

p 進 Simpson 対応 (The p -adic Simpson correspondence)

By

辻 雄*
Takeshi TSUJI

Abstract

Faltings は、射影複素多様体上の Higgs 束と基本群の有限次元 $\mathbb{C}$ 線型表現の対応に関する C. Simpson の理論の p 進類似を定式化した。本稿では特に、多様体の次元についての条件なく成り立つ small 一般化表現と small Higgs 束の対応について概説する。最後の節でその他の関連研究について簡単にふれる。

Faltings formulated a p -adic analogue of the theory of C. Simpson on correspondence between Higgs bundles and finite dimensional $\mathbb{C}$ -representations of the fundamental group for a projective complex variety. In this article, we survey, in particular, the correspondence between small generalized representations and small Higgs bundles, which holds without assumption on the dimension of a variety. We briefly mention other related results in the last section.

§ 1. 導入

X を連結な射影複素代数多様体とする。このとき $X(\mathbb{C})$ の基本群の有限次元 $\mathbb{C}$ 線型表現と X 上の半安定な Chern 類が消える Higgs 束の対応が、1980 年代後半から 1990 年代前半にかけての C. Simpson による研究により与えられた。ここで X 上の Higgs 束は、 X 上の有限型局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{E}$ と $\mathcal{O}_X$ 線型写像 $\theta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ の組で、 $\theta \wedge \theta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^2$ が 0 になるものとして定義される。Higgs 束が消える場合については、1960 年代に A. Weil, M. S. Narasimhan と C. S. Seshadri によりコンパクトリーマン面の基本群の既約ユニタリー表現と次数 0 の安定ベクトル束の対応が、1980 年代にその射影複素代数多様体への一般化が S. Donaldson により構成されていた。

Received July 9, 2019. Revised March 9, 2021.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 14F30, 14F35

Key Words: p -adic representation, Higgs bundle, p -adic Hodge theory

Supported by JSPS Grants-in-Aid for Scientific Research, Grant Number 15H02050.

*東京大学大学院数理科学研究科 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1.

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 153-8914, Japan.

e-mail: t-tsuji@ms.u-tokyo.ac.jp

© 2021 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

p 進 Simpson 対応は, Simpson の構成した対応の p 進体上での類似として, 2000 年代の半ばに G. Faltings によりその一定式化が与えられた [13]. また同じ頃に C. Deninger と A. Werner により Narasimhan-Seshadri の対応の p 進体上の射影代数曲線上での類似が別の手法で与えられた [7]. Faltings の論文は 16 ページの短い論文であるが, その後 A. Abbes と M. Gros 及び本稿著者により, それぞれ独自の新しい手法を導入しつつ, 理論の基礎づけがなされた [1]. 本稿では [1] で扱っている Faltings による定式化を紹介し, 最後にその他の関連結果に簡単にふれる.

記法と用語 $\mathbb{Z}_p$ 上の環, 加群, 環の層, あるいは加群の層 A に対して, $A[\frac{1}{p}] = A \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ を $A_{\mathbb{Q}_p}$ と略記する. 環または加群 A が p 進位相について分離かつ完備である, すなわち, 自然な準同型 $A \rightarrow \varprojlim_n A/p^n A$ が同型になるとき, A は p 進完備であるということにする.

§ 2. Faltings による p 進 Simpson 対応の定式化

p を素数, K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 (より一般に剰余体が完全な混標数 $(0, p)$ の完備離散付値体でもよい), $\overline{K}$ を K の代数閉包, C を $\overline{K}$ の完備化, $O_{\overline{K}}, O_C$ を $\overline{K}, C$ の整数環とする. O_K 上の固有 smooth なスキーム X を考え, その $\overline{K}, C$ への底変換を $X_{\overline{K}}, X_C$ で表す. O_K 上半安定還元或いはより一般に log smooth な場合, さらに正規交叉因子を抜いた開多様体の場合でも定式化されるが, スキームの log 構造の導入に伴う煩雑さをさけるため, ここでは固有 smooth を仮定する. $X_{\overline{K}}$ は連結であると仮定する. X_C 上の Higgs 束は, 有限型局所自由 $\mathcal{O}_{X_C}$ 加群 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{O}_{X_C}$ 線型な写像 $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{X_C}} \Omega_{X_C}(-1)$ の組 $(\mathcal{M}, \theta)$ で $\theta \wedge \theta = 0$ をみたすものを考える. ここで (-1) は Tate twist を表す¹. 一方, 複素数体上で考えた基本群の類似として, $X_{\overline{K}}$ のエタール基本群 $\Delta_X := \pi_1(X_{\overline{K}}, \bar{x})$ ($X_{\overline{K}}$ の基点 $\bar{x}$ を一つとった) を考える. p 進 Simpson 対応は, Δ_X のすべての有限次元連続 C 線型表現を X 上の Higgs 束を用いて捉えることを目標としている.

$$(\Delta_X \text{ の有限次元連続 } C \text{ 線型表現}) \xleftrightarrow{?} (X_C \text{ 上の Higgs 束})$$

Faltings の対応は, X 上の「一般化表現」の圏を経由して構成される. またすべての一般化表現と Higgs 束ではなく, small とよばれる対象についてのみ対応が構成される. 類似した定義の繰り返しを避けるため, まず本稿を通して用いる半線型表現, Higgs 束およびこれらの smallness に関する一般的な定義を導入する.

定義 2.1. G を profinite 群, A を G が連続に作用する可換位相環とする. (2), (3) では, A は $O_{\overline{K}}$ 代数で, A の位相は p 進位相であるとする.

¹ $\overline{K}^\times$ 内の 1 の p^n 乗のなす群 $\mu_{p^n}(\overline{K})$ の p 倍写像に関する逆極限 $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim_n \mu_{p^n}(\overline{K})$ は階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群となる. $\mathbb{Z}_p$ 加群 L に対し, L の r -Tate twist は $L(r) = L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes r}$ で定義される. $\mathbb{Z}_p(1)$ の基底すなわち 1 の原始 p^n 乗根の系 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ をとると, 同型 $L \cong L(r); x \mapsto x \otimes \varepsilon^{\otimes r}$ が定まる. ここでは ε の取り方によらない構成をするために, (-1) -Tate twist をとっている.

(1) G が連続半線型に作用する有限生成射影 A 加群と G 同変な A 線型写像のなす圏を $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(G, A)$ で表す. ここで A 加群 W への G の半線型作用とは, G の加群 W への作用で $g(aw) = g(a)g(w)$ ($w \in W, a \in A, g \in G$) を満たすもののことである. G の A への作用が自明なときは, これは A 線型作用に他ならない. 底加群が有限生成自由 A 加群である対象のなす $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(G, A)$ の充満部分圏を $\mathbf{Rep}_{\text{free}}(G, A)$ で表す.

(2) $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(G, A_{\mathbb{Q}_p})$ の対象 W に対し, G 安定な有限生成部分 A 加群 W° と有理数 $\alpha > \frac{2}{p-1}$ で次の条件を満たすものがあるとき, W は small であるという. W° の射影性は仮定しないことに注意.

(i) $W_{\mathbb{Q}_p}^\circ = W$. (ii) $W^\circ/p^\alpha W^\circ$ は $A/p^\alpha A$ 加群として, $(W^\circ/p^\alpha W^\circ)^G$ で生成される. G の $A/p^\alpha A$ への作用が自明なとき, 条件 (ii) は, G の $W^\circ/p^\alpha W^\circ$ への作用が自明であることに他ならない. small な対象のなす $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(G, A_{\mathbb{Q}_p})$ の充満部分圏を $\mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(G, A)$ で表す.

(3) $\mathbf{Rep}_{\text{free}}(G, A)$ の対象 W に対し, ある有理数 $\alpha > \frac{2}{p-1}$ について, $A/p^\alpha A$ 加群 $W/p^\alpha W$ が G 不変な元からなる基底をもつとき, W は small であるという. G の $A/p^\alpha A$ への作用が自明なとき, この条件は, G の $W/p^\alpha W$ への作用が自明であることと同値である. small な対象のなす $\mathbf{Rep}_{\text{free}}(G, A)$ の充満部分圏を $\mathbf{Rep}_{\text{free}}^{\text{small}}(G, A)$ で表す.

定義 2.2. $\mathcal{C}$ を site, $\mathcal{A}$ を $\mathcal{C}$ 上の可換環の層, Ω を $\mathcal{A}$ 加群の層とする². (2), (3) では, $\mathcal{A}$ は $O_{\bar{K}}$ 代数の層であるとする.

(1) 局所有限射影 $\mathcal{A}$ 加群の層 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{A}$ 線型写像 $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega$ の組 $(\mathcal{M}, \theta)$ で, $\theta \wedge \theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \wedge^2 \Omega$ が消えているもの (このような θ を $\mathcal{M}$ 上の Higgs 場とよぶ) を, Ω に係数をもつ $\mathcal{A}$ 上の Higgs 束とよぶ. その圏を $\mathbf{HB}(\mathcal{A}, \Omega)$ で表す. 有限生成自由 $\mathcal{A}$ 加群を底加群にもつ Higgs 束のなす充満部分圏を $\mathbf{HB}_{\text{free}}(\mathcal{A}, \Omega)$ で表す.

(2) $\mathbf{HB}(\mathcal{A}_{\mathbb{Q}_p}, \Omega_{\mathbb{Q}_p})$ の対象 $(\mathcal{M}, \theta)$ に対し, $\mathcal{M}$ の局所有限生成部分 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{M}^\circ$ と有理数 $\alpha > \frac{2}{p-1}$ で $\theta(\mathcal{M}^\circ) \subset p^\alpha \mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{A}} \Omega$ をみたすものが存在するとき, $\mathcal{M}$ は small であるという. small な対象のなす $\mathbf{HB}(\mathcal{A}_{\mathbb{Q}_p}, \Omega_{\mathbb{Q}_p})$ の充満部分圏を $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\mathcal{A}, \Omega)$ で表す.

(3) $\mathbf{HB}_{\text{free}}(\mathcal{A}, \Omega)$ の対象 $(\mathcal{M}, \theta)$ に対し, 有理数 $\alpha > \frac{2}{p-1}$ で $\theta(\mathcal{M}) \subset p^\alpha \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega$ をみたすものが存在するとき, $(\mathcal{M}, \theta)$ は small であるという. small な対象のなす $\mathbf{HB}_{\text{free}}(\mathcal{A}, \Omega)$ の充満部分圏を $\mathbf{HB}_{\text{free}}^{\text{small}}(\mathcal{A}, \Omega)$ で表す.

注意. 定義 2.1 (2), (3) において, $\mathbf{Rep}_{\text{free}}(G, A)$ の対象 W に対し, $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(G, A_{\mathbb{Q}_p})$ の対象 $W_{\mathbb{Q}_p}$ が small であっても, W が small とは限らない. 例えば G の A への作用が自明で, G が位相的生成元 γ をもつとき, $\gamma - 1$ の W への作用がベキ零ならば $W_{\mathbb{Q}_p}$ は small になるが, W は small とは限らない. 定義 2.2 (2), (3) についても同様である.

一般化表現とはどのようなものか簡単に紹介する. $U = \text{Spec}(R)$ を X の affine 開部分スキームとする. R の分数体 $\mathcal{K}$ の $\bar{K}$ を含む代数閉包 $\bar{\mathcal{K}}$ を取り, $\bar{\mathcal{K}}$ の中での $R_{\mathbb{Q}_p}$ の最大不分岐拡大の分数体を $\mathcal{K}^{\text{ur}}$ とし, R の $\mathcal{K}^{\text{ur}}$ での整閉包を $\bar{R}$ とする. するとガロア

² $\text{Ob } \mathcal{C} = \{e\}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(e, e) = \{\text{id}_e\}$ のときは, 可換環 A と A 加群 Ω を考えることと同じである. $\mathcal{C}$ が位相空間 T から定まる site の場合, $\mathcal{A}$ は T 上の可換環の層, Ω は T 上の $\mathcal{A}$ 加群の層に他ならない.

群 $\Delta_U = \Delta_R := \text{Gal}(\mathcal{K}^{\text{ur}}/\mathcal{K}\bar{K})$ は U の幾何的生成ファイバー $U_{\bar{K}} = \text{Spec}(R \otimes_{O_K} \bar{K})$ の ($\text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow U_{\bar{K}}$ を基点とする) 基本群に他ならず, Δ_R は環 $\bar{R}$ に自然に作用する. 感覚的には, $\bar{R}_{\mathbb{Q}_p}$ は「 $U_{\bar{K}}$ の普遍不分岐被覆上の関数のなす環」と言える. $\bar{R}$ はその中で R 上整なものを集めたものに他ならない. $\widehat{\bar{R}}$ を $\bar{R}$ の p 進完備化 $\varprojlim_n \bar{R}/p^n \bar{R}$ に p 進位相をいれたものとする. Δ_R は $\widehat{\bar{R}}, \widehat{\bar{R}}_{\mathbb{Q}_p}$ に連続に作用する.

Δ_X の有限次元連続 C 線型表現の局所版として, Δ_U の有限次元連続 C 線型表現を考えられるが, この係数環 C を $\widehat{\bar{R}}_{\mathbb{Q}_p}$ にかえた $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(\Delta_U, \widehat{\bar{R}}_{\mathbb{Q}_p})$ の対象が U 上での一般化表現である. 各 U ごとに圏 $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(\Delta_U, \widehat{\bar{R}}_{\mathbb{Q}_p})$ を考えることができるが, Faltings は p 進 Hodge 理論における比較定理の研究において, これらの圏をはり合わせるのに適した環付き site $(X_{\text{Falt}}, \overline{\mathcal{O}})$ を導入していた [11, III c)], [12, §3]. 各 U 上の一般化表現を環付き site $(X_{\text{Falt}}, \overline{\mathcal{O}})$ 上のある種の層としてはりあわせることにより, X 上の一般化表現の圏が定義される (詳しくは §5.1 参照).

こうして定義された一般化表現を用いて, Faltings の p 進 Simpson 対応は次の圏の図式として定式化される [13, Theorem 5]. X の O_C への底変換を p 進完備化して得られる形式スキームを $\mathcal{X}$ で表す.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Rep}_{\text{free}}(\Delta_X, C) & \xleftarrow{\quad \text{?} \quad} & \mathbf{HB}(X_C, \Omega_{X_C/C}(-1)) \\
 \downarrow \text{忠実充満} & & \uparrow \\
 (X \text{ 上の一般化表現}) & & \\
 \uparrow & & \\
 (X \text{ 上の small 一般化表現}) & \xleftarrow[\text{圏同値}]{\sim} & \mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1))
 \end{array}$$

左上の縦の関手は, Δ_X の有限次元連続 C 線型表現 V に対し, 各 $U = \text{Spec}(R) \subset X$ 上の一般化表現 $V \otimes_C \widehat{\bar{R}}_{\mathbb{Q}_p}$ を「はり合わせて」得られる X 上の一般化表現を対応させる. この関手が忠実充満であることは全く明らかではない. Δ_X の有限次元連続 C 線型表現 V に伴って, $X_{\bar{K}}$ 上のエタール局所系が定まるが, この局所系に係数を持つエタール・コホモロジーと, V に伴う X 上の一般化表現に係数をもつ X_{Falt} のコホモロジーの比較定理から従う [11, III Theorem 3.3], [12, §3, 8. Theorem, §4, 9. Theorem] (詳しい証明は [2] 参照). X 上の small 一般化表現は $\mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Delta_U, \widehat{\bar{R}})$ の対象の適当なはり合わせとして定義される.

注意. (1) 厳密には, 上の圏同値の構成には $\mathcal{X}$ のある無限小変形を一つ選ぶ必要がある (§4.2, §5.2 参照). また圏同値は無限小変形の取り方に依存している.

