分散計算におけるk-合意問題の障害論理式

京都大学・数学教室　西田悠太郎
Yutaro Nishida
Department Mathematics, Kyoto University

1　序文

分散計算の組み合わせトポロジー論 [8] は，単体的複体を用いて分散システムの状態を表示することで，分散計算の性質を組み合わせトポロジー論を用いて議論する．これにより，タスクの不可解性を証明するためには，幾何的障害（topological obstruction）と呼ばれる，タスクの可解性と矛盾する幾何的な性質を見つければよいということが分かっている．しかし，幾何的障害を見つけるためには，単体的複体が全体としてどのような形をしているかということを調べる必要があり，それには組み合わせトポロジー論の手法が必要となる．

近年，Goubault らは単体的複体を認識論理のモデルとして用いることで，タスク可解性の議論を動的認識論理を用いて行うための枠組みを示した [6]．認識論理のモデルには通常，クリプケフレームと呼ばれる関係構造を用いる．Gaubault らはクリプケフレームの圏と単体的複体の圏の間の圏同値を示し，単体的複体による認識論理の意味論を展開した．これにより Goubault らは，合意（consensus）問題 [4]，test and set[5]，equality negation[3] が不可解であるという事実に，動的認識論理による別証明を与えることに成功した．

Goubault らの証明手法は，障害論理式（logical obstruction）と呼ばれる，可解性と矛盾する論理式を具体的に 1 つ示すというものであった．Goubault らの理論は，タスク不可解性の証明には組み合わせトポロジー論の手法を用いて抽象的な単体的複体の幾何的性質を示す必要はなく，具体的な論理式を 1 つ示せば十分であるという可能性を示している．しかし，k-合意問題（k-set agreement）の障害論理式を見つけることは，$k=1$ の場合である合意問題を除き、[4] において未解決で残されていた．

本稿では，k-合意問題の不可解性を示す障害論理式を具体的に構成する．単体的複体の幾何的な性質を利用した k-合意問題の不可解性の証明は [1, 10, 9] で既に与えられているが，これらは k-合意問題に対応する単体的複体が,「穴」の空いた形をしているという大域的な性質を利用している．本稿では，障害論理式を具体的に構成し，個々のファセットの局所的な性質についてのみ論証することで、k-合意問題の不可解性を示す．

2　単体的複体と動的認識論理

2.1　単体的複体

定義 2.1 (単体的複体)**.** 集合 S が与えられた時，S の空でない有限部分集合の族 C が**単体的複体** (simplicial complex) であるとは，任意の $X \in C$ に対して，X の空でない任意の部分集合 Y もまた $Y \in C$ となることをいう．

S の元を頂点という．単体的複体 C の元は**単体** (simplex) と呼ばれる．単体の中で極大なもの，つまり自身以外の単体の部分集合にならないものを**ファセット** (facet) という．単体的複体 C の頂点の集合を $\mathscr{V}(C)$，ファセットの集合を $\mathscr{F}(C)$ で表す．単体 $X \in C$ の次元 $\dim(X)$ を $|X|-1$ で定義する．単体的複体 C の次元 $\dim(C)$ を， $\max\{\dim(X) \mid X \in C\}$ で定義する．

定義 2.2. 単体的複体 C が**純粋** (pure) であるとは，ファセットが全て同じ次元である時をいう．

定義 2.3. 有限集合 A が与えられた時，**色付き単体的複体** (chromatic simplicial complex)$\langle C,\chi\rangle$ とは単体的複体 C と色付け写像 $\chi\colon \mathscr{V}(C)\to A$ で構成され，任意の単体 $X\in C$ に対して，X の頂点は全て異なる色になる（任意の $v,v'\in X$ に対して，$v\neq v'$ なら $\chi(v)\neq\chi(v')$）ものをいう．

定義 2.4. C と C' を単体的複体とする．**単体写像** (simplicial map)$f\colon C\to C'$ とは，$\mathscr{V}(C)$ から $\mathscr{V}(C')$ への写像で，C の任意の単体 X に対して，$f(X)$ が C' の単体になるものをいう．

