性），命題 1.27 の変種である，固定した A に対し，次数 d の偏極 Abel 多様体 (B, λ) であって，A と B とが同種なものの F 上の同型類の有限性から示すこともできる．この変種の証明は，$d = 1$ の場合上記の証明の途中ですでに示していて，一般の場合は $d = 1$ に帰着できる（[Fal83, Korollar 3] 参照）．

§ 1.5. 補足

本小節では，補足として，Mordell 予想との関係および有限生成体上の場合の Shafarevich 予想の定式化と証明の概略を説明する．

定理 1.28 (Mordell 予想，[Fal83, Satz 7])**.** F を数体，X を F 上の固有かつ滑らかな種数 g の曲線とするとき，$X(F)$ は有限．

証明の肝は，以下の命題である．

命題 1.29 (Kodaira-Parshin の構成)．　F を数体，S を F の有限素点の有限集合で 2 の上の素点を全て含むもの，X を $U := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F \setminus S$ 上の固有かつ滑らかな種数 $g \geq 2$ の相対曲線とする．この時，ある有限次拡大 E/F があり，以下を満たす．S の上のすべての素点からなる E の有限素点の集合を S' とする．任意の点 $P \in X(F)$ について，$U' := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_E \setminus S'$ 上の固有かつ滑らかな相対曲線 Y_P が存在し，$Y_{P,E}$ は X_E の P でのみ分岐する 2^{2g+1} 次の有限被覆であって，$Y_{P,E}$ の種数は $2^{2g-1}(4g-1)+1$ となる．

証明．　証明の方針を述べる．示したいことを簡単に言うと,「P においてのみ分岐するような X_F の被覆で，かつ還元の様子を保っているようなものを構成する」となる．被覆の構成は 2 段階からなる．

一般論として，多様体 X_F の因子 D において分岐する被覆をとりたい場合，直線束 L_F であって L_F の冪（例えば 2 乗）が $\mathcal{O}_{X_F}(-D)$ に一致するようなものを探し，$L_F^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_{X_F}(-D) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_F}$ に付随する巡回被覆をとるという手法が知られている．次数の観点から D として P を当てはめることはできないので，まず 1 段階目として，還元を保った被覆で P を膨らませる．すなわち，P による Jacobian への写像 $X \to J$ に対して，J における 2 倍写像に沿ったファイバー積 $X^{(2)}$ をとる．S の仮定より，これは X の 2^{2g} 次エタール被覆である．$X_F^{(2)}$ の因子 D を P の逆像で定める．

F を有限次拡大で置き換えて，D の各点が F 上定義されてるとしてよい．この体拡大は Hermite-Minkowski の定理より P によらずにとれる．この時，線型同値関係について $2D' = D$ を満たすような F 上の因子が取れる．第二段階は，$\mathcal{O}_{X_F^{(2)}}(-D')$ の $X^{(2)}$ への延長を L として巡回被覆をとることでなされる．注意として，直線束としての延長には $\operatorname{Pic}(U)$ の分の不定性が現れるため，$L^{\otimes 2} = \mathcal{O}_{X^{(2)}}(-\bar{D})$ を保証するために ($\bar{D}$ は D の延長)，F を F の Hilbert 類体に取り換える必要がある．

こうして構成された被覆は明らかに 2^{2g+1} 次で P のみで分岐し，種数も Riemann-Hurwitz の公式から簡単に計算され，条件を満たすことが分かる．　□

命題 1.29 により，P の有限性は，被覆 $Y_{E,P} \to X_E$ の有限性に帰着された．固定された $Y_{E,P}$ に対して種数 2 以上の曲線 X_E への有限全射は有限通りなので（de Franchis の定理），$Y_{E,P}$ の有限性を見ればよい．還元の様子が分かっているので，これは以下の定理から従う．

定理 1.30 (曲線の Shafarevich 予想)．　F を数体，S を F の有限素点の有限集合，g を *2* 以上の整数とする．F 上の固有かつ滑らかな種数 g の曲線で S 外良還元なものは有限個．