(2) 上に述べた p 進 Simpson 対応では, 一般化表現へと対応を拡張した結果, Higgs 束の半安定性や Chern 類の消滅に関する条件なしに, 対応が成立している. Δ_X の有限次元連続 C 線型表現に伴う small 一般化表現が, 対応する Higgs 束の半安定性や Chern 類などのことばで特徴づけられるかは, まだ良くわかっていない. 曲線上については §7(3) 参照.

(3) small でない場合も、同様の圏同値があることが望ましい．しかし、代数曲線上の直線束の場合に、次のように canonical な対応は存在し得ないことが、Faltings により指摘されている [13, p. 855–p.856]. X が O_K 上相対 1 次元であるとし、 J をそのヤコビ多様体とする．すると O_K 上の p -divisible group についての Tate の p 進 Hodge 理論 [27] により、次の完全列の射があり、下側の完全列は canonical な分裂を持つ．

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J(O_C)' & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta_X, O_C^\times) & \longrightarrow & \Gamma(X_C, \Omega_{X_C}(-1)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \log & & \downarrow \log & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(J) \otimes_{O_K} C & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_X^{\mathrm{ab}}, C) & \longrightarrow & \Gamma(X_C, \Omega_{X_C}(-1)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ここで $J(O_C)'$ は、 $J(O_C)$ の元で $J(\bar{k})$ ($\bar{k}$ は C の剰余体) での像が torsion になるもののなす部分群である．上側の完全列の分裂をとれば、 $J(O_C)'$ の元から定まる可逆層 $\mathcal{L}$ と $\Gamma(X_C, \Omega_{X_C}(-1))$ の元から定まる $\mathcal{L}$ 上の Higgs 場を考えることにより、 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta_X, O_C^\times)$ の元すなわち Δ_X の 1 次元連続線型 C 表現に対応する階数 1 の Higgs 束が構成できる．しかし $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用も考えるとこの完全列は一般に分裂しないことが知られており、したがって canonical な分裂をとることはできない．群の全射準同型 $\log: O_C^\times \rightarrow C$ の section を一つ選んでおけば、下側の完全列の分裂から上側の完全列の分裂がえられる．Faltings は、 $\log: O_C^\times \rightarrow C$ の section を一つ選べば、 X が代数曲線の場合には small の条件なしに一般化表現と Higgs 束の圏同値を構成できることを示している (§7 (2) 参照)．

(4) 整係数の理論も定式化されている． $\mathbf{Rep}_{\mathrm{free}}^{\mathrm{small}}(\Delta_U, \widehat{R})$ の適当なはり合わせとして得られる X 上の small 整一般化表現の圏と $\mathbf{HB}^{\mathrm{small}}(\mathcal{O}_X, \Omega_{X/O_C}(-1))$ の間の圏同値がある．

§ 3. 局所理論：一般化表現から Higgs 束の構成

前の節で述べた small 一般化表現と small Higgs 束の対応は、 X の affine 開部分スキーム上で局所的に構成可能で、 X 上での対応はこれらのはり合わせとして実現される．この節と次の節ではこの局所対応の構成法について紹介する．

$U = \mathrm{Spec}(R)$ を X の affine 開部分スキームとし、 R の可逆な元からなる座標 $t_i \in R^\times$ ($1 \leq i \leq d$) が存在すると仮定する． Ω_{R/O_K} は $d \log(t_i) := t_i^{-1} dt_i$ ($1 \leq i \leq d$) を基底とする自由 R 加群となる．このような $t_1, t_2, \dots, t_d$ を一つとる． $\widehat{R}$ の部分環 $RO_{\bar{K}} \cong R \otimes_{O_K} O_{\bar{K}}$ を R_1 で表し、その p 進完備化を $\widehat{R}_1$ とする． $\widehat{R}_1$ に伴う形式スキーム $\mathrm{Spf}(\widehat{R}_1)$ は、 $U \subset X$ を O_C まで底変換し p 進完備化して得られる $\mathcal{X}$ の affine 開部分形式スキームに他ならない．したがって U 上の局所理論では Higgs 束の圏として $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ を考えることになる．この節では座標 $t_1, t_2, \dots, t_d$ を用いて圏同値

$$(3.1) \quad \mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\Delta_R, \widehat{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$$

を構成する方法について紹介する．構成は 4 つのステップからなる．

§ 3.1. Almost ガロア降下

環 R 上 $O_{\overline{K}}$ と $t_1, t_2, \dots, t_d$ の p^n 乗根 ($n = 1, 2, \dots$) で生成される $\overline{R}$ の部分環を R_∞ , $\mathcal{K}_\infty$ をその分数体とし, $\Gamma := \text{Gal}(\mathcal{K}_\infty/\mathcal{K}\overline{K})$ とおく³. Kummer 理論により, Γ は $\mathbb{Z}_p(1)^{\oplus d}$ と自然に同型になることが分かる. R_∞ は R の $\mathcal{K}_\infty$ での整閉包と一致し, Γ の作用で安定である. $\widehat{R}_\infty$ を R_∞ の p 進完備化 $\varprojlim_n R_\infty/p^n R_\infty$ に p 進位相を与えたものとする. まず次の定理により Δ_R の半線型 $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 表現は, Γ の $\widehat{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}$ 表現に降下する.

定理 3.1 ([3, §2, §3], [31, §9-§11]). テンソル積 $\otimes_{\widehat{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}} \widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ をとることにより得られる関手

$$\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(\Gamma, \widehat{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\text{proj}}(\Delta_R, \widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}).$$

は圏同値である. また, これは small な対象のなす部分圏の間の圏同値を誘導する.

ガロア降下の理論により, ガロア拡大 B/A に対して, $\text{Gal}(B/A)$ が半線形に作用する B 加群の圏は A 加群の圏と圏同値になり, 有限生成性や射影性はこの対応で保たれる. $\overline{R}_{\mathbb{Q}_p}$ は $R_{\infty, \mathbb{Q}_p}$ のガロア拡大であるので, ガロア降下が使えるのだが, この拡大は無限次拡大で係数環は $\overline{R}$, R_∞ の p 進完備化をとっているため, $\overline{R}/p^n$ 加群のレベルで降下を考える必要が出てくる. この問題は次の Faltings の almost purity 定理を用いて解決される: $U_K = \text{Spec}(R_{\mathbb{Q}_p})$ 上の有限エタールスキームの中で $U = \text{Spec}(R)$ の整閉包をとると, 一般に特殊ファイバーに沿って分岐が現れるが, $\text{Spec}(R_{\infty, \mathbb{Q}_p})$ まで底変換してから整閉包をとると $\text{Spec}(R_\infty)$ 上「ほとんど」不分岐になる [12, §2, 4. Theorem]. この定理は Faltings による p 進 Hodge 理論の研究, また最近の P. Scholze による perfectoid 理論を用いた p 進 Hodge 理論の研究の技術的な核をなす極めて重要かつ深い定理である. 特に定理 3.1 の証明の鍵となるのは, almost purity 定理の帰結として得られる次の命題である. $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ は $O_{\overline{K}}$ の極大イデアルとする.

補題 3.2. G を $\text{Ker}(\Delta_R \rightarrow \Gamma)$ の任意の開部分群, α, β を正の有理数とする.

- (1) $\mathfrak{m}_{\overline{K}} \cdot H^1(G, \overline{R}/p^\alpha \overline{R}) = 0$.
- (2) 写像 $H^1(G, 1 + p^{\alpha+\beta} M_n(\widehat{\overline{R}})) \rightarrow H^1(G, 1 + p^\alpha M_n(\widehat{\overline{R}}))$ は自明.

(1) は almost purity 定理の帰結である. (2) は β は $\frac{\alpha}{2}$ 以下であるとしてよい. (1) を同型 $(1 + p^{\alpha+n\beta} M_n(\overline{R})) / (1 + p^{\alpha+(n+2)\beta} M_n(\overline{R})) \cong M_n(\overline{R}/p^{2\beta} \overline{R})$ ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$) の右辺に適用すると, $p^\beta H^1(G, M_n(\overline{R}/p^{2\beta} \overline{R})) = 0$ となることを用いて (2) が証明される.

§ 3.2. 完備化はずし

定義より $\widehat{R}_1$ は $\widehat{R}_\infty$ の部分環とみなせる. $\widehat{R}_1$ 上 $t_1, \dots, t_d$ の p^n 乗根 ($n = 1, 2, \dots$) で生成される $\widehat{R}_\infty$ の部分環を $\widetilde{R}_\infty$ とする. $\widehat{R}_\infty$ は $\widetilde{R}_\infty$ の p 進完備化と同型である. 部分環 $\widetilde{R}_\infty$ は Γ の作用で安定である. 二つ目のステップは次の定理である.

³ t_i が可逆なことから, t_i の $\overline{K}$ での p^n 乗根は, $\overline{R}$ に入ることが分かる

定理 3.3 ([3, §2,§3],[31, §9-§11]). テンソル積 $\otimes_{\tilde{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}} \hat{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}$ をとることによって得られる関手

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}}(\Gamma, \tilde{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}}(\Gamma, \hat{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p})$$

は圏同値であり, さらに small な対象のなす部分圏の間の圏同値を誘導する.

整数 $n \geq 0$ に対し, $\hat{R}_1$ 上 t_i ($1 \leq i \leq d$) の p^n 乗根で生成される $\hat{R}_{\infty}$ の部分環を S_n とする. すると $\hat{R}_{\infty}$ の S_n 加群としての直和分解 $\hat{R}_{\infty} = S_n^c \oplus S_n$ で, S_n^c が Γ の作用で保たれ, かつ $p^{\frac{1}{p-1}} H^1(\Gamma^{p^n}, S_n^c) = 0$ が成り立つものがとれる. 底加群が階数 r の自由加群である $\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}}(\Gamma, \hat{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p})$ の対象は, 基底を用いて連続 1 コサイクル $\Gamma \rightarrow GL_r(\hat{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p})$ で記述できるが, 上に述べたコホモロジーの性質を利用して基底をうまく取り替えることにより, この連続 1 コサイクルの係数にある S_n ($n \in \mathbb{N}$) に入れることができる.

§ 3.3. Higgs 束の構成

$\tilde{R}_{\infty}$ は S_n ($n \in \mathbb{N}$) の合併であることから, $\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}}(\Gamma, \tilde{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p})$ の対象 W_{∞} は, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ をとれば必ず $\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}}(\Gamma, S_n, \mathbb{Q}_p)$ のある対象 W_n の $\tilde{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}$ への係数拡大として得られる. W_{∞} が small であるときは, 次のように $n = 0$ にとれる, すなわち S_n として $\hat{R}_1$ がとれることが言える.

定理 3.4 ([31, §12]). テンソル積 $\otimes_{\hat{R}_1, \mathbb{Q}_p} \tilde{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}$ をとることによって得られる次の関手は圏同値である.

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\Gamma, \hat{R}_1) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\Gamma, \tilde{R}_{\infty})$$

圏 $\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\Gamma, \tilde{R}_{\infty})$ の対象 W_{∞} の圏 $\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\Gamma, \hat{R}_1)$ への降下 W_0 は次のように具体的に構成される. $\mathbb{Z}_p$ 加群 $\mathbb{Z}_p(1)$ の基底 ε を一つとると, 同型 $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p(1)^{\oplus d} \cong \mathbb{Z}_p^{\oplus d}$ が得られる. $\mathbb{Z}_p^{\oplus d}$ の標準基底 e_i ($1 \leq i \leq d$) に対応する Γ の元を γ_i とする. すると W_{∞} の $\tilde{R}_{\infty, \mathbb{Q}_p}$ 線型自己準同型 ϕ_i を $\phi_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n}(\gamma_i^{p^n} - 1)(x)$ で定めることができる. W_{∞} の smallness から, W_{∞} の有限生成 $\tilde{R}_{\infty}$ 部分加群 W_{∞}° と有理数 $\alpha > \frac{2}{p-1}$ で, $W_{\infty, \mathbb{Q}_p}^{\circ} = W_{\infty}^{\circ}$ かつ $\phi_i(W_{\infty}^{\circ}) \subset p^{\alpha} W_{\infty}^{\circ}$ となるものが存在することが導かれる. 特に $\exp(-\phi_i)$ は W_{∞} で収束することが分かる. W_{∞} への新しい Γ 作用を $\gamma_i \exp(-\phi_i)$ ($1 \leq i \leq d$) で定めてやると, W_{∞} の離散位相について連続作用となり, この作用にガロア降下理論を適用することができる. W_0 はこの作用に関する W_{∞} の降下, すなわち Γ 作用不変部分として構成される.

$$W_0 = \{x \in W_{\infty} \mid \gamma_i(x) = \exp \phi_i(x) \text{ for all } 1 \leq i \leq d\}.$$

最後に $\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\Gamma, \hat{R}_1)$ と $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\hat{R}_1, \Omega_{\hat{R}_1/O_C}(-1))$ の圏同値を構成する. $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)$, $\gamma_i \in \Gamma$ ($1 \leq i \leq d$) は前段と同じとする. $\hat{R}_1$ 加群 $\Omega_{\hat{R}_1/O_C}$ は $d \log t_i$ ($1 \leq i \leq d$) を基底にもつ. $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\hat{R}_1, \Omega_{\hat{R}_1/O_C}(-1))$ の対象 (M, θ) に対し, M の $\hat{R}_1, \mathbb{Q}_p$ 線型自己準同型 $\theta_{i, \varepsilon}^{\log}$ ($1 \leq i \leq d$) を

$$(3.2) \quad \theta(x) = \sum_{1 \leq i \leq d} \theta_{i, \varepsilon}^{\log}(x) \otimes d \log t_i \otimes \varepsilon^{-1}$$

で定めると, 条件 $\theta \wedge \theta = 0$ は $\theta_{i,\varepsilon}^{\log} \circ \theta_{j,\varepsilon}^{\log} = \theta_{j,\varepsilon}^{\log} \circ \theta_{i,\varepsilon}^{\log}$ ($1 \leq i, j \leq d$) と同値になる. 一方 $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Gamma, \widehat{R}_1)$ の対象 W_0 に対し, γ_i の W_0 への $\widehat{R}_{1,\mathbb{Q}_p}$ 線型作用の $\log$ は, γ_i の作用の smallness から収束しすることが分かり, 互いに可換な W_0 の $\widehat{R}_{1,\mathbb{Q}_p}$ 線型自己準同型 $\log \gamma_i$ ($1 \leq i \leq d$) が得られる. そこで $\widehat{R}_{1,\mathbb{Q}_p}$ 線型写像 $\theta: W_0 \rightarrow W_0 \otimes_{\widehat{R}_1} \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)$ を

$$\theta(x) = \sum_{1 \leq i \leq d} \log \gamma_i(x) \otimes d \log t_i \otimes \varepsilon^{-1}, \quad x \in W_0$$

で定めると, W_0 の smallness より (W_0, θ) は $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ の対象となる. この対応が欲しい圏同値を与える. 証明は易しい. $\mathbb{Z}_p(1)$ の基底 ε の取り方に依存しないことも容易に分かる.

命題 3.5. 上の対応は次の圏同値を与える.

$$\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Gamma, \widehat{R}_1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)).$$

定理 3.1, 3.3, 3.4 と命題 3.5 の圏同値を合成することにより, 構成したかった圏同値 (3.1) を得る.

この構成は明らかに $U = \text{Spec}(R)$ の座標 $t_1, t_2, \dots, t_d \in R^\times$ に依存している. 座標を取り替えると構成で用いた $\overline{R}/R_1$ の中間拡大 R_∞ が変わってしまい, 二つの構成を直接比較することは難しい. Faltings は (3.1) の逆向きの関手を R_∞ を経由せずに直接構成する方法を与えることにより, 関手 (3.1) が座標の取り方によらないことを示した. これが p 進 Simpson 対応の理論を確立する上で鍵となる発見であったといえる. この逆向き関手の構成については次の節で紹介する.

