RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B86 (2021), 229–246

数論的力学系と高さ関数
Heights and Arithmetic Dynamics

By

安福 悠*
Yu YASUFUKU

Abstract

We survey some recent results in the field of arithmetic dynamics. We especially focus on topics where the height functions play important roles, namely integral points in orbits and Kawaguchi–Silverman conjecture relating arithmetic degrees with dynamical degrees.

§1. 「数論的力学系」という名前について

数論的力学系とは，名前から，整数論と力学系の融合分野と想像できる．**力学系**というのは，一つの空間 X を固定して，t をパラメターとし $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ を満たす自己写像の族

$$\{\phi_t \colon X \longrightarrow X\}_t$$

の研究で，元々は X を宇宙，ϕ_t を t 時間後の天体の位置移動とした場合が考えられていた．数学においては，微分幾何学的な設定，複素解析学的な設定から力学系研究が始まった．t は天文学の時のように実数を動くことにする場合もあるし，あるいは離散時間として 0 以上の整数を動くことにする場合もある (この場合，ϕ_n は ϕ_1 の n 重合成となるので，本稿では ϕ_1 を ϕ と書き，$\phi_n = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n\text{ 個}}$ を $\phi^{\circ n}$ と書くことにする).

この一方で，位相力学系という分野と，保測変換を自己写像の族とする分野も発達していき，こちらがまず Furstenberg などにより整数論へ応用されることになる (より詳しく

Received March 22, 2019. Revised July 31, 2019.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 37P55, 11G05, 11G10
Key Words: 数論的力学系, 高さ関数，整数点，力学系次数，算術的次数
本研究は科研費 (課題番号:15K17522, 19K03412) の助成を受けたものである．
*日本大学理工学部 〒 101-8308 東京都千代田区神田駿河台１－８－１４
Department of Mathematics, College of Science and Technology, Nihon University, Tokyo 101-8308, Japan.
e-mail: `yasufuku@math.cst.nihon-u.ac.jp`

は Furstenberg の本 [16] をご参照のこと）．**位相力学系**では位相空間 (特に距離空間) に於ける自己写像 ϕ の多重合成が研究対象であり，特に，**回帰集合**，つまり点 $x \in X$ とその開近傍 U に対して定義される

$$\{n \geq 1 : \ \phi^{\circ n}(x) \in U\}$$

の分析 (空でないのか，無限なのかなど) が重要となる．互いに可換な写像の同時回帰性を主張する Multiple Birkhoff Recurrence 定理を，$\{1, 2, \ldots, k\}^{\mathbb{N}}$ に使うことで，元々は組み合わせ論的に証明された van der Waerden の定理「自然数全体を k 個の集合に分割すると，分割のうちの一つには任意の長さの等差数列が含まれる」を導けることが分かったことから，加法的整数論と力学系が結びついた．

また，有限測度空間 (X, μ) 上の保測変換に関しては，測度論的同時回帰性，つまり，互いに可換な写像 $T_1, \ldots, T_\ell$ と正測度の集合 A に対して，

$$\mu(A \cap T_1^{-n}(A) \cap \cdots \cap T_\ell^{-n}(A)) > 0$$

を満たす n が存在する (Multiple Poincaré Recurrence 定理)．これは大変難解な定理なのだが，これを用いると，「正の upper density を持つ整数の部分集合には任意の長さの等差数列が存在する」という Szemerédi の定理まで導ける．

このような歴史的背景を踏まえると，位相空間や測度空間における写像の多重合成を整数論に応用することを「数論的力学系」と呼ぶことの方がある意味自然だったのかもしれないが，特に測度空間の力学系に関しては「**エルゴード理論**」という名前が定着したこともあり[1]，このような文脈で「数論的力学系」とはあまり言わない．

これに対して，代数体・局所体・有限体など，整数論でよく考察される体上の代数多様体を X として，その自己写像の多重合成に関して何らかの整数論的問題を考察することは，代数体 k 上の前周期点の有限性を示した Northcott [57] を除くと，Odoni [58] あたりがおそらく最初で歴史はずっと浅い．しかし Silverman の本 [65] の影響もあり，この分野に「数論的力学系」と名付けることが定着した[2]．本稿においても「数論的力学系」とは，代数多様体上の自己写像の多重合成の研究のことを指すとする．主に代数体上の代数多様体を考察することにし，その中でも高さ関数が登場するような分野である，「軌道上の整数点」と「力学系次数との算術的次数との関連」に焦点をあてる．実は，「軌道上の整数点」についてはアーベル多様体と力学系の形式的類似がきっかけとなっており，「力学系次数との関連」に関しては複素力学系における研究がきっかけとなっている．そこで，それらの分野との関連についても触れつつ，数論的力学系のこの 2 分野の最近の進展について解説する．なお，この 2 テーマ以外にも数論的力学系の様々な進展について扱ったサーベイ [2] も最近出版されたので，そちらも是非ご覧下さい．

[1]「エルゴード理論」という言葉に正式な定義があるのかどうかを筆者は知らない．**エルゴード性**とは時間平均 (時間 n までの間に，ある部分集合にいる割合) が，空間平均 (その部分集合の測度) に比例する性質のことであるが，エルゴード性を持つ写像が本質的になることもあり (ergodic decomposition)，エルゴード性を持たなくても，測度空間上の力学系がエルゴード理論と呼ばれている気がする．

[2]もっとも，筆者は Silverman の弟子なので，このような歴史に関して客観的な立場とは到底言えない．

本稿は次のように構成されている．まず次節で高さ関数 (Weil 高さ，局所高さ，標準的高さ) についておさらいする．3.1 節でアーベル多様体と力学系の類似について触れ，これを動機づけとする数論的力学系の他の問題についても少し述べたあと，3.2 節で軌道の整数点についての結果を紹介する．そして，4.1 節で複素力学系における力学系次数の研究を紹介したのちに，4.2 節で算術的次数との関連に関する最近の研究について紹介する．

謝辞： 数論的力学系に関しての概説講演の機会を頂きました東北大学の山崎隆雄先生，及び世話人のみなさまに感謝いたします．また，的確なコメントを多数下さった査読者の方にもお礼申し上げます．

§2.　高さ関数

この節に関してより詳しくは，[5, 23, 43] を参照のこと．以降，k を代数体とし，M_k を付値の集合，つまり k 上の非自明絶対値の同値類の集合とする．また，同値類の代表元を次のように決める．まず，$M_{\mathbb{Q}}$ に関しては，アルキメデス絶対値 $|\cdot|_\infty$ は通常の実数上の絶対値の有理数への制限とし，素数 p に対しての p 進絶対値 $|\cdot|_p$ は $|p|_p = \frac{1}{p}$ を満たすものをとる．そして，$v \in M_k$ に対しては，有理数に制限すると $M_{\mathbb{Q}}$ の代表元になっているものを $\|\cdot\|_v$ とし，$|\cdot|_v$ を

$$|\cdot|_v = \|\cdot\|_v^{[k_v:\mathbb{Q}_v]/[k:\mathbb{Q}]}$$

で定義する．このようにすることで，任意の $x \in k^*$ に対して**積公式**

$$\prod_{v \in M_k} |x|_v = 1$$

が成り立つ[3]．

射影空間 $\mathbb{P}^N(k)$ 上の**高さ関数** (**Weil 高さ**) とは

$$h([a_0 : \cdots : a_N]) = \sum_{v \in M_k} \log \max(|a_0|_v, \ldots, |a_N|_v)$$