定理 1.30 は Jacobian を通じて定理 1.1 および曲線の Torelli の定理から証明される．

次に，$\mathbb{Q}$ 上有限生成体上の場合の Shafarevich 予想について述べる．

定理 1.31 ([FWG$^+$92, VI §1 Theorem 2])．　F を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体，R を $\mathbb{Z}$ 上有限型の整閉整域で，$\operatorname{Frac} R = F$ なるもの，g, d を正の整数とする．

1. F 上の g 次元 *Abel* 多様体 X であって，R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ において良還元を持つようなものは有限個である．

2. F 上の d 次の偏極付き g 次元 *Abel* 多様体 (A, λ) であって，A が R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ において良還元を持つようなものは有限個である．

この定理は，定理 1.1 を含んでいる（F として数体，R として S-整数環をとればよい）．証明は，(1)Tate 予想，(2) 同種/同型の有限性，(3) 同種類の有限性と順を追って示される．(1) および (2) は，F 上の Abel 多様体を数体 L 上有限生成なスキーム X 上の族に伸ばし，数体上の Abel 多様体の場合に帰着させて示されるが，省略する．(3) は，§1.4 と同様に Galois 表現の有限性の問題になる．命題 1.23，補題 1.24 の証明に用いた道具は，Hermite-Minkowski の定理，Chebotarev 密度定理，Frobenius 作用の重さ（Weil 予想）であるが，いずれも底が高次元の場合の一般化が知られているため，同様の証明を用いることができる（ただし，ここでいう Frobenius とは，底 $\mathrm{Spec}\, R$ の閉点の Galois 群から持ち上げたものである．閉点と高さ 1 とのギャップを埋める議論が必要となる）．詳しくは [FWG$^+$92, VI] を見よ．

Torelli の定理/Kodaira-Parshin の構成も問題なく成立するため，定理 1.28 および定理 1.30 の $\mathbb{Q}$ 上有限生成体版も成立することを注意しておく．

§ 2. K3 曲面の Shafarevich 予想について

本節では，著者の K3 曲面の Shafarevich 予想に関する主結果を解説する．§2.1 では主結果の主張の説明，§2.2 では証明の概略を述べる．

§ 2.1. 主定理の主張

定義 2.1.

1. 体 k 上の固有かつ滑らかな代数曲面 X が $\Omega^2_{X/k} \simeq \mathcal{O}_X$ かつ $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たすとき，X を K3 曲面と呼ぶ．

2. k 上の K3 曲面 X の偏極 L とは，$\mathrm{Pic}_{X/k}(k)$ の元で $\bar{k}$ への底変換 $L_{\bar{k}}$ が ample になるもの．L が原始的とは，$L_{\bar{k}}$ が他の直線束の非自明な冪で書けないこと．L が次数 $2d$ をもつとは，自己交点数 $(L_{\bar{k}}, L_{\bar{k}})$ が $2d$ になること．

K3 曲面というクラスは，小平次元 0 の極小曲面の 4 種類のクラスのうちの 1 つである（他の 3 つは，Abel 曲面，Enriques 曲面，超楕円/準超楕円曲面である）．K3 曲面は Abel 多様体と非常に深い関係を持つ．例えば，Abel 曲面から K3 曲面を構成する手法（Kummer 曲面）や，K3 曲面から Abel 曲面を構成する手法（Kuga-Satake 構成）が知られている．本稿の §2.2 でも，Kuga-Satake 構成が大きく活躍する．

定義 2.2. (K, v) を離散付値体，X を K 上の K3 曲面とする．X がコホモロジー的良還元を持つとは，v の剰余標数と素なある（⇔ 全ての（[Tak19] 参照））素数 ℓ について，Galois 表現 $H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$ が v において不分岐になること．

良還元を持てばコホモロジー的良還元を持つ（固有平滑底変換定理）．逆に，コホモロジー的良還元を持つが，良還元をもたないような K3 曲面の例が存在することが知られている（[LM18, Theorem 7.2]）．このことは，K3 曲面のモデルに一意性が無いため Galois 降下ができないゆえに起きる現象と言える．特に，K3 曲面は一般には Néron モデル（定理 1.6 の 1 および 2 を満たすようなモデル）を持たない．