§ 3.4. 補足

(1) K_∞ を K 上 1 の p^n 乗根 ($n \in \mathbb{N}$) で生成される $\overline{K}$ の部分体とし, G_K, Γ_K を拡大 $\overline{K}/K$, K_∞/K のガロア群とする. 上記の研究に先行して, S. Sen が関手

$$\mathbf{Rep}(\Gamma_K, K_\infty) \rightarrow \mathbf{Rep}(G_K, C); W_\infty \mapsto W_\infty \otimes_{K_\infty} C$$

が圏同値になることを示していた [25, (2.1)]. その証明は, K_∞ の有限次拡大は「ほとんど」不分岐であるという Tate の定理 [27, (3.2)] を用いる. Faltings の almost purity 定理, 定理 3.1, 定理 3.3 はこの Tate の定理や Sen の理論にアイデアを得ている.

(2) Faltings は次の整係数の定理も証明している: 係数拡大によって得られる関手

$$\mathbf{Rep}_{\text{free}}^{\text{small}}(\Gamma, \widehat{R}_1) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\text{free}}^{\text{small}}(\Delta_R, \widehat{R})$$

は圏同値である. $\mathbf{Rep}_{\text{free}}^{\text{small}}(\Delta_R, \widehat{R})$ の対象では, $\text{mod } p^\alpha$ (α は $\alpha > \frac{2}{p-1}$ をみたすある有理数) で Δ_R の作用が自明な基底が取れることから, 1 コサイクルの議論で $\widehat{R}_1$ への降下の存在を段階をふまずに一気に示すことができる [13, §3, Lemma 1]. almost purity 定理により

$H^1(\Gamma, R/p^\alpha) \rightarrow H^1(\Delta_R, \overline{R}/p^\alpha)$ の cokernel が $p^{\frac{1}{p-1}+\beta}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha, \beta > 0$) で消えることが鍵となる. 命題 3.5 と全く同じ構成により $\mathbf{Rep}_{\text{free}}^{\text{small}}(\Gamma, \widehat{R}_1)$ は $\mathbf{HB}_{\text{free}}^{\text{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ と圏同値になり, (3.1) の整係数版が得られる.

(3) W を $\mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Delta_R, \widehat{R})$ の対象とし, W_∞ をその $\mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Gamma, \widehat{R}_\infty)$ への降下, W_∞° を定義 2.1 (2) の条件をみたす W_∞ の Γ 安定な有限生成部分 $\widehat{R}_\infty$ 加群とする. Faltings は, W_∞° の $\mathbf{Rep}_{\text{free}}^{\text{small}}(\Gamma, \widehat{R}_\infty)$ の対象による分解 $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow W_\infty^\circ \rightarrow 0$ をとり, $T_i \otimes_{\widehat{R}_\infty} \widehat{R}$ に (2) の整係数の理論を適用することにより, W の $\mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Gamma, \widehat{R}_1)$ への降下を構成できることを主張した [13, p. 852]. U の O_K 上の相対次元が 1 の場合でもこのような分解の存在は明らかではないことが Abbes により指摘された ([1, Proposition II.14.16] 参照). 今構成した圏同値 (3.1) を用いれば分解の存在を示せる [31, Corollary 13.8]. (3.1) を用いずに証明できるかは分かっていない. なお [31] での定理 3.1, 定理 3.3 の証明では, この Faltings の議論を使って底加群が自由加群の場合に帰着して証明している.

(4) 定理 3.1, 定理 3.3 は, ここで紹介した R が O_K 上 smooth な場合については, Faltings 以前に Andreatta と Brinon により示されていた. 彼らは, U_K の基本群 $\text{Gal}(K^{\text{ur}}/K)$ の一般化表現の場合についても, 定理 3.1, 定理 3.3 と (1) で述べた Sen の理論を融合させた結果を示している. log smooth かつ生成ファイバーの log が正規交叉因子から定義されている場合が, [31] で扱われている.

§ 4. 局所理論 : Higgs 束から一般化表現の構成

この節では, §3 で構成した関手 (3.1) の逆向きの関手の座標によらない構成について紹介する. crystalline cohomology の理論では, 可積分接続付き加群が crystalline site 上の crystal と呼ばれる層として解釈される. この Higgs 束での類似を考えることが構成のアイデアである. Faltings は crystal の理論の Higgs 版の構築は避けて, 上の「解釈」の Taylor 展開を用いた具体的記述の Higgs 束における類似を用いて逆向きの関手を構成した. Faltings のオリジナルの構成及びその関手 (3.1) との比較を紹介したのち, [1] で定式化されている crystal の理論の Higgs 版を用いた構成, さらに p 進周期環を用いた構成を紹介する.

§ 4.1. Fontaine の p 進周期環 A_{inf}

まず準備として Fontaine の p 進周期環の一つ A_{inf} の基本性質について述べる ([16, §1], [28, Appendix] 参照). p -torsion free な $O_{\overline{K}}$ 代数 S で次の 2 性質をみたすものを考える.

(i) $S_{\mathbb{Q}_p}$ の中で S は整閉である. (ii) 絶対 Frobenius $\phi: S/pS \rightarrow S/pS$ が全射である. 例えば $O_{\overline{K}}$, $\overline{R}$, R_∞ はこの条件をみたしている. $A_{\text{inf}}(S)$ は S について関手的に構成される p -torsion free かつ p 進完備な環で, S について関手的な全射準同型 $\vartheta_S: A_{\text{inf}}(S) \rightarrow \widehat{S} := \varprojlim_n S/p^n$ をもつ. また群 $\varprojlim_{\mathbb{N}, \phi} S^\times = \{(a_n)_{n \geq 0}; a_n \in S^\times, a_{n+1}^p = a_n (n \geq 0)\}$ からの S について関手的な準同型 $[\cdot]: \varprojlim_{\mathbb{N}, \phi} S^\times \rightarrow A_{\text{inf}}(S)^\times$ で, $\theta([a]) = a_0$ ($a = (a_n)_{n \geq 0} \in \varprojlim_{\mathbb{N}, \phi} S^\times$) をみたすものがある. $\text{Ker}(\vartheta_S)$ は S によらないある $A_{\text{inf}}(O_{\overline{K}})$ の元 ξ で生成

され, $A_{\inf}(S)$ は ξ -torsion free かつ ξ 進完備でもある. ξ は写像 $[\]$ を使って, 具体的に次のように作ることができる. 1 の原始 p^n 乗根の系 $\varepsilon_n \in O_{\overline{K}}$ ($n \geq 0$), $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 \neq 1$, $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$ により, $\varprojlim_{\mathbb{N}, \phi} S^\times$ の元 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 0}$, $\varepsilon' = (\varepsilon_{n+1})_{n \geq 0}$ が定まり, $A_{\inf}(O_{\overline{K}})$ の元 $[\varepsilon] - 1$, $[\varepsilon'] - 1$ は非零因子となる. $A_{\inf}(S)$ の元 $\xi_\varepsilon = \sum_{i=0}^{p-1} [\varepsilon']^i = ([\varepsilon] - 1)([\varepsilon'] - 1)^{-1}$ を考えると, $\vartheta_{O_{\overline{K}}}(\xi_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{p-1} (\varepsilon_1)^i = 0$ となる. この元 ξ_ε で $\text{Ker}(\vartheta_S)$ が生成される. 正整数 n に対し $A_n(S) = A_{\inf}(S)/\xi^n A_{\inf}(S)$ と定め, ϑ_S により $A_1(S)$ と $\widehat{S}$ を同一視する. $A_{\inf}(S)$ は ξ -torsion free であることから, $A_{\inf}(S)$ の ξ 倍写像から同型

$$(4.1) \quad \xi: \widehat{S} = A_1(S) \xrightarrow{\cong} \xi A_2(S)$$

が誘導される. また canonical な単射

$$(4.2) \quad \widehat{S}(1) = \widehat{S} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1) \hookrightarrow \xi A_2(S); a \otimes \varepsilon \mapsto \xi_\varepsilon((\varepsilon_1 - 1)a)$$

がある. O_C 加群 L と整数 r に対し, $\xi^r L := L \otimes_{O_C} (\xi A_2(O_{\overline{K}}))^{\otimes r}$ と定め, $a \in L$ に対し, $\xi^r L$ の元 $a \otimes \xi^{\otimes r}$ を $\xi^r a$ で表す. すると (4.2) より, 次の同型が誘導される.

$$(4.3) \quad L(r)_{\mathbb{Q}_p} \cong (\xi^r L)_{\mathbb{Q}_p}; a \otimes \varepsilon^{\otimes r} \mapsto \xi_\varepsilon^r (\varepsilon_1 - 1)^r a$$

参考のために $A_{\inf}(S)$ の構成を簡単に紹介する. 以後の議論で以下の具体的構成は用いない. $S/pS \xleftarrow{\phi} S/pS \xleftarrow{\phi} S/pS \xleftarrow{\phi} \dots$ の逆極限を $S^\flat$ とし, $A_{\inf}(S)$ を $S^\flat$ に係数をもつ Witt 環 $W(S^\flat)$ と定める. $S^\flat$ の絶対 Frobenius は全単射になり, したがって素数 p は $A_{\inf}(S)$ において非零因子で, $A_{\inf}(S)/p = S^\flat$ となる. $A_{\inf}(S)$ から $\widehat{S}$ への環準同型 $\vartheta_S: A_{\inf}(S) \rightarrow \widehat{S}$ が $\vartheta_S([s]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{s}_n^{p^n}$ で定義できる. ここで $s = (s_n)_{n \geq 0}$ は $S^\flat$ の元, $[s]$ はその Teichmüller 持ち上げ $(s, 0, 0, \dots)$, $\widetilde{s}_n$ は $s_n \in S/pS$ の S への持ち上げである. 右辺の極限は収束し, 極限は持ち上げ $\widetilde{s}_n$ の取り方によらない. S の条件 (ii) より ϑ_S が全射になることが分かる. また S の条件 (i) から, ϑ_S の核はある非零因子で生成されることが導かれる. 群準同型 $[\]: \varprojlim_{\mathbb{N}, \phi} S^\times \rightarrow A_{\inf}(S)^\times$ は, 群準同型 $\varprojlim_{\mathbb{N}, \phi} S^\times \rightarrow (S^\flat)^\times; (a_n) \mapsto (a_n \bmod p)$ と Teichmüller 持ち上げの合成で定める.

§ 4.2. Faltings の構成

$A_{\inf} = A_{\inf}(O_{\overline{K}})$, $A_n = A_n(O_{\overline{K}})$ とおく. $U = \text{Spec}(R) \subset X$, $\overline{R}$, $\widehat{R}_1$ は §2, §3 と同じとする. 形式スキームの smooth な射 $\text{Spf}(\widehat{R}_1) \rightarrow \text{Spf}(O_C)$ の smooth な持ち上げ $\text{Spf}(R_2) \rightarrow \text{Spf}(A_2)$ をとる⁴. この持ち上げを使って (3.1) の逆向きの関手を構成する.

M を $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ の対象とする. O_C 代数の準同型 $\widehat{R}_1 \hookrightarrow \widehat{R}$ は A_2 代数の準同型 $f: R_2 \hookrightarrow A_2(\overline{R})$ へ持ち上がる.

$$\begin{array}{ccccc} O_C & \longrightarrow & \widehat{R}_1 & \longrightarrow & \widehat{R} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A_2 & \longrightarrow & R_2 & \xrightarrow{f} & A_2(\overline{R}) \end{array}$$

⁴ 正確には, A_2 上の p 進完備な環 R_2 と同型 $R_2/\xi \cong \widehat{R}_1$ の組で, 各正整数 n に対し R_2/p^n が A_2/p^n 上 smooth なものをとる. このような持ち上げは non-canonical な同型を除いて一意である.

このような持ち上げ f に対し $W_f(M) := M \otimes_{\widehat{R}_1, \mathbb{Q}_p} \widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ と定め, 二つの持ち上げ f, f' に対し, $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 線型な同型

$$\tau_{f',f}: W_f(M) \xrightarrow{\cong} W_{f'}(M)$$

を次のように定める.

写像 $\widetilde{D}_{f',f}: R_2 \rightarrow \xi A_2(\overline{R}); a \mapsto f(a) - f'(a)$ は, p 進位相について連続な O_C 線型 derivation $D_{f',f}: \widehat{R}_1 \rightarrow \xi A_2(\overline{R})$ を経由する. 対応する $\widehat{R}_1$ 線型写像 $\Omega_{\widehat{R}_1/O_C} \rightarrow \xi A_2(\overline{R})$ の $\otimes_{O_C} (\xi A_2)^{\otimes(-1)}$ をとって $\widehat{R}_1$ 線型写像

$$(4.4) \quad h_{f',f}: \xi^{-1} \Omega_{\widehat{R}_1/O_C} \rightarrow \widehat{R}$$

を得る. 元 $a \in \widehat{R}_1$ の持ち上げ $\tilde{a} \in R_2$ をとると, 同型 $\xi: \widehat{R} \xrightarrow{\cong} \xi A_2(\widehat{R})$ の逆写像を用いて, $h_{f',f}(\xi^{-1} da) = \xi^{-1}(f(\tilde{a}) - f'(\tilde{a}))$ とかける. この $h_{f',f}$ を用いて, $M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ の $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 線型自己準同型 $\theta_{f',f}$ を合成

$$(\text{id}_M \otimes h_{f',f}) \circ \theta: M \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}_1} \xi^{-1} \Omega_{\widehat{R}_1/O_C} \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$$

の $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 線型化で定める. (4.3) より同型 $\Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)_{\mathbb{Q}_p} \cong (\xi^{-1} \Omega_{\widehat{R}_1/O_C})_{\mathbb{Q}_p}$ があることに注意する.

座標を使うと $\theta_{f',f}$ は次のように具体的にかけ. R の O_K 上の座標 $t_1, \dots, t_d \in R^\times$ を一つとり, その R_2 への持ち上げ $\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_d \in R_2^\times$ をとる. M の自己準同型 $\theta_{i,\xi}$ を

$$(4.5) \quad \theta(x) = \sum_{1 \leq i \leq d} \theta_{i,\xi}(x) \otimes \xi^{-1} dt_i \quad (x \in M)$$

で定めると,

$$(4.6) \quad \theta_{f',f}(x \otimes 1) = \sum_{1 \leq i \leq d} \theta_{i,\xi}(x) \otimes \xi^{-1}(f(\tilde{t}_i) - f'(\tilde{t}_i)) \quad (x \in M)$$

となる. また (4.2) の作り方より, (3.2) の $\theta_{i,\varepsilon}^{\log}$ と $\theta_{i,\xi_\varepsilon}$ には次の関係がある.

$$(4.7) \quad \theta_{i,\varepsilon}^{\log} = t_i(\varepsilon_1 - 1)\theta_{i,\xi_\varepsilon}$$

この関係式と M の smallness より, ある有理数 $\alpha > \frac{1}{p-1}$ に対して, $p^{-\alpha}\theta_{i,\xi_\varepsilon}$ 従って $p^{-\alpha}\theta_{f',f}$ が位相的にべき零となることが分かる. $\theta_{i,\xi}$ ($1 \leq i \leq d$) が互いに可換であることに注意する.