と定義される．積公式により，$\mathbb{P}^N(k)$ 上 well-defined な関数であり，$|\cdot|$ の定義より，点 $P \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ を含むどの代数体 k を使っても $h(P)$ の値が変わらないことが示せるため，$\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の関数となる．より一般に，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上の射影代数多様体 X と $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義される Cartier 因子 D に対し，$D = D_1 - D_2$ と非常に豊富な因子 D_i を使って書き，閉埋め込み $\pi_i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_i}$ が $\pi_i^*(\mathscr{O}(1)) \cong \mathscr{O}(D_i)$ を満たすとき，

$$h_D(P) = h(\pi_1(P)) - h(\pi_2(P))$$

[3] この積公式さえ満たしていれば，高さ関数を定義できるので，代数体でなくても，例えば関数体上でも定義できる．この形で定義される標準高さが定理 3.3 で登場する．

と定義する．この定義自体は D_i の選び方に依存するが，違う取り方にしても $X(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の有界関数の差しか生まれないので，$D \mapsto h_D$ により準同型写像

$$h : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \{\text{functions } X(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}\}/\{\text{bounded functions } X(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

が定義されることになる．Weil 高さが満たす大切な性質として **Northcott の定理**がある．これは,「A が豊富な因子のとき，任意の定数 C と D に対して，

$$\{P \in X(k) : [k : \mathbb{Q}] \leq D, h_A(P) \leq C\}$$

が有限集合である」という主張で，有理点の有限性を導くのに強力な道具である．また，$\phi : Y \longrightarrow X$ が代数体上定義される射であるとき

$$h_{\phi^* D}(P) \qquad \text{と} \qquad h_D(\phi(P))$$

の差が $Y(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の有界関数となることも示せる (射による引き戻しに関する関手性)．Weil 高さにおいては，線型同値な因子が「同じ」 (差が有界関数) となるので，Weil 高さは「幾何学的」なものと捉えられることが多い．

これに対して局所高さ関数は，より数論的なものである．先ほど同様，$D = D_1 - D_2$ と書き，$\mathscr{L}(D_i)$ の大域切断の基底を $s_{i,1}, \ldots, s_{i,\ell_i}$，$D = \{(U, f_U)\}$ と書いて $\{f_U\}$ を $\mathscr{L}(D)$ の有理切断とみたものを s とし，D に対する ***v* 進局所高さ関数**を

$$\lambda_D(P, v) = \max_m \min_\ell \log \left| \left(s_{1,m} \otimes (s_{2,\ell} \otimes s)^{-1}\right)(P) \right|_v$$

と定義する ($\mathscr{L}(D_1) \otimes (\mathscr{L}(D_2) \otimes \mathscr{L}(D))^{-1} \cong \mathscr{O}_X$ を通して，P で評価する)．それぞれの v ごとに $\lambda_D(-, v)$ は $X \setminus |D|$ 上の関数であり，また $|D|$ 沿いに対数的な極を持つ．この定義は無論，D_i の取り方や大域切断・有理切断の取り方に依存してしまうのだが，実は本質的には同じだと示すことができる．ここで，関数の族 $\{f_v\}_{v \in M_k}$ が「本質的に 0」とは，各 f_v が有界関数であり，かつ有限個の v を除いて f_v が零関数であることで,「本質的に同じ」2 つの族とは，2 つの差が本質的に 0 となることである．また，$X \setminus |D|$ 上の関数として

$$\sum_{v \in M_k} \lambda_D(P, v)$$

と Weil 高さ $h_D(P)$ の差が有界関数であることも示せる．Weil 高さと同様，$\phi : Y \longrightarrow X$ が代数体上定義された射のとき,

$$\lambda_{\phi^* D}(P, v) \qquad \text{と} \qquad \lambda_D(\phi(P), v)$$

も本質的に同じ関数の族となる (射による引き戻しに関する関手性)．

X が射影空間 $\mathbb{P}^N$ の場合，因子 D が $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されるならば，ある代数体 k を係数と持つ斉 d 次多項式 $F(x_0, \ldots, x_N)$ が存在して，$D = (F = 0)$ となる．このとき，Weil 高さは

$$h_D([a_0 : \cdots : a_N]) = d \sum_{v \in M_k} \log \max_i |a_i|_v \tag{2.1}$$

となり，局所高さは

$$\lambda_D([a_0:\cdots:a_N],v)=\log\frac{(\max_i|a_i|_v)^d}{|F(a_0,\ldots,a_N)|_v} \tag{2.2}$$

となる．例えば，$\mathbb{P}^1$ 上においては，

$$\lambda_{[0:1]}([2^n:1],v_2)=n\log 2,\qquad \lambda_{[1:1]}([2^n:1],v_2)=0$$

となり，線形同値な 2 点 $[0:1]$ と $[1:1]$ だが局所高さ関数の差は非有界関数となることがすぐ分かる．このように局所高さ関数は，幾何学的というよりは数論的な概念である．

本節最後に，標準高さについて述べる．これは，アーベル多様体における Néron–Tate 高さの類似であり，数論的力学系には欠かせない道具となっている．簡単のため，射影空間上の射に関しての場合に焦点をあてる．本稿で，有理写像 $\phi:\mathbb{P}^N\dashrightarrow\mathbb{P}^N$ の**次数**とは，共通因子を持たない斉次式 $F_0,\ldots,F_n$ を用いて $\phi=[F_0(X_0,\ldots,X_N):\cdots:F_N(X_0,\ldots,X_N)]$ と書いたときの，$\deg F_0=\cdots=\deg F_N$ のこととする (つまり，超平面 H に対しての $\deg\phi^*H$ のこと)．

$\phi:\mathbb{P}^N\longrightarrow\mathbb{P}^N$ が射ならば，引き戻しによる関手性により，

$$|h_{\phi^*H}(P)-h_H(\phi(P))|$$

が有界関数であり，また，ϕ の次数が d ならば，(2.1) より，

$$|h_{\phi^*H}(P)-dh_H(P)|$$

も有界関数である．したがって，$h_H=h$ であることも使うと，ある定数 C が存在して

$$|h(\phi(P))-dh(P)|\le C \tag{2.3}$$

が成り立つ．つまり，$\phi(P)$ の高さは P の高さのおおむね d 倍となるのだが，この有界関数のズレをなくすのが次の標準高さである．

命題 2.1.　$\phi:\mathbb{P}^N\longrightarrow\mathbb{P}^N$ を代数体上定義される射とし，ϕ の次数 d が 2 以上とする．このとき，次の 2 条件を満たす関数 $\widehat{h_\phi}:\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})\longrightarrow\mathbb{R}$ が存在する：