$\langle C,\chi\rangle$ と $\langle C',\chi'\rangle$ が色付き単体的複体で，単体写像 $f\colon C\to C'$ が色を保つ（任意の $v\in\mathscr{V}(C)$ に対して，$\chi(v)=\chi'(f(v))$ が成り立つ）時，f を**色付き単体写像** (chromatic simplicial map) $f\colon \langle C,\chi\rangle\to\langle C',\chi'\rangle$ という．

以下で考える色付き単体的複体は全て純粋であり，その次元は色集合を A として，$|A|-1$ であるとする．

2.2 認識論理の単体的モデル

本節では，[4] に沿って認識論理の構文を定義し，単体的複体による意味論を導入する．

V を値の可算集合，A をエージェントの有限集合，$AP=\{p_{a,x}\mid a\in A, x\in V\}$ を原子論理式の集合とし，$AP_a=\{p_{a,x}\mid x\in V\}$ と表す．

定義 2.5 (構文)**.** 言語 $\mathscr{L}(A,AP)$ を以下の BNF 記法で定義する．

$$\varphi ::= p \mid \neg p \mid (\varphi\wedge\varphi) \mid K_a\varphi \mid E_B\varphi \mid C_B\varphi \mid D_B\varphi$$

ただし，$p\in AP$, $a\in A$, $B\subseteq A$ である．

部分集合 B の元の個数が少ない時は，E_B, D_B, C_B は B の元を並べて書くことにする．例えば，$B=\{a,b\}$ なら E_{ab}, D_{ab}, C_{ab} のように書く．

定義 2.6. **単体的モデル** (simplicial model) $M=\langle C,\chi,\ell\rangle$ とは，純粋色付き単体的複体 $\langle C,\chi\rangle$ とラベル付け $\ell\colon\mathscr{V}(C)\to\mathscr{P}(AP)$ の組であり，ℓ は任意の $v\in\mathscr{V}(C)$ に対して，$\ell(v)\subseteq AP_{\chi(v)}$ となる写像である．

$\ell(v)=\{p\}$ のように，ラベルが一点集合の場合は，簡単のため括弧を省略して $\ell(v)=p$ と表すことにする．ファセット $X=\{v_0,v_1,\dots,v_n\}$ に対し，$\ell(X)=\bigcup_{i=0}^{n}\ell(v_i)$ と表す．

定義 2.7. $M=\langle C,\chi,\ell\rangle, M'=\langle C',\chi',\ell'\rangle$ を単体的モデルとする．色付き単体写像 $f\colon\langle C,\chi\rangle\to\langle C',\chi'\rangle$ がラベル付けを保つ（任意の $v\in\mathscr{V}(C)$ に対して，$\ell'(f(v))=\ell(v)$ が成り立つ）時，f を**単体モデル写像** $f\colon M\to M'$ という．

Goubault ら [4] は，分散システムにおけるプロセスを認識論理のエージェントとみなすことで，単体的モデルを用いてプロセス達の入出力を表示している．

例 2.8 (n-エージェント，n-値分散システム)**.** $A=\{a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\}$, $AP=\{p_{a,i}\mid a\in A, i\in\{0,1,\dots,n-1\}\}$ とする．n-エージェント，n-値の分散システムに対応する単体的モデル $I=\langle C,\chi,\ell\rangle$ のファセットの集合を $\mathscr{F}(C)=\{\{\langle a_0,b_0\rangle,\langle a_1,b_1\rangle,\dots,\langle a_{n-1},b_{n-1}\rangle\}\mid b_i\in\{0,1,,\dots,n-1\}\}$ で定める．ファセットは各エージェント a_i の入力の組と一対一対応するので，ファセット $\{\langle a_0,b_0\rangle,\langle a_1,b_1\rangle,\dots,\langle a_{n-1},b_{n-1}\rangle\}$ を $b_0b_1\cdots b_{n-1}$（入力の値のみを $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ の順に固定して並べたもの）と同一視する．色とラベル付けは $\chi(a_i,b_i)=a_i$，$\ell(a_i,b_i)=p_{a_i,b_i}$ で定める．