このべき零性より, $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 同型写像 $\tau_{f',f}: W_f(M) \xrightarrow{\cong} W_{f'}(M)$ を

$$(4.8) \quad \tau_{f',f} := \exp(\theta_{f',f})$$

で定義できる. (4.6) を使って具体的に書くと, Taylor 級数と類似した式

$$(4.9) \quad \tau_{f',f}(x \otimes 1) = \sum_{\underline{n}=(n_i) \in \mathbb{N}^d} \prod_{1 \leq i \leq d} \frac{1}{n_i!} \theta_{i,\xi}^{n_i}(x) \otimes \prod_{1 \leq i \leq d} \{\xi^{-1}(f(\tilde{t}_i) - f'(\tilde{t}_i))\}^{n_i} \quad (x \in M)$$

となる．Faltings の原論文ではこの式が用いられている [13, p. 851]．3 つの持ち上げ f, f', f'' に対し, $\theta_{f'',f'} + \theta_{f',f} = \theta_{f'',f}$ が成り立つことは定義より明らかであり, (4.6) より $\theta_{f'',f'}$ と $\theta_{f',f}$ は可換である．また $\theta_{f,f} = 0$ である．従って, 次の等式が成り立つ．

$$(4.10) \quad \tau_{f,f} = \text{id}, \quad \tau_{f'',f'} \circ \tau_{f',f} = \tau_{f'',f}.$$

$g \in \Delta_R$ に対し, 半線型な同型 $\sigma_g: W_f(M) \rightarrow W_{gf}(M)$ を $\sigma_g(x \otimes a) = x \otimes g(a)$ ($x \in M, a \in \widehat{R}$) で定める． $g \circ h_{f',f} = h_{gf',gf}$ より $(\text{id} \otimes g) \circ \theta_{f',f} = \theta_{gf',gf} \circ (\text{id} \otimes g)$ が分かり, 従って次の等式が成り立つ．

$$(4.11) \quad \sigma_g \circ \tau_{f',f} = \tau_{gf',gf} \circ \sigma_g: W_f(M) \rightarrow W_{gf'}(M).$$

$\tau_{f',f}, \sigma_g$ を用いて, $W_f(M)$ への Δ_R の半線型作用 ρ_f を次の合成で定義する．

$$\rho_f(g) := \tau_{f,gf} \circ \sigma_g: W_f(M) \xrightarrow{\cong} W_{gf}(M) \xrightarrow{\cong} W_f(M), \quad g \in \Delta_R$$

等式 (4.10), (4.11) を用いて, これが半線型作用になり, $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 線型同型 $\tau_{f',f}: W_f(M) \xrightarrow{\cong} W_{f'}(M)$ は Δ_R 同変になることが確認できる． Δ_R の $A_2(\widehat{R})$ への作用の連続性から作用 ρ_f の連続性が従う⁵． f のとりかたによらない形で半線型表現を構成した方が扱いやすいので

$$W(M) = \{(x_f) \in \prod_f W_f(M); \tau_{f',f}(x_f) = x_{f'}\}.$$

と定める． $W(M)$ は $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(\Delta_R, \widehat{R}_{\mathbb{Q}_p})$ の対象となる． $W_f(M)$ への射影により Δ_R 同変な $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 線型同型

$$(4.12) \quad \tau_f: W(M) \xrightarrow{\cong} W_f(M)$$

が得られる． $W(M)$ が small になり, 圏同値

$$W: \mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Delta_R, \widehat{R})$$

を与えることは, 次小節の関手 (3.1) との比較により示される．

注意． §5.2 で関手 $W(M)$ をはり合わせる際に, $W(M)$ に整構造を入れる必要がある．有理数 $\alpha > \frac{1}{p-1}$ と M の有限生成 $\widehat{R}_1$ 部分加群 M° で, $M_{\mathbb{Q}_p}^\circ = M$ かつ $\theta(M^\circ) \subset p^{\alpha + \frac{1}{p-1}}(M^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ をみたすものをとる．すると Δ が連続半線型に作用する p 進完備な有限生成 $\widehat{R}$ 加群 $W(M^\circ)$ で $W(M^\circ)_{\mathbb{Q}_p} = W(M)$ となるものを次のように構成できる． $M^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ は p 進完備な有限生成 $\widehat{R}$ 加群となる⁶．各持ち上げ $f: R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$

⁵ 任意の正の整数 N に対し, Δ_R の開部分群 G を十分小さくとれば, $g \in G$ に対して $gf(\tilde{t}_i) - f(\tilde{t}_i) \in p^N A_2(\overline{R}) \cap \xi A_2(\overline{R}) = p^N (\xi A_2(\overline{R}))$ となることを用いる．

⁶ 一般に p 進完備な環 S 上の有限生成加群 M に対し, $M_{\mathbb{Q}_p}$ が射影 $S_{\mathbb{Q}_p}$ 加群ならば M は p 進完備になる ([1, IV.3.2])． $M^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ が p -torsion free かは分からない． p -torsion part で割った商も p 進完備になるが, はり合わせを行うには割る前のものを考える必要がある．

に対し, $W_f(M^\circ) = M^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ とおく. $\xi^{-1}\Omega_{\widehat{R}_1/O_C} = p^{\frac{1}{p-1}} \cdot \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)$ なので, θ より $\widehat{R}_1$ 線型写像 $p^{-\alpha}\theta: M^\circ \rightarrow M^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \xi^{-1}\Omega_{\widehat{R}_1/O_C}$ が誘導され, これと $h_{f',f}$ から $M^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ の $\widehat{R}_1$ 準同型 $\theta_{f',f}^\alpha$ が $\theta_{f',f}$ と同様に誘導される. $p^{\frac{n}{p-1}} \in n!O_C$ に注意して, $\widehat{R}$ 線型同型

$$(4.13) \quad \tau_{f',f}^\circ: W_f(M^\circ) \xrightarrow{\cong} W_{f'}(M^\circ)$$

を $\sum_{n=0}^\infty (n!)^{-1} p^{n\alpha} (\theta_{f',f}^\alpha)^n$ で定義する. この定義は α の取り方によらない. $W_f(M)$ と同様に $\widehat{R}$ 加群 $W_f(M^\circ)$ への Δ_R の連続半線型な作用が定義でき, $\tau_{f',f}^\circ$ は Δ_R 同変となり, $W(M^\circ) = \{(x_f) \in \prod_f W_f(M^\circ); \tau_{f',f}^\circ(x_f) = x_{f'}\}$ が欲しい性質をみたす. 次小節 4.3 のように f をとると, (4.15) の M° についての類似と $\theta_{i,\xi_\varepsilon}(M^\circ) \subset p^\alpha M^\circ$ より, M° の $W_f(M^\circ)/p^{\alpha+\frac{1}{p-1}}$ での像への Δ_R 作用は自明になることも分かる.

§ 4.3. 2 構成の比較

§4.2 で構成した $W(M)$ と関手 (3.1) を比較する. この小節では R の O_K 上の座標 $t_1, \dots, t_d \in R^\times$ を一つとって固定する. M を $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ の対象とする. 定理 3.4 の後のように, $\varepsilon, \gamma_i \in \Gamma$ をとると, 命題 3.5 の圏同値の構成で定まる M への $\gamma_i \in \Gamma$ の作用は $\exp(\theta_{i,\varepsilon}^{\log})$ である. この作用の $M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ への半線型作用への延長を ρ_θ で表すと, $(M, \theta) \mapsto (M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}, \rho_\theta)$ が (3.1) の逆関手を与える. この関手と §4.2 で構成した関手 $M \mapsto W(M)$ の同型を構成する. 構成のために t_i の p^n 乗根の系 $t_i^b = (t_{i,n})_{n \geq 0} \in \varprojlim_{\mathbb{N}, \phi} \overline{R}^\times$ と t_i の R_2 への持ち上げ $\tilde{t}_i$ をとる. 得られる同型 (4.16) はこれらの選び方に依存する. 選び方を変えたときの変換公式も具体的にかける ((4.17) 参照).

$A_{\inf}(\overline{R})$ の元 $[t_i^b]$ を考える. $g \in \Delta_R, 1 \leq i \leq d$ に対し, $\varepsilon_{g,i} \in \mathbb{Z}_p(1)$ を $g(t_i^b) = \varepsilon_{g,i} t_i^b$ で定めると,

$$(4.14) \quad g([t_i^b]) = [g(t_i^b)] = [\varepsilon_{g,i}][t_i^b]$$

となる. $[t_i^b]$ の $A_2(\overline{R})$ での像も, 同じ $[t_i^b]$ で表すことにする. $\vartheta_{\overline{R}}([t_i^b]) = t_{i,0} = t_i$ と $\tilde{t}_i$ が R_2/A_2 の座標となることから, $\widehat{R}_1 \rightarrow \widehat{R}$ の持ち上げ $f: R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$ で $f(\tilde{t}_i) = [t_i^b]$ となるものがただ一つある. この f について, 次が成り立つ [13, p.851, Definition 2 直前の段落].

命題 4.1. $W_f(M) = M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ 上で ρ_θ と ρ_f は一致する.

証明. γ_i の Δ_R への持ち上げ $\tilde{\gamma}_i$ と $x \in M$ に対し, $\rho_f(\tilde{\gamma}_i)(x \otimes 1) = \exp(\theta_{i,\varepsilon}^{\log})(x) \otimes 1$ を示せばよい. 左辺は定義より $\tau_{f,\tilde{\gamma}_i f} \circ \sigma_{\tilde{\gamma}_i}(x \otimes 1) = \tau_{f,\tilde{\gamma}_i f}(x \otimes 1)$ である. (4.14) より $(\tilde{\gamma}_i f)(\tilde{t}_j) - f(\tilde{t}_j) = \tilde{\gamma}_i([t_j^b]) - [t_j^b] = ([\varepsilon] - 1)[t_i^b]$ ($j = i$ のとき), 0 ($j \neq i$ のとき) である. $j = i$ のとき, この元の $\xi_\varepsilon: \widehat{R} \xrightarrow{\cong} \xi_\varepsilon A_2(\overline{R})$ による逆像は, $\xi_\varepsilon^{-1}([\varepsilon] - 1)[t_i^b] = \xi_\varepsilon^{-1}([\varepsilon'] - 1)\xi_\varepsilon[t_i^b] = \vartheta_{\overline{R}}([\varepsilon'] - 1)[t_i^b] = (\varepsilon_1 - 1)t_i$ となる. 従って (4.9) より

$$(4.15) \quad \tau_{f,\tilde{\gamma}_i f}(x \otimes 1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \theta_{i,\xi_\varepsilon}^n(x) \otimes \{(\varepsilon_1 - 1)t_i\}^n$$

となる. (4.7) より, これは $\exp(\theta_{i,\varepsilon}^{\log})(x) \otimes 1$ と一致する. $\square$

命題 4.1 と同型 (4.12) より, 圏 $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(\Delta_R, \widehat{R}_{\mathbb{Q}_p})$ における同型

$$(4.16) \quad c: W(M) \xrightarrow[\tau_f]{\cong} W_f(M) = (M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}, \rho_\theta)$$

を得る. この同型は t_i のみならず, $t_i^b, \tilde{t}_i$ にも依存する. 実際, 別の t_i の p べき根の系 $t_i^b = (t'_{i,n})_{n \geq 0}$ と t_i の R_2 への持ち上げ $\tilde{t}'_i$ をとって持ち上げ $f': R_2 \rightarrow A_2(\widehat{R})$ を定め, 同型 $c': W(M) \xrightarrow{\cong} (M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}, \rho_\theta)$ を作ると, $c \circ (c')^{-1}$ は $\tau_{f,f'} = \exp(\theta_{f,f'})$ に他ならない. これは (4.6) を用いて, 具体的に次のように計算できる. $a_i \in \mathbb{Z}_p, s_i \in \widehat{R}$ を

$$t_i^b = \varepsilon^{a_i} t_i, \quad s_i = \xi_\varepsilon^{-1}(\tilde{t}'_i - \tilde{t}_i)$$

で定める. すると $f'(\tilde{t}_i) = f'(\tilde{t}'_i - \xi_\varepsilon s_i) = [\varepsilon^{a_i}][t_i^b] - \xi_\varepsilon s_i$ となり,

$$\xi_\varepsilon^{-1}(f'(\tilde{t}_i) - f(\tilde{t}_i)) = \xi_\varepsilon^{-1}([\varepsilon^{a_i}] - 1)[t_i^b] - \xi_\varepsilon s_i = a_i(\varepsilon_1 - 1)t_i - s_i$$

を得る⁷. (4.6) より, 次の変換公式を得る.

$$(4.17) \quad c \circ (c')^{-1} = \exp(\theta_{f,f'}) = \prod_{1 \leq i \leq d} \exp(\theta_{i,\xi_\varepsilon} \otimes (a_i(\varepsilon_1 - 1)t_i - s_i))$$

§ 4.4. Crystalline site の類似を用いた構成

この小節では, 可積分接続付き加群の crystalline site 上の crystal による解釈 [5] の Higgs 束における類似を通した §4.2 の構成の翻訳 [1, IV] について紹介する. この翻訳により, $\text{Spf}(\widehat{R}_1)$ の A_2 上への持ち上げに依存しない p 進 Simpson 対応の定式化 (4.18) が得られる.

$\mathcal{U}_1 = \text{Spf}(\widehat{R}_1)$ とおく. (big) crystalline site の Higgs 版 $(\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ は, $\mathcal{U}_1$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 上平坦な p 進形式スキーム $u: \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{U}_1$ とその $A_{\text{inf}} = A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ 上への「持ち上げ」 $\mathcal{T}$ ⁸ のなす圏に, $\mathcal{T}$ の開被覆から定まる位相を入れたものとして定義される. 構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}}}$ は $\Gamma((\overline{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathcal{T}, u), \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}}}) = \Gamma(\overline{\mathcal{T}}, \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{T}}})$ で定める. $(\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ 上の $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}}, \mathbb{Q}_p}$ 加群の層 $\mathcal{F}$ を与えることは, $(\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ の各対象 $\mathcal{T} = (\overline{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathcal{T}, u)$ に対し, $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{T}}, \mathbb{Q}_p}$ 加群の層 $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ を「compatible に」与えることと同じになる. 特に, 圏 $(\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ における射 $f: \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}$ による引き戻し $f^{-1}(\mathcal{F}_{\mathcal{T}}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{T}}})} \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{T}'}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{T}'}$ が常に同型であるとき, $\mathcal{F}$ を $(\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ 上の isocrystal と呼ぶことにする. 次の性質をみたす isocrystal $\mathcal{F}$ のなす圏を考え $\text{HC}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}})$ で表す.

$\mathcal{U}_1$ の A_{inf} 上への smooth な持ち上げ $\mathcal{U} = \text{Spf}(\mathcal{R})$ (non-canonical な同型を除いてただ一つ存在) に対して, $\mathcal{U}_1$ 上の Zariski 層 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ が接続 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_1, \mathbb{Q}_p}$ 加群で $\Gamma(\mathcal{U}_1, \mathcal{M}_{\mathcal{U}})$ が射影 $\widehat{R}_{1, \mathbb{Q}_p}$ 加群である.

⁷ $\xi_\varepsilon = ([\varepsilon] - 1)([\varepsilon'] - 1)^{-1}$ より, $A_2 = A_2(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ で $([\varepsilon] - 1)^2 = 0$ となり, A_2 において $[\varepsilon^{a_i}] - 1 = a_i([\varepsilon] - 1) = a_i([\varepsilon'] - 1)\xi_\varepsilon$ となることが分かる. これと $\vartheta_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}([\varepsilon']) = \varepsilon_1, \vartheta_{\widehat{R}}([t_i^b]) = t_i$ を用いた.

⁸ 正確に述べると, $\text{Spf}(A_{\text{inf}})$ 上の (ξ, p) 進形式スキーム $\mathcal{T}$ で, ξ が $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ で正則であり, $\overline{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}/\xi\mathcal{O}_{\mathcal{T}})$ となるものとなる.