(i) 定数 C' が存在して，任意の $P\in\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ に対し $|h(P)-\widehat{h_\phi}(P)|\le C'$

(ii) $\widehat{h_\phi}(\phi(P))=d\cdot\widehat{h_\phi}(P)$

この $\widehat{h_\phi}$ のことを ϕ に関する**標準高さ**という．

証明．$\widehat{h_\phi}$ を次のように定義し，題意を満たすことを示す：

$$\widehat{h_\phi}(P)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}h(\phi^{\circ n}(P)). \tag{2.4}$$

まず，(2.3) と telescoping sum の手法を使うと，$n>m$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{d^n}h(\phi^{\circ n}(P))-\frac{1}{d^m}h(\phi^{\circ m}(P))\right| \\
&=\left|\sum_{i=m}^{n-1}\left(\frac{1}{d^{i+1}}\left[h(\phi(\phi^{\circ i}(P)))-dh(\phi^{\circ i}(P))\right]\right)\right| \\
&\le\left(\frac{1}{d^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{d^n}\right)\cdot C<\frac{C}{d^{m+1}\cdot(1-\frac{1}{d})}
\end{aligned}$$

となるので，(2.4) の右辺はコーシー数列となり，極限が存在する．また，上記計算の $m=0$ の場合を考え，$n\to\infty$ とすると，

$$|\widehat{h_\phi}(P)-h(P)|\le\frac{C}{d-1}$$

も示せる．(ii) の性質は $\widehat{h_\phi}$ の定義 (2.4) より明らかである． □

ある 1 以上の整数 n に対して $\phi^{\circ n}(P)=P$ となる点を**周期点**といい，また，$n>m\ge 0$ に対して $\phi^{\circ n}(P)=\phi^{\circ m}(P)$ を満たす点のことを**前周期点**という．P が前周期点であることと，P の ϕ による**軌道**

$$\mathcal{O}_\phi(P)=\{P,\phi(P),\phi(\phi(P)),\phi^{\circ 3}(P),\ldots\}$$

が有限集合となることが同値であることは，すぐに分かる．代数体上の前周期点は，標準高さにより次のように特徴づけられる．これは,「Weil 高さが 0 な代数的数は 0 か，1 の冪乗根である」という Kronecker の定理の力学系版である．

命題 2.2. $\phi:\mathbb{P}^N\longrightarrow\mathbb{P}^N$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義される射とし，次数は 2 以上とする．このとき，$P\in\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ が前周期点であることと，$\widehat{h_\phi}(P)=0$ であることは同値である．

証明． P が前周期点ならば，$\{h(\phi^{\circ n}(P)) : n=0,1,2,\ldots\}$ は有限集合であるから，(2.4) の定義より $\widehat{h_\phi}(P)=0$ は明らかである．逆に，もし $\widehat{h_\phi}(P)=0$ ならば，命題 2.1 の性質 (ii) より，$\widehat{h_\phi}(\phi^{\circ n}(P))=0$ となるが，すると性質 (i) より，全ての n に対して $h(\phi^{\circ n}(P))\le C'$ となる．ϕ と P が定義される代数体を k とすれば，$\phi^{\circ n}(P)$ も k 上定義されるので，Northcott の定理より $\{\phi^{\circ n}(P):n=0,1,2,\ldots\}$ は有限集合となる． □

この命題と命題 2.1 の性質 (i) より，前周期点の高さは C' 以下と分かるので，再び Northcott の定理を使うことで，

(2.5) 代数体 k 上定義される ϕ の前周期点の個数は有限個である

という主張を示せる．この事実と，アーベル多様体と力学系の類似をもとに,「代数体上定義される前周期点の個数は ϕ の次数を固定すると一様有界である」という予想が立てられている．これについては，3.1 節でより詳しく述べる．

射影空間の射の場合でも，標準高さにはこのような応用があるので，軌道の点の高さの増大度を測るために，ほかの状況でも標準高さの構築が望まれる．実際，構築されている場合もあり (4.2 節で述べる例以外にも，[63, 36, 44] など)，そのような場合は，射影空間上の射と同様に前周期点などに応用できる場合も多い．また，局所高さは数論的で (2.3) のような式を満たさないのだが，適切な誤差項を定めることで局所高さの標準高さを構築できる場合もあり (例えば [6, 28, 60, 38, 29, 17, 30, 69, 35, 31])，局所標準高さを通して Weil 高さの標準高さを概算できるようになることも多い．

§ 3.　力学系と整数点

本節では，軌道上の整数点に関する結果を述べる．まずは，この問題の動機付けとして，アーベル多様体と数論的力学系の類似について次節でまとめる．これは軌道上の整数点問題だけでなく，数論的力学系の研究を進める上で非常に有意義な指標となっている．

§ 3.1.　アーベル多様体と数論的力学系

この節は，[75] に沿って述べていく．アーベル多様体 A とは，連結な射影代数多様体でかつ群構造を持つもので，1 次元の場合が楕円曲線である．O を零元とし，$P \in A$ ならば，P が生成する部分群を

$$O \xrightarrow{\phi} P \xrightarrow{+P} 2P \xrightarrow{+P} 3P \xrightarrow{+P} \cdots \xrightarrow{+P} mP \xrightarrow{+P} \cdots \tag{3.1}$$

のように書くことができる．また，アーベル多様体の群構造はアーベル群となることを導けるので，$P, Q \in A$ とすると，

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"'] & P \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & 2P \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & 3P \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & \cdots \\
Q \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"'] & P+Q \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & 2P+Q \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & 3P+Q \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & \cdots \\
2Q \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"'] & P+2Q \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & 2P+2Q \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & 3P+2Q \arrow[r, "+P"] \arrow[d, "+Q"] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

が可換となる．k が代数体のときは，Mordell–Weil の定理より，$A(k)$ は有限生成なので，図 (3.2) の有限次元格子版を作れば，$A(k)$ の元の全てが図のどこかに登場することになる．

この図に形式的に似たものを，力学系に関して構築することができる．つまり，自己写像 $\phi : X \longrightarrow X$ と X 上の点 P があれば，点 P の軌道は，

$$P \xrightarrow{\phi} \phi(P) \xrightarrow{\phi} \phi^{\circ 2}(P) \xrightarrow{\phi} \phi^{\circ 3}(P) \xrightarrow{\phi} \cdots \xrightarrow{\phi} \phi^{\circ m}(P) \xrightarrow{\phi} \cdots \tag{3.3}$$

のように，図 (3.1) に類似させて書ける．一方，もう一つ自己写像 $\psi : X \longrightarrow X$ があったとしても，一般には $\phi \circ \psi \neq \psi \circ \phi$ なので，図 (3.2) の類似版を力学系で書くことはできない．ただし，可換な 2 写像 ϕ, ψ に関しては，類似の可換図