$a\in A$ に対して，色付き単体的複体 $\langle C,\chi\rangle$ のファセット上の二項関係（同値関係）$\sim_a\subseteq\mathscr{F}(C)\times\mathscr{F}(C)$ を

$$\sim_a=\{(X,Y)\in\mathscr{F}(C)\times\mathscr{F}(C)\mid a\in\chi(X\cap Y)\}$$

で定義する．$X\sim_a Y$ は，2 つの世界 X と Y がエージェント a にとって区別できないことを表す．

さらに $B\subseteq A$ に対して，$\sim_{E_B}=\bigcup_{a\in B}\sim_a$，$\sim_{D_B}=\bigcap_{a\in B}\sim_a$ とし，$\sim_{C_B}$ で $\sim_{E_B}$ の反射推移的閉包を表すことにする．

定義 2.9 (意味論)**.** $M=\langle C,\chi,l\rangle$ を単体的モデル，$X\in\mathscr{F}(C)$, $p\in AP$, $a\in A$, $B\subseteq A$, $\varphi,\psi\in\mathscr{L}(A,AP)$ とする．認識状態 (epistemic state) (M,X) における論理式の真偽を帰納的に定義する．

$$
\begin{aligned}
M,X\models p &\iff p\in\ell(X)\\
M,X\models\neg\varphi &\iff M,X\not\models\varphi\\
M,X\models\varphi\wedge\psi &\iff M,X\models\varphi\text{ かつ }M,X\models\psi\\
M,X\models K_a\varphi &\iff \text{任意の }Y\in\mathscr{F}(C)\text{ に対して, }X\sim_a Y\text{ なら }M,Y\models\varphi\text{ が成立}\\
M,X\models E_B\varphi &\iff \text{任意の }Y\in\mathscr{F}(C)\text{ に対して, }X\sim_{E_B} Y\text{ なら }M,Y\models\varphi\text{ が成立}\\
M,X\models D_B\varphi &\iff \text{任意の }Y\in\mathscr{F}(C)\text{ に対して, }X\sim_{D_B} Y\text{ なら }M,Y\models\varphi\text{ が成立}\\
M,X\models C_B\varphi &\iff \text{任意の }Y\in\mathscr{F}(C)\text{ に対して, }X\sim_{C_B} Y\text{ なら }M,Y\models\varphi\text{ が成立}
\end{aligned}
$$

また，任意の $X\in\mathscr{F}(C)$ に対して，$M,X\models\varphi$ である時，モデル M で φ は妥当（valid）であるといい，$M\models\varphi$ と表す．

定理 2.10. $M=\langle C,\chi,l\rangle$ と $M'=\langle C',\chi',l'\rangle$ を単体的モデル，$f\colon M\to M'$ を単体モデル写像，$X\in\mathscr{F}(C)$，$a\in A$ とし，φ を原子論理式の直前以外に否定を含まない論理式とする．この時，$M',f(X)\models\varphi$ なら $M,X\models\varphi$ が成り立つ．

2.3 単体的アクションモデル

動的認識論理は，エージェントに新たな情報が与えられた時にエージェントの知識が変化する様子を認識論理の枠組みの中で記述するものである．エージェントの知識の変化を記述するためには，アクションモデルを用いる [2]．アクションモデルは起こり得る知識の変化と，それが起こるための前提条件をモデル化したものである．これは，分散システムへの応用においては，エージェントが通信を行った結果起こる知識の変化をモデル化するために用いられる．

本節では [4] に沿って単体的複体によるアクションモデルを定義する．

定義 2.11. $D=\langle C,\chi\colon\mathscr{V}(C)\to A\rangle$, $D'=\langle C',\chi'\colon\mathscr{V}(C')\to A\rangle$ を同じ次元 n の色付き単体的複体とし，これらのカルテジアン積 (cartesian product) と呼ばれる n 次元の色付き単体的複体 $D\times D'=\langle C\times C',\chi''\rangle$ を定義する．単体的複体 $C\times C'$ の単体は次のように構成する．次元が等しい C の単体 X と C' の単体 Y で $\chi(X)=\chi'(Y)$ となるものに対して，これらの成分を $\chi(u_i)=\chi'(v_i)$ となるように $X=\{u_0,u_1,...,u_k\}$, $Y=\{v_0,v_1,...,v_k\}$ と表示することができる．そして X と Y の同じ色の元を組にすることによって，新しい集合 $X\times Y=\{(u_0,v_0),(u_1,v_1),...,(u_k,v_k)\}$ を定める．このような $X\times Y$ 全ての集合で，単体的複体 $C\times C'$ を定義する．すなわち

$$
C\times C'=\left\{X\times Y\mid X\in C,Y\in C',\dim(X)=\dim(Y),\chi(X)=\chi(Y)\right\}
$$