定理 4.2 ([1, IV.3.4]). $\mathcal{U}_1$ の $\mathrm{Spf}(A_{\mathrm{inf}})$ 上への smooth な持ち上げ $\mathcal{U}$ を一つとると、次の圏同値が誘導される。

$$\mathrm{HC}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{conv}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)).$$

$\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{conv}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ は smallness を少しだけ弱くしたある convergence⁹ を満たす対象のなす $\mathbf{HB}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)_{\mathbb{Q}_p})$ の充満部分圏である。isocrystal $\mathcal{F}$ に伴う Higgs 束は圏 $(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ の対象 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1 \hookrightarrow \mathcal{U}, \mathrm{id}_{\mathcal{U}_1})$ での切断 $M = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を取ることによって得られる。Grothendieck による可積分接続付き加群の stratification を用いた解釈の類似を Higgs 束で考えることにより、 M 上の Higgs 場 θ が構成される¹⁰。

この Higgs 束の $(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ 上の isocrystal による解釈を用いると、Faltings の関手 W は次のように構成される。自然な射 $\mathrm{Spf}(\widehat{R}) \rightarrow \mathcal{U}_1 = \mathrm{Spf}(\widehat{R}_1)$ と $\mathrm{Spf}(\widehat{R})$ の A_{inf} 上への持ち上げ $\mathrm{Spf}(A_{\mathrm{inf}}(\widehat{R}))$ により $(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ の対象が定まる。これを $\mathcal{D}_U$ で表す。 $A_{\mathrm{inf}}(\widehat{R})$, $\widehat{R}$ への Δ_R の作用から、対象 $\mathcal{D}_U$ への Δ_R の (右からの) 作用が定まる。 $\mathrm{HC}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})$ の対象 $\mathcal{F}$ に対し、 $\Gamma(\mathcal{D}_U, \mathcal{F})$ は $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p} = \Gamma(\mathcal{D}_U, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}}, \mathbb{Q}_p})$ 上の有限生成射影加群となり、 $\mathcal{D}_U$ への Δ_R の作用から、 $\Gamma(\mathcal{D}_U, \mathcal{F})$ への Δ_R の半線型作用が定まる。この作用は連続となり、次の関手が得られる [1, IV.5.2]。

$$(4.18) \quad \mathrm{HC}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}}) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}}(\Delta_R, \widehat{R}_{\mathbb{Q}_p})$$

この関手と定理 4.2 の圏同値を合わせると §4.2 で構成した Faltings の関手が得られる。

命題 4.3. 定理 4.2 の逆関手と (4.18) を合成して得られる関手

$$\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{conv}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}}(\Delta_R, \widehat{R}_{\mathbb{Q}_p})$$

の $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ への制限は、 $\mathcal{U}_1 = \mathrm{Spf}(\widehat{R}_1)$ の A_2 への持ち上げ $\mathcal{U} \bmod \xi^2$ を用いて §4.2 で構成した関手 W と canonical に同型である。

§ 4.5. 周期環を用いた構成

ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の crystalline 表現, semi-stable 表現の p 進周期環 B_{crys} , B_{st} を用いた定式化の手法 [15], [16] は、今では p 進表現をある種の線型的データを用いて捉える理論の定式化の標準的な方法の一つとなっている。これは、非常に大雑把に言えば、位相群 $\mathcal{G}$ の p 進表現とある線型的データ D を、 $\mathcal{G}$ の p 進表現と考えている線型的データの両方の構造をもつ「普遍的な環 (=周期環)」 B を用いて、次のように結びつける方法であ

⁹ R の座標 t_i をとり、(4.5) のように $\theta_{i,\xi}$ を定めると、 $\frac{1}{n!}\theta_{i,\xi}^n(x)$ ($x \in M$) が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。

¹⁰ 圏 $(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ での $\mathcal{U}$ 二つのファイバー積 $\mathcal{U}(1)$ を考えると、 $\overline{\mathcal{U}(1)}$ は対称テンソル代数 $\mathrm{Sym}_{\widehat{R}_1}(\xi^{-1}\Omega_{\widehat{R}_1/O_C})$ の p 進完備化に伴う形式スキームとなるのが鍵となる。Grothendieck の stratification の類似がちょうど Higgs 場を与えるように、うまく $(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ を定義している。

る. $\mathcal{G}$ の作用と線型データと両立する同型 $B \otimes V \cong B \otimes D$ があり, この同型から, 一方から他方を復元する同型

$$V \cong ((B \otimes D) \text{ の線型データが「自明な」部分}),$$

$$D \cong (B \otimes V)^{\mathcal{G}} = \{v \in B \otimes V \mid \text{すべての } g \in \mathcal{G} \text{ に対し, } (g \otimes g)v = v\}$$

が得られる.

§4.2 のように, $\mathrm{Spf}(\widehat{R}_1) \rightarrow \mathrm{Spf}(O_C)$ の smooth な持ち上げ $\mathrm{Spf}(R_2) \rightarrow \mathrm{Spf}(A_2)$ をとる. すると §4.2 で R_2 を用いて構成した関手 $W(-)$ を実現する次のような構造および性質をもつ「周期環」 $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ が構成でき, W の逆関手も $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ を用いて構成される (命題 4.5). $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ の構成方法は, 次小節で述べる.

- (a) $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ は p 進完備な $\widehat{R}$ 代数である. $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ には p 進位相を与える.
- (b) $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ は $\widehat{R}$ 半線型な Δ_R の連続作用をもつ.
- (c) $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ は Δ_R 同変かつ $\widehat{R}$ 線型な derivation $\theta: \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}} \otimes_{\widehat{R}_1} \xi^{-1}\Omega_{\widehat{R}_1/O_C}$ で $\theta \wedge \theta = 0$ をみたすものを持つ.
- (d) $(\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}})^{\theta=0} = \widehat{R}$.
- (e) $(\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}})^{\Delta_R} \xleftarrow{\cong} (\widehat{R})^{\Delta_R} = \widehat{R}_1$.
- (f) $\widehat{R}_1 \hookrightarrow \widehat{R}$ の持ち上げ $f: R_2 \hookrightarrow A_2(\overline{R})$ (§4.2 参照) に対して, $\widehat{R}_1$ 準同型

$$h_f: \xi^{-1}\Omega_{\widehat{R}_1/O_C} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$$

が定まり次をみたす.

(f-1) 二つの持ち上げ f, f' に対して, $h_{f',f}$ (4.4) が次のように表される.

$$(4.19) \quad h_{f',f} = h_{f'} - h_f: \xi^{-1}\Omega_{\widehat{R}_1/O_C} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$$

(f-2) $g \in \Delta_R$ に対し, $g \circ h_f = h_{gf}$.

(f-3) $\theta \circ h_f(\omega) = 1 \otimes \omega$ ($\omega \in \xi^{-1}\Omega_{\widehat{R}_1/O_C}$).

(f-4) $\widehat{R}_1$ 加群 $\xi^{-1}\Omega_{\widehat{R}_1/O_C}$ の基底 $\omega_1, \dots, \omega_d$ をとり, $U_i = h_f(\omega_i)$ とすると, $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ は U_i ($1 \leq i \leq d$) の $\widehat{R}$ 係数多項式環の p 進完備化と同型である.

周期環を用いた関手の構成原理に従って, $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ の対象 (M, θ_M) に伴う Δ_R が半線型に作用する $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 加群を

$$W_{\mathrm{per}}(M) := (M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}})^{\theta_M \otimes 1 + 1 \otimes \theta = 0}.$$

で定める. 上に述べた $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ の性質から, 次の命題が導かれる.

命題 4.4. (1) M について関手的な canonical な次の Δ_R 同変 $\widehat{R}_{1,\mathbb{Q}_p}$ 線型同型がある.

$$W(M) \cong W_{\mathrm{per}}(M)$$

(2) 埋め込み $W_{\text{per}}(M) \hookrightarrow M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ より次の $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ 線型同型が誘導される.

$$W_{\text{per}}(M) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{A}_{\text{Higgs}} \xrightarrow{\cong} M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}$$

証明. 持ち上げ $f: R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$ に対し, $M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ 線型自己同型 θ_f を合成 $(\text{id}_M \otimes h_f) \circ \theta: M \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ 線型化で定義する. R の座標 t_i をとると, $\theta_f(x \otimes 1) = \sum_{1 \leq i \leq d} \theta_{i,\xi}(x) \otimes h_f(\xi^{-1} dt_i)$ ($x \in M$) とかける. $\theta_{i,\xi}$ の定義は (4.5) 参照. これから, $\exp(\theta_{f',f})$ (4.8) と同様に, θ_f の exponential は収束することが分かり, $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ 線型な $M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の自己同型 $\exp(\theta_f)$ を得る. 性質 (f-3) より,

$$\exp(\theta_f) \circ (\theta_M \otimes 1 + 1 \otimes \theta) = (1 \otimes \theta) \circ \exp(\theta_f)$$

が分かり, 従って性質 (d) より, $\exp(\theta_f)$ は $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 線型な同型

$$c_f: W_{\text{per}}(M) \xrightarrow{\cong} M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R} = W_f(M)$$

を誘導する. この事実から (2) が従う. また θ_f と $\theta_{f'}$ は可換であることと, 性質 (f-1), (f-2) を用いて, c_f は Δ_R 同変で, $\tau_{f',f} \circ c_f = c_{f'}$ となることが確かめられる. よって c_f より Δ_R 同変 $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 線型同型

$$c: W_{\text{per}}(M) \xrightarrow{\cong} W(M); x \mapsto (c_f(x))_f$$

が得られる. □

この小節の最初に述べた原理に従って, W の逆関手も次のように構成できる.

命題 4.5. 圏同値 $W_{\text{per}} \cong W: \mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Delta_R, \widehat{R})$ の逆関手は,

$$W \mapsto (W \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}, 1 \otimes \theta)^{\Delta_R}$$

で与えられる.

証明. 命題 4.4 (2) の同型において, 左辺の $1 \otimes \theta$ は右辺の $\theta_M \otimes 1 + 1 \otimes \theta$ と対応する. 従って Δ_R 不変部分をとると, $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の性質 (e) より同型 $(W(M) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}, 1 \otimes \theta)^{\Delta_R} \cong (M, \theta)$ が得られる. □

§ 4.6. 周期環の構成

周期環 $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ は, 2009 年 Rennes で行われた Faltings の p 進 Simpson 対応についてのセミナーのための筆者の準備ノート [29] の中で導入された¹¹. その構成は次の通りで

¹¹Faltings の原論文 [13, p. 853] の第 2 パラグラフで考えている環 $S = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}^n(\Omega_{\widehat{R}_1/O_C} \otimes_{\widehat{R}_1} \xi^{-1} \widehat{R}_1)$ は, ある種の周期環を考えようとしていると思われる. しかし $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ と $S \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ の p 進完備化との同型は, 持ち上げ $f: R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$ を選ばないと定まらず ($\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の性質 (f) 参照), また S へのガロア作用をどのように定義するかが書かれていないため, 同じものを考えているかはっきりしない.

ある. $\mathcal{U}_1$ の $\mathrm{Spf}(A_{\mathrm{inf}})$ への smooth な持ち上げ $\mathcal{U}$ を一つとる. 圏 $(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ において, 対象 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1 \hookrightarrow \mathcal{U}, \mathrm{id}_{\mathcal{U}_1})$ と関手 (4.18) の構成で用いた対象 $\mathcal{D}_U$ のファイバー積をとることにより, Δ_R が作用する対象 $\mathcal{E}_U$ が得られる. 周期環 $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ は構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}}}$ の $\mathcal{E}_U$ での切断として定義される. この構成は $\mathcal{U} \bmod \xi^2$ のみで済むことが分かる¹². [29], [1, IV] では上に述べた $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ の性質 (f) は扱われておらず, Faltings の関手 $W(-)$ の $(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ 上の isocrystal を用いた解釈: 命題 4.3 を用いて, 命題 4.4 が証明されている ([1, Proposition IV.5.2.12] 参照).

性質 (f) の写像 h_f は次のように構成できる. $\mathcal{E}_U$ の定義より $(\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ における射影 $p_U: \mathcal{E}_U \rightarrow \mathcal{U}$ および $p_D: \mathcal{E}_U \rightarrow \mathcal{D}_U$ がある. $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs},2} = \Gamma(\mathcal{E}_U, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_U})/\xi^2$ とおくと, これより環準同型

$$p_{U,2}^*: R_2 = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})/\xi^2 \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs},2}, \quad p_{D,2}^*: A_2(\overline{R}) = \Gamma(\mathcal{D}_U, \mathcal{O}_{\mathcal{D}_U})/\xi^2 \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs},2}$$

が誘導される. $\widehat{R}_1 \rightarrow \widehat{R}$ の持ち上げ $f: R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$ をとると, $p_{U,2}^*$ と $p_{D,2}^* \circ f$ は $\bmod \xi$ で一致し, 写像 $(p_{U,2}^* - p_{D,2}^* \circ f): R_2 \rightarrow \xi \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs},2}$ は $\mathcal{O}_C$ 線型な derivation $D_f: \widehat{R}_1 \rightarrow \xi \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs},2}$ を経由する. 対応する $\widehat{R}_1$ 線型写像 $\Omega_{\widehat{R}_1/\mathcal{O}_C} \rightarrow \xi \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs},2} \cong \xi A_2 \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ の $\otimes_{\mathcal{O}_C} (\xi A_2)^{\otimes(-1)}$ をとって, $\widehat{R}_1$ 線型写像 $h_f: \xi^{-1} \Omega_{\widehat{R}_1/\mathcal{O}_C} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ を得る. $\Gamma(\mathcal{E}_U, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_U})$ の ξ 倍写像から誘導される同型 $\xi: \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}} \xrightarrow{\cong} \xi \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs},2}$ の逆写像 ξ^{-1} を用いて,

$$h_f(\xi^{-1} da) = \xi^{-1}(p_{U,2}^*(\tilde{a}) - p_{D,2}^* \circ f(\tilde{a})) \quad (a \in \widehat{R}_1, \tilde{a} \text{ は } a \text{ の } R_2 \text{ への持ち上げ})$$

とかける.

Abbes-Gros は [1, II.10] において, Ogus-Vologodsky による標数 p の非可換 Hodge 理論 [21] との類似の観点から, 周期環 $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ の別の構成法を与え, またこの環を Higgs-Tate 代数と命名した. その構成は次の通りである. $\widehat{R}_1 \rightarrow \widehat{R}$ の持ち上げ $f: R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$ を一つとる. すると $\widehat{R}_1$ 準同型 $h: \xi^{-1} \Omega_{\widehat{R}_1/\mathcal{O}_C} \rightarrow \widehat{R}$ に対し, (4.4) の $h_{f,f'}$ が h となるような f' がただ一つ存在する. そこで $h[+]f = f'$ と定めると, $\widehat{R}_1 \rightarrow \widehat{R}$ の持ち上げ $R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$ の集合は $\mathrm{Hom}_{\widehat{R}_1}(\xi^{-1} \Omega_{\widehat{R}_1/\mathcal{O}_C}, \widehat{R})$ -torsor になる. この議論は射 $v: \overline{\mathcal{D}}_U = \mathrm{Spf}(\widehat{R}) \rightarrow \mathcal{U}_1 = \mathrm{Spf}(\widehat{R}_1)$ の $\overline{\mathcal{D}}_U$ の開部分形式スキームへの制限の持ち上げにも適用でき, $\overline{\mathcal{D}}_U$ 上の $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{D}}_U}}(v^*(\xi^{-1} \Omega_{\mathcal{U}_1/\mathcal{O}_C}), \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{D}}_U})$ -torsor の層が得られ, これは $\overline{\mathcal{D}}_U$ 上の affine 形式スキーム $\mathcal{T}_U$ で表現される. その構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_U}$ の大域切断として $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ が定義される. 持ち上げ $f: R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$ を一つとると, torsor $\mathcal{T}_U$ と $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{D}}_U}}(v^*(\Omega_{\mathcal{U}_1/\mathcal{O}_C}), \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{D}}_U})$ に伴う群形式スキームとの同型が定まる. 構造層の大域切断をとることにより, $\Gamma(\mathcal{T}_U, \mathcal{O}_{\mathcal{T}_U})$ と $\widehat{R} \otimes_{\widehat{R}_1} \mathrm{Sym}_{\widehat{R}_1}(\xi^{-1} \Omega_{\widehat{R}_1/\mathcal{O}_C})$ の p 進完備化との同型が得られる. $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ の性質 (f) の写像 h_f はこの同型の $\xi^{-1} \Omega_{\widehat{R}_1/\mathcal{O}_C}$ への制限として構成される. $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ が性質 (f-4) を満たすことがただちに分かる.