また，(K, v) を Hensel 離散付値体，X を K 上の K3 曲面でコホモロジー的良還元を持つものとすると，以下の条件のうちの一つが成り立つ時，X の K のある不分岐拡大への底変換が良還元を持つことが知られている（[LM18, Theorem 1.3]）．

1. (K, v) が等標数 $(0, 0)$ の時．
2. (K, v) の剰余標数 p について，$X_{\bar{K}}$ が次数 $p-4$ 以下の ample 直線束 L を持つ時．

また，これらの条件のもと，K3 曲面の良還元判定法が定式化されている（[CLL19, Theorem 1.6]）．

著者の主結果は，以下の定理である．

定理 2.3 ([Tak19])**.** *F を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体，R を $\mathbb{Z}$ 上有限型の整閉整域で，$\operatorname{Frac} R = F$ なるものとする．このとき，F 上の K3 曲面 X であって，R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ においてコホモロジー的良還元を持つようなもの（の F 上の同型類）は有限個である．*

先行研究について説明する．固定した $d > 0$ について，次数 $2d$ の偏極付き K3 曲面の Shafarevich 予想については，André が証明している（[And96, Theorem 9.1.1]）．すなわち，上の F, R について，F 上の偏極付き K3 曲面 (X, L) であって，R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ において固有かつ滑らかなスキームモデル $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}}$ および L の拡張 $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}_{\mathcal{X}/R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}})$ で特殊ファイバーが偏極になるものが存在するものの有限性を証明している．

次数についての条件を外した研究としては，She によるものがある（[She17]）．She の証明したことを正確に述べると，（F を数体として）F 上の K3 曲面 X であって，ある偏極 L が存在し，(X, L) が R の任意の高さ 1 の素イデアルにおいて上記のように固有滑らかなモデルをもつようなものの F 上の同型類は有限，というものになる．

なお，詳細は省略するが，著者の修士論文 [Tak19] で，Enriques 曲面および超楕円曲面の Shafarevich 予想も定式化および証明されている．すなわち，定理 2.3 の F, R について，以下の主張が示されている．

1. F 上の Enriques 曲面 X であって，K3 二重被覆 $\widetilde{X}$ が R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ においてコホモロジー的良還元を持つようなもの（の F 上の同型類）は有限個

である.(なお,Enriques 曲面が良還元を持てば,K3 二重被覆も良還元を持つことが従う.)

2. F 上の超楕円曲面 X であり,$X(F) \neq \phi$ かつ,X が R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ において良還元を持つようなもの(の F 上の同型類)は有限個である.

本小節の最後に,定理 2.3 の応用として以下の主張を紹介する.

系 2.4. k を標数 0 の体,k'/k を有限次拡大とする.X を k 上の *K3* 曲面とする.k 上の *K3* 曲面 Y であって,$X_{k'}$ が $Y_{k'}$ と k' 上同型であるようなもの(の k 上の同型類)は有限個である.

この結果(有限次拡大に関する twist の有限性)は,Abel 多様体においても正しいことが知られている.実際,Abel 多様体の場合には以下の議論による証明が先行研究として存在する.K3 曲面の場合,以下の議論はコホモロジー的な良還元を用いねば成立しないことに注意する.

定理 2.3 ⇒ 系 2.4 を見る.k'/k が $\mathbb{Q}$ 上有限生成体の有限次拡大 E/F である場合が本質的である(一般の場合は,$\mathrm{Aut}(X_{\bar{k}})$ が有限生成であることおよび twist の集合の Galois コホモロジーによる記述を用いて有限生成体の場合に帰着できる).定理 2.3 にある R を,X が $\mathrm{Spec}\, R$ の高さ 1 の素イデアルでコホモロジー的良還元を持つようにとる.$\mathrm{Spec}\, R$ を適切に小さくとることにより,E/F が R 上不分岐であるようにできる.この時,Y も $\mathrm{Spec}\, R$ の高さ 1 の素イデアルでコホモロジー的良還元を持つことが分かるため,定理 2.3 より有限性が従う.

§ 2.2. 主定理の証明の概略

証明は基本的に,André および She の証明の手法に,Kuga-Satake 構成および点の良還元性の振舞いの考察を加えることでなされる.