であり，色付け写像は

$$
\chi''\colon\mathscr{V}(C\times C')\to A\ ;\ (u,v)\mapsto\chi(u)\ \left(=\chi'(v)\right)
$$

で定義する．

定義 2.12. 単体的アクションモデル (simplicial action model) $\langle T,\chi,\mathrm{pre}\rangle$ とは，純粋色付き単体的複体 $\langle T,\chi\rangle$ と前提条件と呼ばれる写像 $\mathrm{pre}\colon\mathscr{F}(T)\to\mathscr{L}(A,AP)$ の組である．

単体的アクションモデルを用いて，即時スナップショット (immediate snapshot) [8] のモデルを定義できる．即時スナップショットとは，非同期分散システムにおいて，複数のエージェントがいくつかのグループに分かれ，そのグループ毎に順番に共有メモリへの読み書きを行う計算モデルである．ただし，グループ分け

と読み書きを行う順番は非決定的に決まり，同じグループに属するエージェントは同期して読み書きを行う．非同期分散システムにおいて，wait-free な即時スナップショットと，wait-free な read-write 共有メモリモデルは，計算能力が等価であることが知られている [7]．なお，wait-free であるとは，各エージェントが，他のエージェントとの実行順序に関わらず，必ず有限時間内で結果を出力することをいう．即時スナップショットの詳細や具体的な実装については [7] を参照されたい．

即時スナップショットの実行は，**集合の順序分割**（ordered set partition）によって組み合わせ的に定義できる．

定義 2.13. 集合 $A=\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ の順序分割（ordered set partition）とは，A の空でない互いに素な部分集合の列 $\vec{c}=c_1,\ldots,c_m$ で，$\bigcup c_i = A$ を満たすものをいう．

順序分割 $\vec{c}$ に対して，$Aview_a(\vec{c})$ を，$a\in c_j$ ならば $Aview_a(\vec{c})=\bigcup_{i\le j} c_i$ で定義する．

$\vec{c}$ は各エージェントが読み書きを行った順番を表しており，$Aview_a(\vec{c})$ はエージェント a が読み込みを行った時点までに共有メモリに書き込みを行ったエージェント（a から見えたエージェント）の集合を表している．エージェント a は，$Aview_a(\vec{c})$ に含まれるエージェントの入力値からなる集合を出力する．ただし，この出力される集合を，各エージェント a_i の入力値を第 i 成分とするベクトルで表すことにし，a から見えなかったエージェントの成分は $\perp$ で表す．

例えば，8-エージェント $A=\{a_0,a_1,\ldots,a_7\}$ による即時スナップショットを考えてみる．エージェント a_i の入力が b_i であるとし，$view_{a_i}(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_7})$ で，A の順序分割 $\vec{c}$ において a_i から見えたエージェントの入力のベクトルを表す．いま，例えば a_0,a_1,a_2 が最初に即時スナップショットを実行し，次に a_3 が実行し，最後に a_4,a_5,a_6,a_7 が実行したとする．つまり，順序分割 $\vec{c}=c_1,c_2,c_3$ は，$c_1=\{a_0,a_1,a_2\},c_2=\{a_3\},c_3=\{a_4,a_5,a_6,a_7\}$ である．この時，

$$view_{a_i}(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_7})=\begin{cases}(b_0b_1b_2\perp\cdots\perp) & (0\le i\le 2)\\ (b_0b_1b_2b_3\perp\cdots\perp) & (i=3)\\ (b_0b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7) & (4\le i\le 7)\end{cases}$$