(3.4)
$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"'] & \phi(P) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \phi(\phi(P)) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \phi^{\circ 3} \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \cdots \\
\psi(P) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"'] & \phi(\psi(P)) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \phi(\phi(\psi(P))) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \phi^{\circ 3}(\psi(P)) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \cdots \\
\psi(\psi(P)) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"'] & \phi(\psi^{\circ 2}(P)) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \phi^{\circ 2}(\psi^{\circ 2}(P)) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \phi^{\circ 3}(\psi^{\circ 2}(P)) \arrow[r, bend left=10, "\phi"] \arrow[d, bend right=20, "\psi"] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

を書くことができる．

このような背景から，代数多様体全体に群構造が入らない場合でも，自己写像が存在する場合には，「(ランク 1 の) アーベル多様体上で成り立つ定理や成り立つであろうと予想されている主張の類似が，ある有理点の軌道だけに限定すれば成り立つのではないか」という発想が生まれる．より一般には，有限個の互いに可換な写像 $\phi_1, \ldots, \phi_\ell : X \longrightarrow X$ が存在するときに，複数パラメター軌道

$$\mathcal{O}_{\phi_1,\ldots,\phi_\ell}(P) = \{\phi_1^{\circ n_1} \circ \cdots \phi_\ell^{\circ n_\ell}(P) :\ n_1, \ldots, n_\ell \geq 0\}$$

上に限定して，アーベル多様体上の定理や予想の類似を考察することになる．あくまでも形式的な類似があるだけであり，そのままの類似には簡単な反例があることも多いのだが，代数多様体上の力学系を考察していく上で，アーベル多様体での問題との類似は大事な一つの道しるべとなっている．

例えば，前節で述べた前周期点を考える．図 (3.1) と (3.3) の類似を思い出すと，$\phi^{\circ n}(P) = \phi^{\circ m}(P)$ のアーベル多様体における類似は，$nP = mP$ であり，これはある $\ell > 0$ に対して $\ell P = O$ であることと同値である．つまり，前周期点が，アーベル多様体におけるねじれ群の元に対応する．アーベル多様体のねじれ群に関しては，「代数体 k と自然数 g に対して定まる定数 C が存在し，k 上の任意の g 次元アーベル多様体 A に対して，$A(k)$ のねじれ群の大きさは C 以下である」という**一様有界予想**がある．これは，楕円曲線の場合は Mazur [54]，Merel [55] により解決されている．

一様有界予想の安直な力学系版を考えると，すぐに反例が見つかる：$\phi_d(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-d)+x$ は $1, 2, \ldots, d$ を固定点として持つので，$\mathbb{P}^1$ 上の射の固定点の個数に上界がない．そこで，「代数体 k 上定義された $\mathbb{P}^N$ 上の d 次の射の k-前周期点の個数には上界がある」という予想が自然となり，**Morton–Silverman 予想**と呼ばれる．いわば，(2.5) の主張を同じ次数の任意の射で動かしたものである．$(N, d) = (1, 4)$ の場合が Merel の

定理を導き，Fakhruddin [13] により一般の (N,d) の場合がアーベル多様体のねじれ群の一様有界性を導くことも示されている．大変強力な予想であり，$\mathbb{Q}$ 上の 2 次有理関数の場合も未解決である．実は，$\phi_c(x)=x^2+c$ という多項式の 1 パラメター族に限定しても，成立するかどうかはまだ知られていないのだが，理論的・計算機的双方から盛んに研究されている [15, 56, 61, 11, 50, 3, 25, 24]．また，abc 予想や $abcd$ 予想を仮定することで，x^d+c という多項式の族に対しての解決が，Looper [49] により最近発表されている．アーベル多様体との類似として捉えることができる数論的力学系の分野のうち，前周期点の一様有界性，ガロア表現の像，力学系版 Mordell–Lang 予想 (軌道と部分代数多様体との共通部分の規則性) に関しては，より詳しくは [75] をご参照下さい．

§ 3.2.　軌道上の整数点

X を代数体 k 上の射影代数多様体，D を k 上定義される因子とし，S を M_k の有限部分集合とする．このとき，D に対する **S 整数点**を，

$$\{P\in X(k):\sum_{v\in M_k\setminus S}\lambda_D(P,v)\le C\}$$

と定義する (C は何らかの定数)．局所高さの取り方や定数 C により集合は変わるので (C を変えることと，局所高さの取り方を「本質的に同じ」ものに入れ替えることと，ほぼ同値の作業となる)，記号の乱用ではあるが，この形をした集合を $(X\setminus D)(R_S)$ と表記することにする (R_S は S 整数の集合，つまり S の外の素イデアルに対する付値が全て 0 以上である k の元の集まり)．D に対応する線束 $\mathscr{O}(D)$ に適切な metric をいれる方法や，整モデルを使う方法でも，整数点集合を定義することができるが，これらの定義と基本的には同値の概念となっている．例えば，射影平面 $\mathbb{P}^N$ の超平面 $H=(X_0=0)$ に対する整数点は，S に全てのアルキメデス素点が含まれている場合，(2.2) を使い $C=0$ とすると，

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}^N\setminus H)(R_S)&=\{[a_0:\cdots:a_N]:\sum_{v\in M_k\setminus S}\log\frac{(\max_i|a_i|_v)}{|a_0|_v}=0\}\\&=\{[a_0:\cdots:a_N]:\left|\frac{a_i}{a_0}\right|_v\le 1\text{ for all }i\text{ and all }v\in M_k\setminus S\}\\&=\{[1:a_1:\cdots:a_N]:a_i\in R_S\text{ for all }i\}\end{aligned}$$

となり，H を除いたアフィン空間 $\mathbb{A}^N$ における自然な S 整数点の集合となっている．

アーベル多様体に関しての大定理の一つが，整数点に関する Faltings の次の結果 [14] である (楕円曲線の場合の Siegel の定理の拡張)．

定理 3.1.　A を k 上定義されたアーベル多様体とし，L を豊富な因子とする．このとき，$(A\setminus L)(R_S)$ は有限集合である．

図 (3.1) と (3.3) の類似を思い出すと，この定理の力学系版は「X を代数体 k 上定義された代数多様体，L を豊富な因子，$\phi:X\longrightarrow X$ を k 上の射とすると，任意の $P\in X(k)$

に対して $\mathcal{O}_\phi(P) \cap (X \setminus L)(R_S)$ は有限集合」となる．ただ，これにはすぐに反例が見つかる： $X = \mathbb{P}^1$ とし，L を無限遠点，$\phi(x)$ を R_S 係数多項式，$P \in R_S$ とすれば，P の軌道の点はすべて R_S の元となり，$(X \setminus L)(R_S)$ に入る．

この例は，何が問題なのだろうか．多項式においては，無限遠点の逆像が無限遠点のみである．このように，$\phi^{-1}(E) = E$ を満たす部分集合のことを **ϕ-完全不変集合**といい，この概念を用いて，次の予想を立てた [70].