まず,証明の基本的な道具である,Kuga-Satake 構成およびそのモジュライ解釈について簡単に説明する.格子 $\mathcal{L}_{K3}$ を $\mathbb{E}_8^{\oplus 2} \oplus \mathbb{H}^{\oplus 3}$ で定める.ここで,$\mathbb{E}_8$ は E_8-ルート格子,$\mathbb{H}$ は双曲格子である.$\mathcal{L}_{K3}$ の最後の成分の $\mathbb{H}$ の基底 e, f を,$(e,e) = (f,f) = 0$ および $(e,f) = 1$ としてとり,$v_d \in \mathcal{L}_{K3}$ を $e - df$ で定める.$\mathbb{C}$ 上の K3 曲面 X とその次数 $2d$ の原始的偏極 L に対し,格子の同型 $(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), -\cup) \simeq \mathcal{L}_{K3}$ で v_d を Chern 類 $\mathrm{ch}(L)$ に送るものの存在が知られている.したがって原始的部分 $P^2 := \mathrm{ch}(L)^{\perp} \subset H^2$ に対応する格子として,

$$\mathcal{L}_{2d} := \mathbb{E}_8^{\oplus 2} \oplus \mathbb{H}^{\oplus 2} \oplus \langle 2d \rangle$$

とおく.周期写像とは,原始的偏極付き K3 曲面からコホモロジーの原始的部分の Hodge 構造を対応させる写像であった.この写像をモジュライを用いて理解するため,記号及び事実をいくつか紹介する.

$\mathbb{K} \subset \mathrm{SO}_{\mathcal{L}_{2d,\widehat{\mathbb{Z}}}}$ を十分小さいコンパクト開部分群とする．このとき，モジュライ関手 $M^\circ_{2d,\mathbb{K},\mathbb{Q}}$ が定義され，スキームで表現されることが知られている．詳しくは [MP15, Section 3] 参照．簡単のために $\mathbb{Q}$ 上有限生成体 F での値を見ると，$M^\circ_{2d,\mathbb{K},\mathbb{Q}}(\operatorname{Spec} F)$ は，F 上の K3 曲面 X，次数 $2d$ の原始的偏極 L，向き付け，$\mathbb{K}$-レベル構造をパラメトライズする．ここで，向き付けとは $G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-表現の isometry $\nu : \det \mathcal{L}_{2d,\widehat{\mathbb{Z}}} \simeq \det P^2(X_{\bar{F}}, \widehat{\mathbb{Z}})$ で（左辺は自明表現とする），$\mathbb{C}$-値点 $\operatorname{Spec}\mathbb{C} \to \operatorname{Spec} F$ に対して，$\nu_{\mathbb{C}}$ が isometry $\det \mathcal{L}_{2d} \simeq P^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ を導くもののこと．また，$\mathbb{K}$-レベル構造とは，v_d を $\mathrm{ch}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(L)$ に送るような isometry $\eta : \mathcal{L}_{K3,\widehat{\mathbb{Z}}} \simeq H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{F}}/F)$ の $\mathbb{K}$-軌道で（$\mathbb{K}$ は左辺を通して作用する．ここで，$\mathcal{L}_{K3,\widehat{\mathbb{Z}}}$ に $\mathbb{K}$ の作用が（v_d を保つように）延長されるように，$\mathbb{K}$ を小さくとっている），G_F-不変なもののこと.（いわば「mod $\mathbb{K}$ での Galois 表現の自明化」なので，Abel 多様体の場合のレベル構造の類似である.）

他方，$\mathrm{Sh}_{\mathbb{K}}(\mathrm{SO}_{\mathcal{L}_{2d,\mathbb{Q}}})$ を $\mathrm{SO}_{\mathcal{L}_{2d,\mathbb{Q}}}$ の志村多様体の $\mathbb{Q}$ 上の正準モデルとする（本稿では志村データについての記述を省略する）．

このとき，$\mathbb{C}$ 上の周期写像は $\mathbb{Q}$ 上のスキームの étale 準有限射

$$j : M^\circ_{2d,\mathbb{K},\mathbb{Q}} \to \mathrm{Sh}_{\mathbb{K}}(\mathrm{SO}_{\mathcal{L}_{2d,\mathbb{Q}}})$$

に降下することが知られている（[MP15, Corollary 5.4, Theorem 5.8]）.