¹² $\mathcal{U}_1$ の A_{inf} への持ち上げの間の同型 $\iota: \mathcal{U}' \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}$ から誘導される同型 $\Gamma(\mathcal{E}_U, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}}}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\mathcal{E}_{\mathcal{U}'}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1/A_{\mathrm{inf}}})$ は, $\iota \bmod \xi^2$ のみで決まることから従う.

§ 5. 大域理論 : Higgs 束から一般化表現の構成

大域的な p 進 Simpson 対応は, §4 で紹介した座標に取り方によらない局所 p 進 Simpson 対応をはり合わせることによって構成される.

§ 5.1. X 上の一般化表現

§2 でふれた, X 上の一般化表現の圏の定義に用いる Faltings の site X_{Falt} は, X の各開部分スキームの幾何的生成ファイバーの有限エタール site をうまくはり合わせたもので, 次のように定義される. 圏 X_{Falt} の対象は, X の開部分スキーム U と, U の幾何的生成ファイバー $U_{\overline{K}} = U \times_{\text{Spec}(K)} \text{Spec}(\overline{K})$ 上の有限エタールスキーム V の組 $\mathfrak{U} = (U, V)$ からなる. 位相は次の 2 種類の族により生成される位相を与える.

(I) U の開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ から定まる族 $((U_i, V \times_{U_{\overline{K}}} U_{i, \overline{K}}} \rightarrow (U, V))_{i \in I}$.

(II) V の有限エタール被覆 $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ から定まる族 $((U, V_i) \rightarrow (U, V))_{i \in I}$.

圏 X_{Falt} は有限積, ファイバー積をもつ. X_{Falt} の前層 $\mathcal{F}$ が層になるためには, $(\mathfrak{U}_i \rightarrow \mathfrak{U})_{i \in I}$ が上にのべた (I), (II) の族のいずれかであるときに,

$$\mathcal{F}(\mathfrak{U}) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(\mathfrak{U}_i) \rightrightarrows \prod_{(i, j) \in I \times I} \mathcal{F}(\mathfrak{U}_i \times_{\mathfrak{U}} \mathfrak{U}_j)$$

が完全になることが必要十分となる. 構造層 $\overline{\mathcal{O}}$ の (U, V) での切断 $\overline{\mathcal{O}}(U, V)$ は, U の V での整閉包 V^{ic} の構造層の大域切断 $\Gamma(V^{\text{ic}}, \mathcal{O}_{V^{\text{ic}}})$ として定義される. 層になるのは自明ではないが証明できる. 環の層の射影系 $(\overline{\mathcal{O}}/p^n)_{n>0}$ を $\overline{\mathcal{O}}_{\bullet}$ で表し, $\overline{\mathcal{O}}_{\bullet}$ 上の加群のなす圏 $\text{Mod}(X_{\text{Falt}}, \overline{\mathcal{O}}_{\bullet})$ を考える.

§2 でふれた $\mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}(\Delta_R, \widehat{R})$ の対象のはり合わせは次のようになされる. まず局所理論で考えていた $(R, \overline{R})$ のなす次の圏 $\mathcal{C}_X$ を考える. 対象は, 可逆元からなる座標をもつ X の affine 開部分スキーム $U = \text{Spec}(R)$ と $R \otimes_{O_K} \overline{K}$ の分数体の代数閉包 $\overline{K}$ の組 $(U, \overline{K})$ とする. $X_{\overline{K}}$ は連結と仮定したので, $U_{\overline{K}}$ も連結で $R \otimes_{O_K} \overline{K}$ は整域となることに注意する. $\overline{R}$, $\Delta_U = \Delta_R$ を $\overline{K}$ を用いて §2 のように定め, $\overline{U} = \text{Spec}(\overline{R})$ とおく. $\mathcal{C}_X$ における射 $(U', \overline{K}') \rightarrow (U, \overline{K})$ は, 包含 $U' \subset U$ とその延長 $u: \overline{U}' \rightarrow \overline{U}$ と定める. u より連続群準同型 $\pi_u: \Delta_{U'} \rightarrow \Delta_U$ が誘導される. $\mathbf{Rep}(\mathcal{C}_X)$ を次のようなデータ (a), (b) のなす圏とする.

(a) $\mathcal{C}_X$ の各対象 $(U = \text{Spec}(R), \overline{K})$ に対し, Δ_R が連続半線型に作用する有限生成 $\widehat{R}$ 加群 $W_{U, \overline{K}}$ で $W_{U, \overline{K}, \mathbb{Q}_p}$ が射影 $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 加群となるものが与えられている.

(b) $\mathcal{C}_X$ の各射 $u: (U', \overline{K}') \rightarrow (U, \overline{K})$ に対し, $\Delta_{R'}$ 同変な $\widehat{R}'$ 同型 $b_u: W_{U, \overline{K}} \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}' \xrightarrow{\cong} W_{U', \overline{K}'}$ が与えられていて, $b_{\text{id}} = \text{id}$, $b_{u' \circ u} = b_u \circ b_{u'}$ をみたす.

次の性質をみたす $\mathbf{Rep}(\mathcal{C}_X)$ の対象のなす充満部分圏を $\mathbf{Rep}^{\text{small}}(\mathcal{C}_X)$ で表す. ある有理数 $\alpha > \frac{2}{p-1}$ があって, すべての $(U, \overline{K}) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_X)$ に対して, $W_{U, \overline{K}}/p^\alpha$ が $(W_{U, \overline{K}}/p^\alpha)^{\Delta_U}$ で生成される.

$(U, \overline{K})$ 上の一般化表現のはり合わせは次のように定式化される.

命題 5.1 ([1, Propositions IV.6.3.9, 6.2.7, Definition IV.6.2.6]). 自然な関手

$$\mathrm{gl}_X: \mathbf{Rep}(\mathcal{C}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}(X_{\mathrm{Falt}}, \overline{\mathcal{O}}_\bullet)$$

が存在し、これから誘導される関手

$$(\mathrm{gl}_X)_{\mathbb{Q}_p}: \mathbf{Rep}(\mathcal{C}_X)_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbf{Mod}(X_{\mathrm{Falt}}, \overline{\mathcal{O}}_\bullet)_{\mathbb{Q}_p}$$

は忠実充満となる．ここで $(-)_\mathbb{Q_p}$ は Hom を $\mathrm{Hom} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ で置き換えて得られる圏を表す．

$(U, \overline{K})$ を $\mathcal{C}_X$ の対象とすると、点 $\mathrm{Spec}(\overline{K}) \rightarrow U_{\overline{K}}$ の茎をとることにより、 $U_{\overline{K}}$ の有限エタール site $U_{\overline{K}, \mathrm{fét}}$ 上の $\overline{\mathcal{O}}|_{U_{\overline{K}, \mathrm{fét}}}/p^n$ 加群の圏から Δ_R が連続半線型に作用する $\overline{R}/p^n$ 加群の圏への圏同値が得られる．これを用いて $(W_{U, \overline{K}}/p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ から $U_{\overline{K}}$ の有限エタール site 上の $\overline{\mathcal{O}}_\bullet$ 加群の層 $\mathcal{W}_{U, \overline{K}}$ が構成できる．これらが X_{Falt} 上でうまくはり合わさって関手 gl_X が得られる．このはり合わせで、 $\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ をとらずに与えられたデータ (b) の同型 b_u が必要となる． b_u を用いて、 $\mathcal{W}_{U, \overline{K}}$ から X_{Falt} 上の前層 $\mathcal{W}^p$ が得られ、 $\mathcal{W}^p$ はタイプ (II) の被覆に関して層の条件をみたす．almost purity 定理を用いることにより、タイプ (I) の被覆についても層の条件を「ほとんど」みたすことが分かり、 $\mathcal{W}^p$ の層化により忠実充満関手が得られることが分かる．

$\mathbf{Rep}(\mathcal{C}_X)_{\mathbb{Q}_p}$, $\mathbf{Rep}^{\mathrm{small}}(\mathcal{C}_X)_{\mathbb{Q}_p}$ の関手 $(\mathrm{gl}_X)_{\mathbb{Q}_p}$ による essential image を $\mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}(X_{\mathrm{Falt}})$, $\mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(X_{\mathrm{Falt}})$ で表し、 $\mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}(X_{\mathrm{Falt}})$ の対象を X 上の一般化表現と呼ぶ．

§ 5.2. Faltings の構成

Faltings の原論文では §4.2 で構成した $W(M)$ をはり合わせるにより大域理論を構成している． $W(M)$ は $\widehat{R}_1$ の A_2 への持ち上げによっているため、大域理論でも $\mathcal{X}$ の A_2 上の固有 smooth な形式スキームへの持ち上げ $\mathcal{X}_2$ を一つとる¹³．

$(U, \overline{K})$ を §5.1 で導入した圏 $\mathcal{C}_X$ の対象とする． $\widehat{R}_1$ を §3 の初めのようにとると、§4.2 の最初にとった $\mathrm{Spf}(R_2)$ として、底集合が $\mathcal{U} := \mathrm{Spf}(\widehat{R}_1) \hookrightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}_2$ の像と一致する $\mathcal{X}_2$ の開形式部分スキームがとれる．この R_2 を使って §4.2 のように定義される関手 $W_f(-)$, $W(-)$ を $W_{U, \overline{K}, f}(-)$, $W_{U, \overline{K}}(-)$ で表すことにする．§4.2 で考えた $\widehat{R}_1 \rightarrow \widehat{R}$ の A_2 上への持ち上げ $f: R_2 \rightarrow A_2(\overline{R})$ は、 $\mathrm{Spf}(\widehat{R}) \rightarrow \mathcal{X}$ の $\mathrm{Spf}(A_2)$ 上への持ち上げ $\mathrm{Spf}(A_2(\overline{R})) \rightarrow \mathcal{X}_2$ と一対一に対応する．以後 f は、後者の持ち上げとみなすことにする．

$\mathcal{M}$ を $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1))$ の対象とする． $\mathcal{C}_X$ の各対象 $(U, \overline{K})$ に対し、 $\mathcal{M}$ の $\mathcal{U}_1 = \mathrm{Spf}(\widehat{R}_1)$ 上の切断は $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/\mathcal{O}_C}(-1))$ の対象となり、 $\mathbf{Rep}_{\mathrm{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\Delta_R, \widehat{R})$ の対象 $W_{U, \overline{K}}(\mathcal{M}(\mathcal{U}_1))$ が定まる．命題 5.1 を用いてこれらをはり合わせるためには、 $W_{U, \overline{K}}(\mathcal{M}(\mathcal{U}_1))$ に整構造を入れる必要がある． $\mathcal{M}$ は small であることから、有理数 $\alpha > \frac{1}{p-1}$ と局所有限生成

¹³ K が絶対不岐、すなわち p が $\mathcal{O}_K$ の素元であるとき、 $\mathcal{O}_K$ はその剰余体 k の Witt 環 $W(k)$ と同型になる．従って、準同型 $k \rightarrow \mathcal{O}_K^b; a \mapsto (a^{p^{-n}})_{n \geq 0}$ より、 $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_C$ の持ち上げ $\mathcal{O}_K = W(k) \rightarrow A_{\mathrm{inf}} = W(\mathcal{O}_K^b)$ が誘導され、 $\mathcal{X}_2$ として X の $\mathcal{O}_K \rightarrow A_{\mathrm{inf}} \rightarrow A_2$ による底変換がとれる． K が絶対不岐でない場合、このような構成法はない．一般には A_2 への持ち上げが存在するとは限らないと思われる．

$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 部分加群 $\mathcal{M}^\circ$ で $\theta(\mathcal{M}^\circ) \subset p^{\alpha+\frac{1}{p-1}}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1))$ となるものがとれる. §4.2 の最後の注意より, $\mathcal{C}_X$ の各対象 $(U, \bar{\mathcal{K}})$ に対して, Δ_R が連続半線型に作用する有限生成 $\widehat{R}$ 加群 $W_{U, \bar{\mathcal{K}}}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1))$ で, $W_{U, \bar{\mathcal{K}}}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1))_{\mathbb{Q}_p} \cong W_{U, \bar{\mathcal{K}}}(\mathcal{M}(\mathcal{U}_1))$ かつ $\bmod p^{\alpha+\frac{1}{p-1}}$ が Δ_R 不変部分で生成されるものが得られる. $\mathcal{C}_X$ における射 $u: (U' = \mathrm{Spec}(R'), \bar{\mathcal{K}}') \rightarrow (U = \mathrm{Spec}(R), \bar{\mathcal{K}})$ と u から誘導される連続群準同型 $\pi_u: \Delta_{R'} \rightarrow \Delta_R$ を考える. $\mathrm{Spf}(\widehat{R}) \rightarrow \mathcal{X}$ の二つの持ち上げ $f, f': \mathrm{Spf}(A_2(\bar{R})) \rightarrow \mathcal{X}_2$ に対し, u から誘導される射 $\mathrm{Spf}(A_2(\bar{R}')) \rightarrow \mathrm{Spf}(A_2(\bar{R}))$ と f, f' の合成 $\tilde{f}, \tilde{f}'$ は $\mathrm{Spf}(\widehat{R}') \rightarrow \mathcal{X}$ の持ち上げとなり, 次の図式が可換となる. 縦向きの写像は u と $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1')$ から自然に誘導される写像であり, 横向きの射は同型 (4.13) である.

$$\begin{array}{ccc} W_{U, \bar{\mathcal{K}}, f}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1)) & \xrightarrow[\tau_{f', f}^\circ]{\cong} & W_{U, \bar{\mathcal{K}}, f'}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1)) \\ \downarrow r_{u, f}^\circ & & \downarrow r_{u, f'}^\circ \\ W_{U', \bar{\mathcal{K}}', \tilde{f}}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1')) & \xrightarrow[\tau_{\tilde{f}', \tilde{f}}^\circ]{\cong} & W_{U', \bar{\mathcal{K}}', \tilde{f}'}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1')) \end{array}$$

これから $r_{u, f}^\circ$ は π_u に関して同変で, $\Delta_{R'}$ 同変な canonical な $\widehat{R}'$ 同型

$$r_u^\circ: W_{U, \bar{\mathcal{K}}}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1)) \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}' \xrightarrow{\cong} W_{U', \bar{\mathcal{K}}'}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1'))$$

を誘導することが分かる. $(W_{U, \bar{\mathcal{K}}}(\mathcal{M}^\circ(\mathcal{U}_1)), r_u^\circ)$ は §5.1 で導入した圏 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{small}}(\mathcal{C}_X)$ の対象となり, 命題 5.1 を適用して $\mathcal{M}$ に伴う X 上の一般化表現が得られる. この構成は canonical な同型を除き $\mathcal{M}^\circ$ のとりかたによらず, また $\mathcal{M}$ について関手的となる. こうして忠実充満関手

$$(5.1) \quad W_X: \mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1)) \longrightarrow \mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(X_{\mathrm{Falt}})$$

を得る.

§ 5.3. Crystalline site の類似を用いた構成

Higgs 束のかわりに isocrystal を用いることにより $\mathcal{X}$ の $\mathrm{Spf}(A_2)$ 上への持ち上げをとらない定式化ができる点, 持ち上げ $f: \mathrm{Spf}(A_2(\bar{R})) \rightarrow \mathrm{Spf}(R_2)$ をとる煩わしい議論を Higgs 束の圏と isocrystal の圏の圏同値に閉じ込めることにより議論がすっきりする点を除けば, 関手の構成は基本的には Faltings の構成 §5.2 と同じである. 各 $(U, \bar{\mathcal{K}}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_X)$ に対して定まる Δ_R の一般化表現に整構造をいれるため, isocrystal に整構造を入れる必要がある.