予想 3.2. $\phi : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ を代数体 k 上定義される有理写像とする．S を k の付値の有限集合，D を $\mathbb{P}^N$ の非自明な有効因子とする．ϕ-完全不変で Zariski 閉な真部分集合が $\overline{\mathbb{Q}}$ 上存在しないならば，任意の k 有理点 P に対して，軌道 $\mathcal{O}_\phi(P)$ と $(\mathbb{P}^N \setminus D)(R_S)$ の共通部分は ($\mathbb{P}^N$ 内で)Zariski 稠密ではない．

$N = 1$ の場合は，Silverman [64] によりこの予想は肯定的に解決されている．また，$N = 2$ の時のこの予想は,「対数的一般型の代数多様体の整数点は退化する」と主張する Lang–Vojta 予想と呼ばれるディオファントス幾何の予想を射影平面の補集合に対して仮定し，アフィン代数幾何の構造定理から知られている結果を用いることで導いた [48]．一般の N に関しては，まだ何もよく分かっていない．少し違う方向からの研究としては，Vojta 予想 [68] という，ディオファントス幾何の深遠な予想を仮定することで，軌道の整数点が Zariski 稠密にならない十分条件を [71, 70] で見つけ出している．Vojta 予想は，Silverman の定理の証明で活用された Roth の定理の高次元化とも捉えられるので，これらの結果は Silverman の結果の拡張となっている．

$N = 1$ の場合の Silverman の結果は，色々な形で一般化・精密化が図られている．実際には，軌道上の整数点は「有限」という結論よりも「殆どない」という結論の方が，実体に合っており，これを定式化するような結果がいくつかある．例えば，軌道 $\mathcal{O}_\phi(P)$ の点 $\phi^{\circ n}(P)$ の**原始素イデアル**とは，

$$|\phi^{\circ n}(P)|_{\mathfrak{p}} < 1 \text{ かつ } |\phi^{\circ m}(P)|_{\mathfrak{p}} \geq 1 \quad \forall m < n$$

を満たす素イデアル $\mathfrak{p}$ のことで，軌道上における「新しい素イデアル」を指す．数列の **Zsigmondy 集合**とは，原始素イデアルを持たない項の集まりのことで (Zsigmondy [73] は $\{\alpha^n - 1\}$ 型の数列の場合を調べた),「軌道 $\mathcal{O}_\phi(P)$ の Zsigmondy 集合が有限である」という主張が，Faber–Granville [12], Ingram–Silverman [32], Ghioca–Nguyen–Tucker [18], Krieger [42] などにより確かめられている．分母と分子の役割を入れ替えて考えると，毎回新しい素イデアルが分母に登場することを言及しているので，S 整数点である軌道の点は当然有限個となり，Silverman の定理より大分精密な主張となっている．また，軌道上の点の素因数分解に登場する素数の研究は，力学系ガロア表現の像の大きさとも関わりがあることもあり ([59, 33, 4]; Jones による概説論文 [34] も参照のこと)，盛んに研究されている．

また，一写像による軌道上の整数点が「有限」というのみならず，写像の族を考えても軌道上の整数点の個数が「一様有界性を満たす」ことについても調べられており，例えば

Hindes [21] は次を示した．ここで，Rat_d とは d 次有理関数の集合，つまり

$$\mathrm{Rat}_d = \mathbb{P}^{2d+1} \setminus (\mathrm{Res}=0) = \Big\{[a_0 : \cdots : a_d : b_0 : \cdots : b_d] : \\ \mathrm{Res}(a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0, b_d z^d + \cdots + b_1 z + b_0) \neq 0\Big\}$$

のことである．

定理 3.3 (Hindes). C を代数体 k 上定義された曲線，$d \geq 2$，$\Phi : C \longrightarrow \mathrm{Rat}_d$ と $\alpha : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ という k 上定義された射があるとする．もし $\Phi^{\circ 2} \notin k(C)[z]$ かつ $\widehat{h_\Phi}(\alpha) > 0$ ならば，

$$I = \{t \in C(k) : \Phi(t)^{\circ 2} \notin k[z]\}$$

に含まれない $C(k)$ の点は有限個である．また，Vojta 予想を仮定すると，

$$\sup\{n : \text{ ある } t \in C(k) \text{ に対し，} \ \Phi(t)^{\circ n}(\alpha(t)) \in R_S \text{ かつ } \widehat{h_{\Phi(t)}}(\alpha(t)) > 0\}$$

は有限で，さらにもし $|C(k)| = \infty$ ならば，

$$\limsup_{B \to \infty} \frac{\displaystyle\sum_{t \in I, h(t) \leq B} \Big|\mathcal{O}_{\Phi(t)}(\alpha(t)) \cap R_S\Big|}{|\{t : t \in I, h(t) \leq B\}|} = 0$$

つまり，有理関数と点それぞれの 1 パラメター族があると，軌道 $\mathcal{O}_{\Phi(t)}(\alpha(t))$ の点が R_S に入る多重合成の回数には t によらない上界があり，また軌道に含まれる整数点の個数は平均 0 だ，と主張している．それぞれの有理関数と点ごとに軌道上の整数点の有限性を主張する Silverman の定理に比べるとはるかに強い．より正確には，1 パラメター曲線族が満たす高さ関数の不等式の成立が必要で，Vojta 予想からこの不等式が導けることは Ih の結果 [26, 27] である．n に上界があることの証明では，標準高さが大活躍する．

軌道の整数点の個数の平均については，Gunther–Hindes [20] もあり，Φ を動かない族としたとき (つまり，どの t に関しても $\Phi(t) = \phi(z)$)，次数 D 以下の $\overline{\mathbb{Q}}$ 点全体を考え，その点から始まる軌道に含まれる整数点の個数の期待値を計算しても，0 個となることが分かっている．この結果と定理 3.3 を融合して，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ における対数的小平次元による構造定理を使うことで，有界次数代数体版の定理 3.3 を導けるような非定数 Φ の例を，Hindes-Yasufuku [22] で構築した．

ここまでは一つの写像による軌道だけを扱ってきたので，図 (3.3) の状況であり，ランク 1 のアーベル多様体の類似しか考察していない．図 (3.4) の状況で，軌道の整数点の少なさを言及する結果として，Corvaja–Sookdeo–Tucker–Zannier [7] がある．

定理 3.4 (Corvaja–Sookdeo–Tucker–Zannier). k を代数体，S を k の付値の有限集合とし，$f(x)$ を次数 $d \geq 2$ の k 係数有理関数で $x^{\pm d}$ とは共役でないものとする．P と Q が f の前周期点でないならば，

$$\{(m,n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^2 : f^{\circ m}(P) \text{ が } f^{\circ n}(Q) \text{ に対して } S \text{ 整数 }\}$$

は有限集合で，実効的に計算できる．

これは，(f,id) と (id,f) という $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上の可換な 2 写像による軌道上の，$(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\setminus\Delta)$ の S 整数点の有限性である (Δ は対角線)．多項式である f,g に対する (f,id) と (id,g) による軌道に関しても，アフィン代数幾何の手法を用いることで，Levin–Tucker–Yasufuku [47] で軌道の整数点の有限性を示している．

§ 4. 算術的次数

本節では，算術的次数に関する最近の研究を紹介する．軌道の点の高さの増大度という数論的な情報が，幾何学的情報である力学系次数と密接に関連するという分野なので，まずは背景として，複素力学系における力学系次数の概念を次節で紹介する．力学系次数や算術的次数に関しては，川口氏による概説 [74] も参照のこと．