次に，She の導入した一様 Kuga-Satake 構成を紹介する．$\mathcal{L}' := \mathbb{E}_8^{\oplus 2} \oplus \mathbb{H}^{\oplus 2} \oplus \langle 1 \rangle^{\oplus 5}$ とおく．この時，Lagrange の四平方定理より任意の $d > 0$ について格子の原始的埋め込み $i_d : \mathcal{L}_{2d} \hookrightarrow \mathcal{L}'$ が存在する．この埋め込みは，すべての次数を同時に扱うという点で Zarhin のトリック（定理 1.18）の類似と言える（Zarhin のトリックにも四平方定理が関係していたことを注意しておく）．なお，実際には $\mathcal{L}'$ の代わりに，偶格子である $\mathcal{L} := \mathbb{E}_8^{\oplus 3} \oplus \mathbb{H}^{\oplus 2}$ を用いたほうが都合がよい（この場合も原始的埋め込み $i_d : \mathcal{L}_{2d} \hookrightarrow \mathcal{L}$ が存在する）．以下ではこの $\mathcal{L}$ を用いる．

一様 Kuga-Satake 構成とは，$\mathcal{L}$ について Kuga-Satake 構成を行い，すべての次数の原始的偏極付き K3 曲面を一つの Siegel モジュラー多様体の点に関連付ける，という技術である．Kuga-Satake 構成の概略を説明する．$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ の Clifford 代数

$$\mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}) := (\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^{\otimes n}) / \langle v \otimes v - (v, v) \rangle_{v \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}$$

の偶数次部分を $\mathrm{cl}^+ \hookrightarrow \mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$ と置く．

$$\mathrm{GSpin}_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}} := \{ g \in \mathrm{cl}^+ \mid g \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} g^{-1} = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \}$$

は $\mathbb{Q}$ 上の代数群を定め，$f : \mathrm{GSpin}_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}} \to \mathrm{SO}_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}} ; g \mapsto (v \mapsto g v g^{-1})$ なる写像が定まり，志村データの射を導く．他方，適切に $\mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$ の上のシンプレクティック双線型形式 ψ を選ぶことで（適切な元 $a \in \mathcal{L}^+$ について $\psi(x, y) = \mathrm{tr}_{\mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})/\mathbb{Q}}(x a y^*)$ と定める．tr は左乗算としてのトレース，$*$ は $\mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$ の標準的な反自己同型である），$h : \mathrm{GSpin}_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}} \to \mathrm{GSp}_{(\mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}), \psi)} ; g \mapsto (c \mapsto gc)$ なる写像が定まり，志村データの射を導く．

以上より，適切なレベル $\mathbb{K}' \subset \mathrm{SO}_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty})$，$\mathbb{K}'' \subset \mathrm{GSpin}_{\mathcal{L}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty})$，$\mathbb{K}''' \subset \mathrm{GSp}_{(\mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}).\psi)}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty})$ に対して，以下の $\mathbb{Q}$ 上のスキームの図式ができる．

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{Sh}_{\mathbb{K}''}(\mathrm{GSpin}_{\mathcal{L}}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Sh}_{\mathbb{K}'''}(\mathrm{GSp}_{(\mathrm{cl}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}),\psi)}) \\ M^{\circ}_{2d,\mathbb{K},\mathbb{Q}} \arrow[r, "j"] & \mathrm{Sh}_{\mathbb{K}}(\mathrm{SO}_{\mathcal{L}_{2d}}) \arrow[r, "i_d"] & \mathrm{Sh}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{SO}_{\mathcal{L}}) & \end{tikzcd}$$