形式スキーム $\mathcal{X}$ に対して, §4.4 と全く同様にして, site $(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ やその上の isocrystal を定義できる. また isocrystal の定義において, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}}, \mathbb{Q}_p}$, $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{T}}, \mathbb{Q}_p}$ を $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}}}$, $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{T}}}$ に置き換えて得られる $\mathcal{O}_{\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}}}$ 加群を $(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ 上の crystal と呼ぶことにする. crystal $\mathcal{F}$ に対し, $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ は isocrystal となる. $(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ 上の crystal $\mathcal{F}$ で次の性質をみたすもののなす圏を考え $\mathrm{HC}(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})$ で表す.

$\mathcal{X}$ の任意の affine 開部分形式スキーム $\mathcal{V} = \mathrm{Spf}(S)$ とその A_{inf} への smooth な持ち上げ $\tilde{\mathcal{V}} = \mathrm{Spf}(\tilde{S})$ (non-canonical な同型を除いてただ一つ存在) に対して, $\mathcal{V}$ 上の Zariski 層 $\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ は p -torsion free な連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ 加群で, $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{V}}})_{\mathbb{Q}_p}$ は射影 $S_{\mathbb{Q}_p}$ 加群である.

$(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ 上の isocrystal $\mathcal{F}$ で, 上のような任意の $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}$ に対して, $\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ が連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{V}, \mathbb{Q}_p}$ 加群で $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{V}}})$ が射影 $S_{\mathbb{Q}_p}$ 加群であるもののなす圏を $\mathrm{HC}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})$ で表す. テンソル積 $\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ をとることにより, 忠実充満な関手

$$\mathrm{HC}(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{HC}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})$$

が得られる. 左辺は $\mathrm{HC}(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})$ において Hom を $\mathrm{Hom} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ に置き換えて得られる圏である.

定理 5.2. $\mathcal{X}$ の A_{inf} への smooth な持ち上げ $\tilde{\mathcal{X}}$ を一つとると, 次の圏同値が誘導される.

$$\mathrm{HC}(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} \mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{conv}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1))$$

定理 4.2 と同様, $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{conv}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1))$ は smallness より少し弱いある条件をみたす対象のなす $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1))$ の充満部分圏であり, 圏同値は $(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ の対象 $(\mathcal{X} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \mathrm{id}_{\mathcal{X}})$ の Zariski site への制限により得られる.

圏 $\mathcal{C}_X$ の各対象 $(U, \bar{\mathcal{K}})$ に対し, Δ_U が右から作用する $(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ の対象 $\mathcal{D}_{U, \bar{\mathcal{K}}} = (\mathrm{Spf}(\bar{R}), \mathrm{Spf}(A_{\mathrm{inf}}(\bar{R})))$ が定まる. また圏 $\mathcal{C}_X$ における射 $u: (U', \bar{\mathcal{K}}') \rightarrow (U, \bar{\mathcal{K}})$ から圏 $(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathrm{HIGGS}}$ における射 $\mathcal{D}_{U', \bar{\mathcal{K}}'} \rightarrow \mathcal{D}_{U, \bar{\mathcal{K}}}$ が定まり, この射は u から誘導される群準同型 $\pi_u: \Delta_{U'} \rightarrow \Delta_U$ について同変である. 以上のことから, 各 $\mathcal{D}_{U, \bar{\mathcal{K}}}$ での切断をとることにより忠実充満関手

$$\mathrm{HC}(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbf{Rep}(\mathcal{C}_X)_{\mathbb{Q}_p}$$

が構成でき, 命題 5.1 より忠実充満関手

$$W_{X, \mathrm{crys}}: \mathrm{HC}(\mathcal{X}/A_{\mathrm{inf}})_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}(X_{\mathrm{Falt}})$$

が得られる [1, IV.6.4]. 命題 4.3 より, $W_{X, \mathrm{crys}}$ と定理 5.2 の圏同値の逆関手の合成の $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{small}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1))$ への制限は, §5.2 の W_X (5.1) と一致する.

§ 5.4. 周期環を用いた構成

$\mathcal{X}$ の A_2 への smooth な持ち上げ $\mathcal{X}_2$ が一つ与えられているとする. すると §4.5 で述べたように, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_X)$ の各対象 $(U = \mathrm{Spec}(R), \bar{\mathcal{K}})$ に対して, 周期環 $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}$ が構成される. これを $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}(U, \bar{\mathcal{K}})$ で表すことにすると, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_X)$ における射 $u: (U', \bar{\mathcal{K}}') \rightarrow (U, \bar{\mathcal{K}})$ に伴って, $\pi_u: \Delta_{R'} \rightarrow \Delta_R$ に関して同変な自然な同型 $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}(U, \bar{\mathcal{K}})/p^n \otimes_{\bar{R}/p^n} \bar{R}'/p^n \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}(U', \bar{\mathcal{K}}')/p^n$ がある. 従って命題 5.1 と同様の構成をこれらのデータに適用して, Faltings site 上の $\bar{\mathcal{O}}_{\bullet}$ 代数 $\mathcal{C}_{\bullet}$ が得られる. 実は周期環 $\mathcal{A}_{\mathrm{Higgs}}(U, \bar{\mathcal{K}})$ はコホモロジーについてのふるまいが悪く, 次節で述べるように Higgs 束と一般化表現のコホモロジーの比較

においては, ある種の過収束性をみたす元からなる部分環の系 $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)}(U, \bar{K})$ ($r \in \mathbb{Q}_{>0}$) を考えると都合がよいことが分かっている. これらの部分環からも $\bar{\mathcal{O}}_\bullet$ 代数 $\mathcal{C}_\bullet^{(r)}$ を作ることができる [1, III.10.1]. Abbes-Gros は, 命題 4.4, 命題 4.5 で述べた周期環 $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ を用いた $(U, \bar{K})$ 上での p 進 Simpson 対応の構成法を, X_{Falt} 上の $\mathcal{C}_\bullet^{(r)}$ ($r > 0$) を用いて「層化」することにより, 大域的な p 進 Simpson 対応を構成している [1, III.12] (命題 6.3 参照.)

注意. Abbes-Gros の構成では命題 5.1 は用いない. 忠実充満性の問題は $\mathcal{C}_\bullet^{(r)}$ の X_{Zar} への順像の計算 ($\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の性質 (e) の層での類似) に帰着されている.

§ 6. コホモロジーの比較

Simpson の理論では Higgs 束のコホモロジーと基本群の表現に対応する局所系のコホモロジーの間の自然な同型があることが知られている. その p 進 Simpson 対応における類似を期待するのは自然であり, 実際に局所理論, 大域理論それぞれについて, 以下に述べるようなコホモロジーの比較が成り立つ.

§ 6.1. 局所理論

$U = \text{Spec}(R) \subset X$, $\bar{R}$, $\hat{R}_1$, Δ_R を §2, §3 と同じとする. また §4.2 のように $\hat{R}_1$ の持ち上げ R_2 を一つとる. (M, θ) を $\mathbf{HB}^{\text{small}}(\hat{R}_1, \Omega_{\hat{R}_1/O_C}^1(-1))$ の対象とする. §4.2 の対応により, (M, θ) に対応する $\mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\Delta_R, \hat{R})$ の対象 $W(M)$ が定まる. 各整数 $q \geq 1$ に対し, 線型写像 $\theta^q: M \otimes_{\hat{R}_1} \Omega_{\hat{R}_1/O_C}^q(-q) \rightarrow M \otimes_{\hat{R}_1} \Omega_{\hat{R}_1/O_C}^{q+1}(-q-1)$ を $\theta^q(x \otimes \omega) = \theta(x) \wedge \omega$ で定めると, 条件 $\theta \wedge \theta = 0$ より $(M \otimes_{\hat{R}_1} \Omega_{\hat{R}_1/O_C}^\bullet(-\bullet), \theta^\bullet)$ は複体となる. このとき, 次が成り立つ.

定理 6.1 ([13, §3], [29, Theorem 6.1], [1, Proposition II.12.26, Theorem IV.5.3.2]).
 M について関手的な次の canonical な同型が存在する.

$$R\Gamma_{\text{cont}}(\Delta_R, W(M)) \cong (M \otimes_{\hat{R}_1} \Omega_{\hat{R}_1/O_C}^\bullet(-\bullet), \theta^\bullet).$$

以下, 定理 6.1 の証明の概略を紹介する. 命題 4.4 より, Δ_R 同変な複体の射

$$(6.1) \quad W(M) \rightarrow W(M) \otimes_{\hat{R}} \mathcal{A}_{\text{Higgs}} \otimes_{\hat{R}_1} \Omega_{\hat{R}_1/O_C}^\bullet(-\bullet) \cong M \otimes_{\hat{R}_1} \mathcal{A}_{\text{Higgs}} \otimes_{\hat{R}_1} \Omega_{\hat{R}_1/O_C}^\bullet(-\bullet)$$

が得られる. ここで Δ_R の作用は $W(M)$, $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ への作用で定め, 複体は M と $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の Higgs 場を用いて定める. もし $\hat{R}_{1, \mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{Higgs}} \otimes_{\hat{R}_1} \Omega_{\hat{R}_1/O_C}^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が resolution になっていて, かつ $R\Gamma_{\text{cont}}(\Delta_R, \mathcal{A}_{\text{Higgs}, \mathbb{Q}_p}) = \hat{R}_{1, \mathbb{Q}_p}$ ならば, (6.1) の $R\Gamma_{\text{cont}}(\Delta_R, -)$ をとることにより, ただちに定理 6.1 が導かれるが, 残念ながらこれらの主張は成り立たない. 周期環 $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の性質 (f-4) のように ω_i , U_i をとると, 性質 (f-3) より $\theta(U_i^n) = nU_i^{n-1} \otimes \omega_i$ となる. 例えば $d = 1$ のとき, $a = \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_1^{p^{2n}-1} \otimes \omega_1$ は $\theta^1(a) = 0$ をみたすが, $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n} U_1^{p^{2n}}$ は $\mathcal{A}_{\text{Higgs}, \mathbb{Q}_p}$ で収束しないため, a は $\theta_{\mathbb{Q}_p}$ の像には入らない.

ノート [29] では, $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ を次のようにとれば上の議論がうまく機能することが示された. U_i は上と同じとする. 正の有理数 r に対し, $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の $p^r U_i$ ($1 \leq i \leq d$) で生成される $\widehat{R}$ 部分代数の p 進完備化を $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)}$ とする. これは f, ω_i の取り方によらない $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の Δ_R 安定な部分環となり, また $p^r \theta$ で安定となることが, $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の性質 (f) を用いて分かる. $0 < r' < r$ のとき, $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)} \subset \mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r')}$ である.

定理 6.2. (1) 複体 $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)} \otimes_{\widehat{R}_1} \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}^\bullet(-\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ ($r > 0$) を $K_{(r)}^\bullet$ で表すことにする. このとき $0 < r' < r$ を満たす有理数 r, r' に対し, 埋め込み $K_{(r)} \hookrightarrow K_{(r')}$ は $\widehat{R}_{\mathbb{Q}_p}$ 加群の複体として, 0 射とホモトピー同値である¹⁴.

(2) ([29, Theorem 6.2], [1, Corollary II.11.16, Theorem IV.5.3.4]) $(\mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)})^{\Delta_R} = \widehat{R}_1$ ($r > 0$) であり, $0 < r' < r$ を満たす有理数 r, r' に対し, 埋め込み $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)} \subset \mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r')}$ から誘導される写像 $H_{\text{cont}}^q(\Delta_R, \mathcal{A}_{\text{Higgs}, \mathbb{Q}_p}^{(r)}) \rightarrow H_{\text{cont}}^q(\Delta_R, \mathcal{A}_{\text{Higgs}, \mathbb{Q}_p}^{(r')})$ ($q > 0$) は 0 である.

(1) は具体的な計算で示される, (2) は almost purity 定理を用いて $\widehat{R}$ を R_∞ にとりかえた後, 具体的な計算で証明される.

命題 6.3. 任意の $\mathbf{HB}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\widehat{R}_1, \Omega_{\widehat{R}_1/O_C}(-1))$ の対象 M に対し, 有理数 $r > 0$ を十分小さく取れば, 命題 4.4 の同型より, 次の同型が誘導される.

$$W(M) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)} \xrightarrow{\cong} M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)}$$

これは命題 4.4 の証明の $\exp(\theta_f)$ の収束をより精密に評価することによって証明される. 定理 6.2 と命題 6.3 よりただちに定理 6.1 が得られる.

§ 6.2. 大域理論

$\mathcal{X}$ の A_2 への smooth な持ち上げ $\mathcal{X}_2$ が一つ与えられているとする. このとき, Abbes-Gros は §6.1 で紹介した周期環 $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(r)}$ の層版 $\mathcal{C}_\bullet^{(r)}$ に対して定理 6.2 の類似が成り立つことを示すことにより, 定理 6.1 の次の大域版を証明した.

定理 6.4 ([13, Theorem 5], [1, Theorem III.12.34]). $\mathcal{X}$ の A_2 への持ち上げ $\mathcal{X}_2$ を通して, $\mathbf{Rep}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{small}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/O_C}(-1))$ の対象 $(\mathcal{M}, \theta)$ と $\mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}(X_{\text{Falt}}, \overline{\mathcal{O}}_\bullet)_{\mathbb{Q}_p}$ の対象 $\mathcal{W}$ が対応しているとする. このとき, $\mathcal{M}, \mathcal{W}$ について関手的な次の canonical な同型が存在する.

$$R\Gamma(X_{\text{Falt}}, \mathcal{W}) \cong R\Gamma(\mathcal{X}_{\text{Zar}}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \Omega_{\mathcal{X}/O_C}^\bullet(-\bullet))$$

§5.3 で述べたように site $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ 上の crystal を用いれば, $\mathcal{X}$ の A_2 上への smooth な持ち上げをとらずに大域的な p 進 Simpson 対応を定式化できる. 従って, $\mathcal{X}$ の A_{inf} 上への smooth な持ち上げがあるときには定理 5.2 を通して Higgs 束のコホモロジーと一致する

¹⁴これは Monsky-Washnitzer の p 進コホモロジーで用いられる過収束 (overconvergent) ペギ級数に着想を得ている.

ようなコホモロジーが $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ を用いて得られないか, という問いが自然に出てくる. 定理 6.1 の証明と類似して, 素朴に $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ を用いたのでは残念ながらうまくいかない. [1, IV] では, $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ の定義を少し変えたレベル付きの site $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^r$ ($r \in \mathbb{Z}, r > 0$)¹⁵ を導入し, これらの逆極限として定義される site $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^\dagger$ を用いれば, 次のように欲しいコホモロジーが得られることを示した. $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^r$ 上の isocrystal の圏 $\text{HC}_{\mathbb{Q}_p}^r(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})$ は自然に $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ 上の isocrystal の圏 $\text{HC}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})$ の充満部分圏とみなせる.

定理 6.5. $\mathcal{X}$ の A_{inf} 上への smooth な持ち上げ $\tilde{\mathcal{X}}$ が与えられているとする. 圏 $\text{HC}(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\mathbb{Q}_p}$ の対象 $\mathcal{F}$ と $\mathbf{HB}_{\text{proj}, \mathbb{Q}_p}^{\text{conv}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}(-1))$ の対象 $\mathcal{M}$ が定理 5.2 の圏同値で対応しているとする.

(1) ([1, Proposition IV.3.6.6]). $\mathcal{M}$ が small であることと, 十分大きな正整数 r に対し $\mathcal{F} \in \text{HC}_{\mathbb{Q}_p}^r(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})$ となることは同値である.

(2) ([1, Corollary IV.4.5.8]). $\mathcal{M}$ が small であるとし, $\mathcal{F} \in \text{HC}_{\mathbb{Q}_p}^r(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})$ ($r \gg 0$) の $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^\dagger$ での逆像を $\mathcal{F}^\dagger$ とする. このとき次の canonical な同型がある.

$$R\Gamma((\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^\dagger, \mathcal{F}^\dagger) \cong R\Gamma(\mathcal{X}_{\text{Zar}}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_C}^\bullet(-\bullet))$$

証明は crystalline コホモロジーと de Rham コホモロジーの比較の証明の手法を用いる. Poincaré の補題の類似が $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ では成り立たないが, $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^\dagger$ では成り立つことが鍵となる. $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^\dagger$ を用いたコホモロジーの比較は次のようになる.