§ 4.1. 複素力学系と力学系次数

X を $\mathbb{C}$ 上定義された滑らかな射影代数多様体とし，$\phi: X \dashrightarrow X$ を支配的な有理型写像とする．このとき，**ℓ 次力学系次数** $\lambda_\ell(\phi)$ とは，$(\phi^{\circ n})^*: H^{\ell,\ell}(X) \longrightarrow H^{\ell,\ell}(X)$ の固有値の絶対値の最大値を考え，その n 乗根の極限を $n\to\infty$ として計算した値である．Russakovskii–Shiffman [62] ($\mathbb{P}^N$ の場合)， Dinh–Sibony [10] (コンパクトケーラー多様体の場合) により，この極限は存在することが分かっている．X 全体において，どの程度力学系が漸近的に膨張するのかを測る指標と言える．0 次から $(\dim X)$ 次までの力学系次数のうち，最大なものの対数をとると，より古くからある概念で，どの位小さく近傍をとらないと多重合成が離れて行ってしまうかを定量化する**位相エントロピー**と等しくなることが，Gromov [19] と Yomdin [72] により示されている (X が滑らかな射影代数多様体，ϕ が全射の射の場合； 一般の支配的な有理写像の場合，位相エントロピーが，力学系次数の最大の対数以下となる [10])．これらの背景から，力学系次数は幾何学的である．

次に，λ_ℓ のより代数的な定義の仕方も紹介する (基礎体は標数 0 の代数閉体とする)．$Z^\ell(X)$ を余次元 ℓ の既約部分多様体が生成する自由アーベル群，$\mathrm{Num}^\ell(X)$ を，次元 ℓ の任意の既約部分多様体との交叉数が 0 となる $Z^\ell(X)$ の元の集合とし，$N^\ell(X)$ を $Z^\ell(X)/\mathrm{Num}^\ell(X)$ とおく．このとき，$N^\ell(X)$ は有限生成自由アーベル群であることが知られており，任意の支配的有理写像 $\phi: X \dashrightarrow X$ に対して，特異点解消を使って不定点を解消することで，$\phi^*: N^\ell(X) \longrightarrow N^\ell(X)$ が定義できる．有限次元 $\mathbb{R}$ 線形空間 $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(N^\ell(X)\otimes\mathbb{R})$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を 1 つ固定し，

$$\lim_{n\to\infty} \|(\phi^{\circ n})^*\|^{1/n}$$

を考えると，ノルムの取り方によらない極限値が存在し，$\lambda_\ell(\phi)$ と等しいことが分かる．また，任意の豊富因子 A に対して，

$$\lambda_\ell(\phi) = \lim_{n\to\infty} \left((\phi^{\circ n})^* A^\ell \cdot A^{\dim X-\ell}\right)^{1/n}$$

となることも分かる．実は，$\lambda_\ell(\phi)$ は双有理不変量でもあることが示されているので [8, 9]，X を「滑らか」と仮定する必要はない．なお，Truong [67] により**相対版力学系次数**，つ

まり，$\phi : X \dashrightarrow X$, $\psi : Y \dashrightarrow Y$ が支配的な対応，$\pi : X \dashrightarrow Y$ が支配的な有理写像で $\pi \circ \phi = \psi \circ \pi$ を満たすような場合にも，$\lambda_\ell(\phi|_\pi)$ が定義され，様々な性質が導かれている．

§ 4.2.　力学系次数と算術的次数

力学系次数が力学系全体の幾何学的な不変量であるのに対し，川口–Silverman [41] が定義した算術的次数は，軌道ごとに違う値を取り得るものである．X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されている射影代数多様体，A を豊富な因子，$\phi : X \dashrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義される支配的な有理写像，その不定点集合を $\mathrm{Indet}(\phi)$ とする．このとき，(前方) 軌道が定義できる点の集合

$$X_\phi = \{P \in X(\overline{\mathbb{Q}}) : \text{ 任意の } n \geq 1 \text{ に対して } \phi^{\circ n}(P) \notin \mathrm{Indet}(\phi)\}$$

を定義し，$P \in X_\phi$ に対して，

$$\overline{\alpha}_\phi(P) = \limsup_{n\to\infty} \max(1, h_A(\phi^{\circ n}(P)))^{1/n}$$
$$\underline{\alpha}_\phi(P) = \liminf_{n\to\infty} \max(1, h_A(\phi^{\circ n}(P)))^{1/n}$$

と定義し，これらを**上算術的次数**，**下算術的次数**と呼ぶ．$\overline{\alpha}_\phi(P) = \underline{\alpha}_\phi(P)$ となるときは，簡単に $\alpha_\phi(P)$ と書くことにし，これを**算術的次数**と呼ぶ．P の軌道上の点の高さがどの位のペースで増大していくかを測っているもので，軌道によって異なる．

この算術的次数が，1 次力学系次数と関連づけられることで，幾何学的な情報を含んでいると主張するのが次の予想である．

予想 4.1 (Kawaguchi–Silverman [41, Conjecture 6])．　上の設定において

(a) $P \in X_\phi$ に対して，$\overline{\alpha}_\phi(P) = \underline{\alpha}_\phi(P)$.

(b) $P \in X_\phi$ に対して，$\alpha_\phi(P)$ の値は代数的整数である．

(c) 算術的次数の集合 $\{\alpha_\phi(P) : P \in X_\phi\}$ は有限集合である．

(d) $P \in X_\phi$ に対して，もし $\mathcal{O}_\phi(P)$ が X で Zariski 稠密ならば，$\alpha_\phi(P) = \lambda_1(\phi)$ である．

(d) の逆は成り立たない： 前周期点ではないが，固定される部分多様体に入っている点がまずく，例えば，$\mathbb{P}^2$ 上の射 $\phi = [X^2 : Y^2 : Z^2]$ の λ_1 は 2 であり，$\alpha_\phi([2:1:0])$ も 2 だが，$[2:1:0]$ の軌道は全て $Z = 0$ 上である．この予想は立てられてからまだ 10 年ほどであるが，盛んに研究されている．(a)–(c) に関しては，射の場合に Kawaguchi–Silverman [40] で証明されている．$\overline{\alpha}_\phi(P) \leq \lambda_1(\phi)$ であることは，一般の有理写像の場合で Matsuzawa [51] で示されている．また，いくつかの場合に関しては予想が全て解決している：$N^1(X) \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$ かつ ϕ が射のとき [39]，アフィン自己同型を $\mathbb{P}^N$ に伸ばした有理写像のとき [39]，$\mathbb{P}^N$ 上の単項式写像のとき [66]，曲面上の射のとき [53]，X がアーベル多様体のとき [40]，準アーベル多様体の射のとき [52]．また，(a) と (d) に関しては [46]