さらに，$f(\mathbb{K}'') = \mathbb{K}'$ と取ることで，ある代数体 E 上で f の section δ をとることができる（正確には，後に Hermite-Minkowski の定理を用いて K3 曲面にレベル構造を与えるステップと整合的になるように，少し $\mathbb{K}$ の取り方に気を付ける必要がある）．$\mathrm{Sh}_{\mathbb{K}'''}(\mathrm{GSp}_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}.\psi})$ は次数 r の原始的偏極および $\mathbb{K}'''$-レベル構造付き 2^{27} 次元 Abel 多様体のモジュライである（r は ψ から決まる平方数）ため，$h \circ \delta \circ i_d \circ j$ により,（レベル/向き構造付き）次数 $2d$ 原始的偏極 K3 曲面 (X, L) に対し，Abel 多様体を対応付けることができる．これが，(X, L) の一様 Kuga-Satake Abel 多様体と呼ばれるものである．

準備が整ったので，定理 2.3 の証明の概略を述べる．以下，F, R は定理 2.3 と同様とする．まず，Abel 多様体の場合と同様に，以下の偏極付きの場合の主張（André の結果の改良）を示す．なお，以下のようにモジュライ解釈を用いることで André の結果を改良できるという観察が，著者の結果における最大の新規性である．

命題 2.5. d を正の整数とする．*F 上の次数 $2d$ の原始的偏極付き K3 曲面 (X, L) であり，X が R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ においてコホモロジー的良還元を持つようなもの（の F 上の同型類）は有限個である．*

証明. 証明の基本は，以下の事実である．

補題 2.6. *$F \supset E$ を有限生成体，v を F の付値，$x \in M^{\circ}_{2d,\mathbb{K},\mathbb{Q}}(F)$ を $(X, L, \nu, \mathbb{K}\eta)$ に対応する F-値点．$h \circ \delta \circ i_d \circ j(x)$ の定める Abel 多様体を A_x とおく．X が v においてコホモロジー的良還元を持てば，A_x は良還元を持つ．*

$\mathbb{K}'''$ を十分小さくとっておいたことから，A_x は semi-abelian 還元を持つことが分かる．志村多様体の潜在的良還元な点の一般論 [IM20] から，A_x が潜在的に良還元を持つことが従うため，ここから補題 2.6 が示される（Kuga-Satake 構成の場合，もう少し簡単に証明をすることもできる．[And96, Lemma 9.3.1] 及び [Tak19] 参照．いずれの場合も，証明の鍵は定理 1.5 である）．

命題 2.5 の証明に戻る．Hermite-Minkowski の定理（の有限生成体版）より，(X, L) によらない有限次拡大 F'/F であり，$F' \supset E$ かつ任意の命題 2.5 にある (X, L) について $(X_{F'}, L_{F'})$ に向きおよび $\mathbb{K}$-レベル構造を付与できるようなものがとれる．偏極付き K3 曲面の自己同型群の有限性から，問題は $(X_{F'}, L_{F'})$ の有限性に帰着される．この有限性は，一様 Kuga-Satake 構成にあらわれる写像が全て有限対 1 であること及び，偏極つき Abel 多様体の Shafarevich 予想（定理 1.31 の 1）から従う． □

次数を固定して議論しているので，この段階では一様 Kuga-Satake 構成の「一様」の部分は用いていないことに注意する．

定理 2.3 の証明を説明する．なお，以下の議論はほとんど [She17] と並行に進む．まず，定理 2.3 は，以下の主張に帰着される．

補題 2.7.

$$\{\mathrm{Pic}_{X/F}(F) \mid X \text{ は定理 2.3 の条件を満たす}\}/ \text{ isometry}$$

は有限．ここで，$\mathrm{Pic}_{X/F}(F)$ とは，格子 $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})^{G_F}$ のことである．

実際，$\mathrm{Pic}_{X/F}(F)$ の isometry 類を固定した時，X の偏極の次数の集合が決まることが知られているため，命題 2.5 から $X \mapsto \mathrm{Pic}_{X/F}(F)$ という対応は有限対 1 である．

以下．補題 2.7 の証明の方針を述べる．格子の理論から，$\mathrm{Pic}_{X/F}(F)$ の判別式を抑えれば良い．超越格子

$$T(X)_{\mathbb{Z}_\ell} := \mathrm{ch}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathrm{Pic}_{X/F}(F))^\perp \subset H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{F}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