定理 6.6 ([1, Theorem IV.6.8.1]). $\mathcal{F}$ を $\text{HC}(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\mathbb{Q}_p}$ の対象とし, 対応する一般化表現を $\mathcal{W}$ とする (§5.3 参照). また $\mathcal{F}$ の $\text{HC}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})$ での像は, $\text{HC}_{\mathbb{Q}_p}^r(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})$ ($r \gg 0$) に入るとし, その $(\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^\dagger$ での逆像を $\mathcal{F}^\dagger$ で表す. このとき次の canonical な同型がある.

$$R\Gamma(X_{\text{Falt}}, \mathcal{W}) \cong R\Gamma((\mathcal{X}/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^\dagger, \mathcal{F}^\dagger).$$

注意. §4.6 で述べた $(\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}$ を用いた周期環 $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}$ の構成を $(\mathcal{U}_1/A_{\text{inf}})_{\text{HIGGS}}^r$ ($r \in \mathbb{Z}, r > 0$) に適用して得られる環の $\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ をとると, 定理 6.1 の証明で用いた $\mathcal{A}_{\text{Higgs}}^{(1/r)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が得られる [1, (IV.5.2.5)].

§ 7. 関連結果

最後にいくつかの関連結果について簡単に述べる.

(1) [18] において, O. Hyodo は Hodge-Tate 表現の X_K 上の variation の理論について研究した. 数論的基本群 $\pi_1(X_K, \bar{x})$ の表現に対し Hodge-Tate 表現の概念を定義し, それ

¹⁵ 対象は $A_N = A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})/\xi^N$ 上の p 進形式スキームの nilpotent closed immersion の列 $\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_3 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{T}_N \rightarrow \cdots$ と A_1 上の射 $\bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{X}$ の組で次の 3 条件を満たすものである. $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{T}_n}$ ($0 \leq n \leq N$) の核を $F^n \mathcal{O}_{\mathcal{T}_N}$ とする. (a) $p: \mathcal{O}_{\mathcal{T}_N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{T}_N}$ は単射. (b) $pF^s \mathcal{O}_{\mathcal{T}_N} \subset \xi^s \mathcal{O}_{\mathcal{T}_N}$ ($1 \leq s \leq \min(r, N)$). (c) $\text{Ker}(\xi: \mathcal{O}_{\mathcal{T}_N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{T}_N}) = F^{N-1} \mathcal{O}_{\mathcal{T}_N}$.

に伴う grade 付き Higgs 束を構成している. これは small な一般化表現についての p 進 Simpson 対応の特別な場合になっている. 複素数体上の場合に Hodge 構造の variation の $\mathrm{gr}^\bullet$ をとると grade 付き Higgs 束が得られることの類似になっている. 下の (3) で最後にふれている数論的な Sen の作用素のことばで述べると, Hodge-Tate 表現になることは, 数論的な Sen の作用素が半単純で固有値がすべて整数となること同値になり [30, Theorem 9.1], Higgs 束の grade はその固有空間分解で与えられる.

(2) Faltings は, X が曲線の場合に, Higgs 束の圏と一般化表現の圏の間の圏同値を対象の smallness を仮定せずに示している [13, Theorem 6]. 前者から後者への関手は次のように構成している [13, §4]. まず small な対象の対応 (5.1) は O_K 上 log smooth な log スキームでも構成できる. $\mathcal{M}$ を $\mathbf{HB}(\mathcal{O}_{X/\mathbb{Q}_p}, \Omega_{X/\mathcal{O}_C}(-1)_{\mathbb{Q}_p})$ の対象とする. すると, 必要なら K をその有限次拡大で置き換えて, $X_K = X \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{Spec}(K)$ の不分岐ガロア被覆 $f_K: X'_K \rightarrow X_K$, X'_K の log スムースモデル X' と f_K の $\mathrm{Gal}(X'_K/X_K)$ 作用込みの延長 $f: X' \rightarrow X$ で, $\mathcal{M}$ の $\mathcal{X}'$ への引き戻し $\mathcal{M}'$ が small となるものが存在する. $\mathcal{X}'$ の A_2 への log smooth な持ち上げを一つ取ると (曲線なので存在する), §5.1 を $\mathcal{X}'$ と $\mathcal{M}'$ に適用して $\mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}(X'_{\mathrm{Falt}}, \overline{\mathcal{O}}_\bullet)$ の対象 $\mathcal{W}'$ が得られる. あとはガロア降下により $\mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}(X_{\mathrm{Falt}}, \overline{\mathcal{O}}_\bullet)$ の対象が得られそうだが, (5.1) は A_2 への持ち上げに依存し, 一般に射 f から誘導される射 $f_1: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ を A_2 上へ持ち上げることは (仮に $\mathrm{Gal}(X'_K/X_K)$ の作用を忘れたとしても) できないため, 素朴にはうまくいかない. Faltings は, log 写像 $O_C^\times \rightarrow C$ の連続右逆写像を一つ選ぶと, f_1 の A_2 への持ち上げの障害の影響をコントロールしつつ $\mathcal{W}'$ のガロア降下データを構成できることを示し, $\mathbf{VB}_{\mathbb{Q}_p}(X_{\mathrm{Falt}}, \overline{\mathcal{O}}_\bullet)$ の対象を構成した (もちろんこの構成は $\mathcal{X}$ の A_2 への持ち上げに依存する). これらの議論は small な場合に比べ難しく [1] では扱われていない.

(3) 一般化表現と Higgs 束の対応において, $X_{\overline{K}}$ の基本群 Δ_X の有限次元連続 C 線型表現からくる一般化表現を, 対応する Higgs 束の言葉で特徴づけることは基本的な問題である. Faltings は [13, §5] で, (2) でのべた曲線の場合の対応について次の主張とその証明の非常に簡単な概略を述べている.

- (a) Δ_X の C 表現に対応する Higgs 束は slope 0 半安定である.
- (b) Higgs 束が, ある p^α ($\alpha > 0$) を法として自明となる整モデルを持つならば, Δ_X の C 表現と対応する.
- (c) X 上の一般化表現に対し, ある射 $X' \rightarrow X$ による引き戻しが $\Delta_{X'}$ の C 表現からくるならば, 元の一般化表現も Δ_X の C 表現からくる.

Higgs 場が自明な場合については, Faltings とほぼ同時期に, Deninger と Werner が $[K: \mathbb{Q}_p] < \infty$ で X が曲線の場合に潜在的強半安定 slope 0 のベクトル束に伴う Δ_X の C 表現を構成する別の方法を与えた [7]. 彼らの構成が Faltings の構成と一致することの証明が, D. Xu により与えられている [32]. また最近 Deninger と Werner は, 高次元の X の場合も同様の構成が可能であることを示した [8].

- (4) 幾何的基本群 Δ_X ではなく, 数論的基本群 $\Pi_X = \pi_1(X_K, \bar{x})$ の表現で類似の理論

がないかを考えるのは自然である. R. Liu と X. Zhu は, Faltings の site の代わりに, Scholze の proétale site を用いた p 進 Hodge 理論 (de Rham 表現の variation) の定式化の枠組み ([23], [24]) で, $X_{K,\text{ét}}$ 上の任意の $\mathbb{Q}_p$ 局所系 $\mathbb{L}$ に対し, $\text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$ が作用する「 $B_{\text{dR}}(O_{K(\mu_{p^\infty})}) \hat{\otimes}_K \mathcal{O}_{X_K}$ 」係数の filtration 付き接続付き加群 $\mathcal{RH}(\mathbb{L})$ を構成している [20]¹⁶ ([9] ではさらに正規交叉因子を抜いた開多様体への一般化が扱われている.) de Rham 表現の variation の周期環で対応が構成され, $\mathcal{X}$ の A_2 , A_{inf} 上への持ち上げをとる必要はない¹⁷. $\mathcal{RH}(\mathbb{L})$ の gr^0 をとると p 進 Simpson 対応が復元される. 幾何的基本群の場合と異なり, すべての表現を扱うことが可能で, さらに現れる Higgs 束は常に nilpotent となる. 証明は $\mathbb{Q}_p$ 局所系に関する Kedlaya-Liu の (φ, Γ) 理論 [19] を用いている. 応用として de Rham 表現の剛性「 $\mathbb{Q}_p$ 局所系がある閉点で de Rham ならば局所系として de Rham である」を示している.

§3, §4 でのべた局所理論を $\Pi_R = \text{Gal}(K^{\text{ur}}/K)$ の一般化表現の圏 $\mathbf{Rep}_{\text{proj}}(\Pi_R, \hat{R}_{\mathbb{Q}_p})$ で考えることもできる [31, §15]. $R_{\infty}^{\text{arith}}$ を $R[\mu_{p^n}]$ ($n > 0$) の p 進完備化の合併とすると, $\text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$ が連続に作用する $R_{\infty, \mathbb{Q}_p}^{\text{arith}}$ 係数の nilpotent な Higgs 束の圏と圏同値になる. 底加群には p 進位相を入れる. (1) でのべた O. Hyodo の Hodge-Tate 表現の variation の周期環を用いて, 対応を構成することができ, $\hat{R}_1$ の A_2 上への持ち上げをとる必要はない. 数論的な表現を考えると幾何的な Sen の作用素 (定理 3.4 の証明のあとで導入した ϕ_i) が nilpotent になるという観察は, O. Brinon による剰余体が完全でない混標数完備離散値体への Sen の理論の一般化に遡る [6].

$\text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$ の作用から定まる数論的な Sen の作用素の振る舞いも興味深い. Liu-Zhu の枠組みで, K. Shimizu は, $\mathbb{Q}_p$ 局所系に伴う数論的な Sen の作用素の固有値が定数になることを示している [26]. C 表現に関する Sen の理論 (§3.4(1)) の B_{dR} 表現における類似である Fontaine の理論の拡張を Liu-Zhu の $\mathcal{RH}(\mathbb{L})$ で考え, Sen の作用素をある log 可積分接続の residue として捉えることが証明の鍵となる.

(5) §4.6 で少しふれたが, Ogus と Vologodsky は標数 p で非可換 Hodge 理論 (Simpson 対応の類似) を構築しており [21], 今ではその幾つかの variants も知られている. 標数 p では基本群の表現ではなく可積分接続付き加群を考える. Abbes と Gros は彼らの方法の p 進での類似を考えたが, 逆に §4.4, §5.3 の Higgs 束を site の言葉で捉える手法を用いた Ogus と Vologodsky の理論の再定式化が H. Oyama によって与えられている [22]. p 進の場合と同様, Ogus と Vologodsky の理論では考えている代数多様体の $W_2 = W_2(k)$ 上への smooth な持ち上げを一つ取る必要があったが, [22] では不要となっている. D. Xu は [22] の site を用いて mod p^n 係数の理論を構築している.

(6) Δ_X の $\mathbb{Q}_p$ 表現を詳しく調べる方法も Faltings により研究されている [14]. Berger-Kedlaya の p 進周期環と Frobenius を用いた Higgs 束よりもかなり複雑な対象が使われている.

¹⁶ 正確には [24], [20] では, K 上の smooth rigid analytic variety で理論を構築している.

¹⁷ X_K の B_{dR} への持ち上げを $K \rightarrow B_{\text{dR}}$ についての底変換でとっていると捉えることもできる.

参考文献

- [1] A. Abbes, M. Gros, and T. Tsuji, *The p -adic Simpson correspondence*, Annals of Math. Studies, vol. 193, Princeton Univ. Press, 2016.
- [2] A. Abbes and M. Gros, *La suite spectrale de Hodge-Tate*, arXiv:1509.03617 [math.AG]
- [3] F. Andreatta and O. Brinon, *Surconvergence des représentations p -adiques: le cas relatif*, Représentations p -adiques de groupes p -adiques I: Représentations Galoisienne et (φ, Γ) -modules, Astérisque 319, 2008, pp. 39–116.
- [4] F. Andreatta and O. Brinon, *B_{dR} -représentations dans le cas relatif*, Ann. Sci. ENS. (4) **43** (2010), 279–339.
- [5] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* . LNM **407**, Springer, 1974.
- [6] O. Brinon, *Une généralisation de la théorie de Sen*, Math. Ann. **327** (2003), 793–813.
- [7] C. Deninger and A. Werner, *Vector bundles on p -adic curves and parallel transport*, Ann. Sci. ENS. (4) **38** (2005), 553–597.
- [8] C. Deninger and A. Werner, *Parallel transport for vector bundles on p -adic varieties*, J. Algebraic Geom. **29** (2020), 1–52.
- [9] H. Diao, K. Lan, R. Liu, and X. Zhu, *Logarithmic Riemann–Hilbert correspondences for rigid varieties*, arXiv:1803.05786 [math.AG]
- [10] G. Faltings, *p -adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 1, 255–299
- [11] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p -adic Galois representations*. Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, 1988). Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989, 25–80.
- [12] G. Faltings, *Almost étale extensions*. Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques II. Astérisque **279** (2002), 185–270.
- [13] G. Faltings, *A p -adic Simpson correspondence*, Adv. Math. **198**(2) (2005), 847–862.
- [14] G. Faltings, *A p -adic Simpson correspondence II: small representations*, Pure Appl. Math. Q. **7** (2011), 1241–1264.
- [15] J.-M. Fontaine, *Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d’un corps local; construction d’un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.
- [16] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes p -adiques*. Périodes p -adiques, Séminaire de Bures, 1988. Astérisque **223** (1994), 59–111.
- [17] O. Gabber and L. Ramero, *Almost Ring Theory*, Lecture Notes in Math. **1800**, Springer, 2003.
- [18] O. Hyodo, *On variation of Hodge-Tate structures*, Math. Ann. **284** (1989), 7–22.
- [19] K. Kedlaya and R. Liu, *Relative p -adic Hodge theory, II: Imperfect period rings*, arXiv:1602.06899 [math.NT]
- [20] R. Liu and X. Zhu, *Rigidity and a Riemann-Hilbert correspondence for p -adic local systems*, Invent. Math., **207** (2017), 291–343.
- [21] A. Ogus and V. Vologodsky, *Nonabelian Hodge theory in characteristic p* , Publ. Math. IHES **106** (2007), 1–138.
- [22] H. Oyama, *PD Higgs crystals and Higgs cohomology in characteristic p* , J. Algebraic Geom. **26** (2017), 735–802.
- [23] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. IHES **116** (2012), 245–313.
- [24] P. Scholze, *p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum of Mathematics, Pi (2013), Vol. 1, e1, 77 pages.

- [25] S. Sen, *Continuous cohomology and p -adic Galois representations*, Invent. Math. **62** (1980), 89–116.
- [26] K. Shimizu, *Constancy of generalized Hodge–Tate weights of a local system*, Compos. Math. **154** (2018) 2606–2642.
- [27] J. Tate, *p -divisible groups*, Proc. of a Conf. on local fields, Driebergen 1966, Springer, 1967, pp. 158–183.
- [28] T. Tsuji, *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. **137** (1999), 233–411.
- [29] T. Tsuji, *Notes on p -adic Simpson correspondence and Galois cohomology*, unpublished preprint 2008.
- [30] T. Tsuji, *Purity for Hodge–Tate representations*, Math. Ann. **350** (2011), 829–866.
- [31] T. Tsuji, *Notes on the local p -adic Simpson correspondence*, Math. Ann. **371** (2018), 795–881.
- [32] D. Xu, *Transport parallèle et correspondance de Simpson p -adique*, Forum of Mathematics, Sigma (2017), Vol. 5, e13, 127 pages.
- [33] D. Xu, *Lifting the Cartier transform of Ogus–Vologodsky modulo p^n* , Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.), **163** (2019), 133pp.