で，hyperkähler 多様体上の全射な射の場合や，小平次元が 0 である滑らかな 3 次元多様体上の，次数 2 以上の全射の射の場合が解決されている．

一方，(c) に関しては，Lesieutre–Satriano [45] において，反例

$$\phi : [X : Y : Z : A : B] \mapsto [XY + AX : YZ + BX : XZ : AX : BX]$$

が作られた．これを

$$(x, y, a, b) \mapsto (y + a, \frac{y}{x} + b, a, b)$$

と書くことで，2 次元の写像 $\phi_{a,b}$ の族と見ることができるのがポイントで，$\phi_{a,b}$ の 1 次力学系次数の計算 [1] が活用される．予想の修正版としては,「どの正次元部分多様体に制限しても，ϕ が fibration を保たないこと」を条件に足すことが提案されている．

算術的次数を求めるには，軌道の点の高さを制御する必要があるので，P の高さと $\phi(P)$ の高さに綺麗な関係式が成り立つような標準高さ関数の構築が役立つことは容易に想像できる．実際，位相エントロピーが正の曲面上の射の場合 [37] や，上記のアーベル多様体や単項式写像の場合などの場合において，標準高さが構築されている．ただし，$\mathbb{P}^N$ の射の場合と比べると構築は複雑で，前方と後方双方の軌道を絶妙なバランスで組み合わせて考えたり，数値的同値類 (線形空間を有限次元にするため) と線形同値性 (高さ関数との相性のよさのため) を使い分けたりする必要がある．また，算術的次数の分析には，高さ関数などのディオファントス的な考え方だけでなく，代数幾何の理論も活用されている．例えば，曲面の分類論や極小モデル理論，そして hyperkähler 多様体上の場合には，曲面上の因子の交叉形式の代わりになるような，Beauville–Bogomolov–Fujiki 形式と呼ばれる因子上の 2 次形式の理論が使われている．

今後の算術的次数関連の研究として，高次力学系次数がどのように高さ関数と関連するかを調べるのも，個人的には面白いと思っている．高さ関数は直接的には，因子に対して構築されるものなので，1 次力学系次数との関連が一番自然なのだが，ブローアップを使って高余次元部分多様体を因子にしたり因子の共通部分として部分多様体を書くことで，任意の部分スキームに対する高さ関数も構築されている．このように定義された高さ関数と，高次力学系次数がどのように関連していくのか，もし関連があるならば，それを用いて逆に高次力学系次数が計算できないものなのか，などが自然な問題として出てくる．また，局所高さ関数を用いて算術的次数と同じようなものを考えることにも興味を持っている．例えば，何重合成までの間に整数点が登場するのか，などの数論的問いを力学系次数との関連から分析できれば，素晴らしいと思っている．

参考文献

[1] Eric Bedford and Kyounghee Kim, *Periodicities in linear fractional recurrences: degree growth of birational surface maps*, Michigan Math. J. **54** (2006), no. 3, 647–670. MR MR2280499 (2008k:32054)

[2] Robert Benedetto, Patrick Ingram, Rafe Jones, Michelle Manes, Joseph H. Silverman, and Thomas J. Tucker, *Current trends and open problems in arithmetic dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **56** (2019), no. 4, 611–685.

[3] Robert L. Benedetto, *Preperiodic points of polynomials over global fields*, J. Reine Angew. Math. **608** (2007), 123–153. MR MR2339471

[4] Robert L. Benedetto, Xander Faber, Benjamin Hutz, Jamie Juul, and Yu Yasufuku, *A large arboreal Galois representation for a cubic postcritically finite polynomial*, Res. Number Theory **3** (2017), Art. 29, 21. MR 3736808

[5] Enrico Bombieri and Walter Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, no. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[6] Gregory S. Call and Joseph H. Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms*, Compositio Math. **89** (1993), no. 2, 163–205. MR MR1255693 (95d:11077)

[7] Pietro Corvaja, Vijay Sookdeo, Thomas J. Tucker, and Umberto Zannier, *Integral points in two-parameter orbits*, J. Reine Angew. Math. **706** (2015), 19–33. MR 3393361

[8] Tien-Cuong Dinh and Viêt-Anh Nguyên, *Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps*, Comment. Math. Helv. **86** (2011), no. 4, 817–840. MR 2851870

[9] Tien-Cuong Dinh, Viêt-Anh Nguyên, and Tuyen Trung Truong, *On the dynamical degrees of meromorphic maps preserving a fibration*, Commun. Contemp. Math. **14** (2012), no. 6, 18pp. MR 2989646

[10] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony, *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1637–1644. MR 2180409 (2006f:32026)

[11] Xander Faber, *Benedetto's trick and existence of rational preperiodic structures for quadratic polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 2, 685–694. MR 3283655

[12] Xander Faber and Andrew Granville, *Prime factors of dynamical sequences*, J. Reine Angew. Math. **661** (2011), 189–214. MR 2863906 (2012j:37120)

[13] Najmuddin Fakhruddin, *Boundedness results for periodic points on algebraic varieties*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **111** (2001), no. 2, 173–178. MR MR1836365 (2003a:11075)

[14] Gerd Faltings, *Diophantine approximation on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **133** (1991), no. 3, 549–576.

[15] E. V. Flynn, Bjorn Poonen, and Edward F. Schaefer, *Cycles of quadratic polynomials and rational points on a genus-2 curve*, Duke Math. J. **90** (1997), no. 3, 435–463.

[16] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981, M. B. Porter Lectures. MR 603625

[17] Dragos Ghioca and Niki Myrto Mavraki, *Variation of the canonical height in a family of rational maps*, New York J. Math. **19** (2013), 873–907. MR 3158237

[18] C. Gratton, K. Nguyen, and T. J. Tucker, *ABC implies primitive prime divisors in arithmetic dynamics*, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 6, 1194–1208. MR 3138487

[19] Mikhaïl Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3-4, 217–235. MR 2026895

[20] Joseph Gunther and Wade Hindes, *Integral points of bounded degree on the projective line and in dynamical orbits*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 12, 5087–5096. MR 3717939

[21] Wade Hindes, *The average number of integral points in orbits*, Math. Res. Lett. **26** (2019), no. 1, 101–120.

[22] Wade Hindes and Yu Yasufuku, *Uniform boundedness of integral points in orbits*, 2018, preprint.