と $\mathrm{Pic}_{X/F}(F)$ とは判別式が等しいので，超越格子の有限性に帰着される．

ここで，一様 Kuga-Satake 構成を用いる．Hermite-Minkowski の定理より，前と同様，X に偏極，向き付け，$\mathbb{K}$-レベル構造を与えられるとしてよい．すなわち，ある d について X は有理点 $x = (X, L, \nu, \mathbb{K}\eta) \in M^\circ_{2d,\mathbb{K},\mathbb{Q}}(F)$ に持ち上がる．$\mathrm{Sh}(\mathrm{SO}_{\mathcal{L}_\mathbb{Q}})$ には，$\mathrm{SO}_\mathcal{L}$ の表現に対応する ℓ 進 étale 層が存在する．この層を x に引き戻して得られる Galois 表現を $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_\ell,x}$ とおく．

$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_\ell,x}$ への G_F の作用で非自明な部分が $P^2(X_{\bar{F}}, \mathbb{Z}_\ell)$ のみに現れること及び有限生成体上の K3 曲面の Tate 予想（[Tat94, Theorem 5.6 (a)] 参照．Abel 多様体の場合に帰着される）を用いると，格子の同型

$$(\mathcal{L}^{G_F}_{\mathbb{Z}_\ell,x})^\perp = T(X)_{\mathbb{Z}_\ell}$$

が証明できる (ここで，左辺の $\perp$ は $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_\ell,x}$ の中でとっている)．左辺の格子は x の $\mathrm{Sh}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{SO}_{\mathcal{L}_\mathbb{Q}})$ 像のみによっている．一方，x の $\mathrm{Sh}_{\mathbb{K}'''}(\mathrm{GSp}_{(\mathrm{cl}(\mathcal{L}_\mathbb{Q}),\psi)})$ 像は定理 1.31 の 1 より有限であり，h および δ が有限対 1 であるため，実は等式の左辺は有限通りである．以上で定理 2.3 の証明が完結した．

参考文献

[And96] Y. André, *On the Shafarevich and Tate conjectures for hyper-Kähler varieties*, Math. Ann. **305** (1996), no. 2, 205–248.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[CLL19] B. Chiarellotto, C. Lazda, and C. Liedtke, *A Néron-Ogg-Shafarevich criterion for K3 surfaces*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **119** (2019), no. 2, 469–514.

[Fal83] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366.

[FWG$^+$92] G. Faltings, G. Wüstholz, F. Grunewald, N. Schappacher, and U. Stuhler, *Rational points*, third ed., Aspects of Mathematics, E6, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992, Papers from the seminar held at the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn/Wuppertal, 1983/1984, With an appendix by Wüstholz.

[GRR72] A. Grothendieck, M. Raynaud, and D. S. Rim, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288, Springer-Verlag, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I).

[IM20] N. Imai and Y. Mieda, *Potentially good reduction loci of Shimura varieties*, Tunis. J. Math. **2** (2020), no. 2, 399–454.

[LM18] C. Liedtke and Y. Matsumoto, *Good reduction of K3 surfaces*, Compos. Math. **154** (2018), no. 1, 1–35.

[Mat15] Y. Matsumoto, *Good reduction criterion for K3 surfaces*, Math. Z. **279** (2015), no. 1-2, 241–266.

[MP15] K. Madapusi Pera, *The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic*, Invent. Math. **201** (2015), no. 2, 625–668.

[She17] Y. She, *The unpolarized Shafarevich Conjecture for K3 Surfaces*, preprint (2017), arXiv:1705.09038.

[ST68] J.-P. Serre and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 492–517.

[Tak19] T. Takamatsu, *On the Shafarevich conjecture for minimal surfaces of Kodaira dimension 0*, Master's Thesis, The University of Tokyo (2019).

[Tat66] J. Tate, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), 134–144.

[Tat67] J. T. Tate, *p-divisible groups*, Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, Berlin, 1967, pp. 158–183.

[Tat94] J. Tate, *Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 71–83.

[Zar74] J. G. Zarhin, *A remark on endomorphisms of abelian varieties over function fields of finite characteristic*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** (1974), 471–474.

[Zar85] Y. G. Zarhin, *A finiteness theorem for unpolarized abelian varieties over number fields with prescribed places of bad reduction*, Invent. Math. **79** (1985), no. 2, 309–321.