[23] Marc Hindry and Joseph H. Silverman, *Diophantine Geometry: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000. MR MR1745599 (2001e:11058)

[24] Benjamin Hutz, *Determination of all rational preperiodic points for morphisms of* $\mathbb{P}^N$, Math. Comp. **84** (2015), no. 291, 289–308. MR 3266961

[25] Benjamin Hutz and Patrick Ingram, *On Poonen's conjecture concerning rational preperiodic points of quadratic maps*, Rocky Mountain J. Math. **43** (2013), no. 1, 193–204. MR 3065461

[26] Su-Ion Ih, *Height uniformity for algebraic points on curves*, Compositio Math. **134** (2002), no. 1, 35–57. MR 1931961

[27] ———, *Height uniformity for integral points on elliptic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 4, 1657–1675. MR 2186991

[28] Patrick Ingram, *Lower bounds on the canonical height associated to the morphism* $\phi(z) = z^d + c$, Monatsh. Math. **157** (2009), no. 1, 69–89. MR MR2504779 (2010a:11122)

[29] ———, *Variation of the canonical height for a family of polynomials*, J. Reine Angew. Math. **685** (2013), 73–97. MR 3181564

[30] ———, *Variation of the canonical height for polynomials in several variables*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 24, 13545–13562. MR 3436155

[31] ———, *Canonical heights for correspondences*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 2, 1003–1027. MR 3885169

[32] Patrick Ingram and Joseph H. Silverman, *Primitive divisors in arithmetic dynamics*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), no. 2, 289–302. MR MR2475968

[33] Rafe Jones, *The density of prime divisors in the arithmetic dynamics of quadratic polynomials*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), no. 2, 523–544. MR MR2439638

[34] ———, *Galois representations from pre-image trees: an arboreal survey*, Actes de la Conférence "Théorie des Nombres et Applications", Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2013, pp. 107–136. MR 3220023

[35] Mattias Jonsson and Paul Reschke, *On the complex dynamics of birational surface maps defined over number fields*, J. Reine Angew. Math. **744** (2018), 275–297. MR 3871447

[36] Shu Kawaguchi, *Canonical height functions for affine plane automorphisms*, Math. Ann. **335** (2006), no. 2, 285–310. MR MR2221115

[37] ———, *Projective surface automorphisms of positive topological entropy from an arithmetic viewpoint*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 1, 159–186. MR 2382145

[38] ———, *Local and global canonical height functions for affine space regular automorphisms*, Algebra Number Theory **7** (2013), no. 5, 1225–1252. MR 3101078

[39] Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, *Examples of dynamical degree equals arithmetic degree*, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 41–63. MR 3189467

[40] ———, *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 7, 5009–5035. MR 3456169

[41] ———, *On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties*, J. Reine Angew. Math. **713** (2016), 21–48. MR 3483624

[42] Holly Krieger, *Primitive prime divisors in the critical orbit of* $z^d + c$, Int. Math. Res. Not. IMRN (2013), no. 23, 5498–5525. MR 3142262

[43] Serge Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

MR MR715605 (85j:11005)

[44] Chong Gyu Lee, *An upper bound for the height for regular affine automorphisms of* $\mathbb{A}^n$, Math. Ann. **355** (2013), no. 1, 1–16. MR 3004574

[45] John Lesieutre and Matthew Satriano, *A rational map with infinitely many points of distinct arithmetic degrees*, Ergodic Theory Dynam. Systems **40** (2020), no. 11, 3051–3055.

[46] ______, *Canonical Heights on Hyper-Kähler Varieties and the Kawaguchi–Silverman Conjecture*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2021), no. 10, 7677–7714.

[47] Aaron Levin, Thomas Tucker, and Yu Yasufuku, *Two-parameter orbits under polynomials and integral points*, preprint.

[48] Aaron Levin and Yu Yasufuku, *Integral points and orbits of endomorphisms on the projective plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 2, 971–1002.

[49] Nicole Looper, *Dynamical uniform boundedness and the abc-conjecture*, Invent. Math. (2021), to appear, `https://doi.org/10.1007/s00222-020-01029-7`.

[50] Michelle Manes, $\mathbb{Q}$*-rational cycles for degree-2 rational maps having an automorphism*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 3, 669–696. MR MR2407816 (2009a:14029)

[51] Yohsuke Matsuzawa, *On upper bounds of arithmetic degrees*, Amer. J. Math. **142** (2020), no. 6, 1797–1820.

[52] Yohsuke Matsuzawa and Kaoru Sano, *Arithmetic and dynamical degrees of self-morphisms of semi-abelian varieties*, Ergodic Theory Dynam. Systems **40** (2020), no. 6, 1655–1672.

[53] Yohsuke Matsuzawa, Kaoru Sano, and Takahiro Shibata, *Arithmetic degrees and dynamical degrees of endomorphisms on surfaces*, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 7, 1635–1657. MR 3871505

[54] B. Mazur, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1977), no. 47, 33–186 (1978). MR MR488287 (80c:14015)

[55] Loïc Merel, *Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 437–449. MR MR1369424 (96i:11057)

[56] Patrick Morton, *Arithmetic properties of periodic points of quadratic maps*, Acta Arith. **62** (1992), no. 4, 343–372. MR MR1199627 (93k:12004)

[57] D. G. Northcott, *Periodic points on an algebraic variety*, Ann. of Math. (2) **51** (1950), 167–177. MR MR0034607 (11,615c)

[58] R. W. K. Odoni, *The Galois theory of iterates and composites of polynomials*, Proc. London Math. Soc. (3) **51** (1985), no. 3, 385–414. MR MR805714 (87c:12005)

[59] ______, *On the prime divisors of the sequence* $w_{n+1} = 1 + w_1 \cdots w_n$, J. London Math. Soc. (2) **32** (1985), no. 1, 1–11. MR MR813379 (87b:11094)

[60] Clayton Petsche, Lucien Szpiro, and Thomas J. Tucker, *A dynamical pairing between two rational maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 4, 1687–1710. MR 2869188

[61] Bjorn Poonen, *The classification of rational preperiodic points of quadratic polynomials over* $\mathbb{Q}$*: a refined conjecture*, Math. Z. **228** (1998), no. 1, 11–29.

[62] Alexander Russakovskii and Bernard Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), no. 3, 897–932. MR 1488341 (98h:32046)

[63] Joseph H. Silverman, *Rational points on K3 surfaces: a new canonical height*, Invent. Math. **105** (1991), no. 2, 347–373. MR MR1115546 (92k:14025)

[64] ______, *Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 793–829. MR MR1240603 (95e:11070)

[65] ______, *The Arithmetic of Dynamical Systems*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 241,

Springer, New York, 2007. MR MR2316407

[66] ———, *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), no. 2, 647–678. MR 3233709

[67] Tuyen Trung Truong, *Relative dynamical degrees of correspondences over a field of arbitrary characteristic*, J. Reine Angew. Math. **758** (2020), 139–182.

[68] Paul Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1239, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[69] Elliot Wells, *Computing canonical heights on the projective line with no factorization*, Math. Comp. **86** (2017), no. 308, 3019–3029. MR 3667036

[70] Yu Yasufuku, *Deviations from S-integrality in orbits on $\mathbb{P}^N$*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) **9** (2014), no. 4, 603–631. MR 3309943

[71] ———, *Integral points and relative sizes of coordinates of orbits in $\mathbb{P}^N$*, Math. Z. **279** (2015), no. 3-4, 1121–1141. MR 3318263

[72] Y. Yomdin, *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), no. 3, 285–300. MR 889979

[73] K. Zsigmondy, *Zur Theorie der Potenzreste*, Monatsh. Math. **3** (1892), 265–284.

[74] 川口 周, 代数・数論力学系について, 第５９回代数学シンポジウム報告集 (2014), 68–86.

[75] 安福 悠, アーベル多様体と数論的力学系 ー 類似と相違, 日本数学会秋季総合分科会 総合講演・企画特別講演アブストラクト集 (2018), 69–80.