である．

例 2.14 (即時スナップショット)**.** 例 2.8 の $I=\langle C,\chi,\ell\rangle$ を用いて，n-エージェント $A=\{a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\}$ の即時スナップショットに対応するアクションモデル $IS=\langle T,\chi',\mathrm{pre}\rangle$ を定義する．$view_a(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}})$ で，各エージェント a_i の入力値が b_i で，A の順序分割が $\vec{c}$ の時に，a から見えたエージェントの入力のベクトルを表す．$\langle T,\chi'\rangle$ のファセットの集合を次で定義する．

$$\mathscr{F}(T)=\left\{\left\{\left\langle a_i, view_{a_i}(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}})\right\rangle \mid i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\} \mid \vec{c}\text{: } A \text{ の順序分割}, b_0b_1\cdots b_{n-1}\in\mathscr{F}(C)\right\}$$

$a\in A$ に対して，$\chi'(\langle a, view_a(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}})\rangle)=a$ である．前提条件は $\mathrm{pre}(\{\langle a_i, view_{a_i}(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}})\rangle \mid i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\})=\bigwedge_{i=0}^{n-1} p_{a_i,b_i}$，すなわち $I,b_0b_1\cdots b_{n-1}\models \mathrm{pre}(\{\langle a_i, view_{a_i}(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}})\rangle \mid i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\})$ で定義する．

$\{\langle a_i, view_{a_i}(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}})\rangle \mid i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\}\in\mathscr{F}(T)$ は A の順序分割 $\vec{c}$ と I のファセット $b_0b_1\cdots b_{n-1}$ の組 $\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}}$ と一対一対応するので，簡単のため $\{\langle a_i, view_{a_i}(\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}})\rangle \mid i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\}$ を $\vec{c}^{\,b_0b_1\cdots b_{n-1}}$ で表すことにする．

定義 2.15. 単体的モデル $M=\langle C,\chi,\ell\rangle$ と単体的アクションモデル $\mathscr{A}=\langle T,\chi',\mathrm{pre}\rangle$ に対して，**積更新モデル** (product update model) と呼ばれる単体的モデル $M[\mathscr{A}]=\langle C[\mathscr{A}],\chi[\mathscr{A}],\ell[\mathscr{A}]\rangle$ が次のように定義される．$M[\mathscr{A}]$ の台の色付き単体的複体 $\langle C[\mathscr{A}],\chi[\mathscr{A}]\rangle$ は，$\langle C\times T,\chi''\rangle=\langle C,\chi\rangle\times\langle T,\chi'\rangle$ の部分複体で，$M,X\models\mathrm{pre}(Y)$ なるファセット $X\in\mathscr{F}(C),Y\in\mathscr{F}(T)$ から誘導される．すなわち

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(C[\mathscr{A}])&=\{X\times Y\in\mathscr{F}(C\times T)\mid M,X\models\mathrm{pre}(Y)\}\\ C[\mathscr{A}]&=\left\{X'\times Y'\subseteq X\times Y\mid X\times Y\in\mathscr{F}(C[\mathscr{A}]),X'\times Y'\neq\emptyset\right\}\\ \chi[\mathscr{A}]&=\chi''|_{\mathscr{V}(C[\mathscr{A}])}\end{aligned}$$

であり，ラベルは $\ell[\mathscr{A}](u,v)=\ell(u)$ で定義する．

3 動的認識論理によるタスク可解性

以下では初期状態，つまり各エージェントたちの入力をファセットとする単体的モデル $I=\langle C,\chi,\ell\rangle$ を**初期単体的モデル** (initial simplicial model) と呼ぶ．I のファセットの集合は $\mathscr{F}(C)=\{\{\langle a_0,b_0\rangle,\langle a_1,b_1\rangle,...,\langle a_n,b_n\rangle\}\mid b_i\in\mathscr{V}\}$ という形で，色とラベルは $\chi(\langle a_i,b_i\rangle)=a_i$, $\ell(\langle a_i,b_i\rangle)=p_{a_i,b_i}$ で定義する．

定義 3.1 (タスク)**.** 初期単体的モデル I に対する**タスク** (task) $\mathscr{T}$ とは，次の条件を満たすアクションモデル $\mathscr{T}=\langle T,\chi,\mathrm{pre}\rangle$ である．まず，T の各ファセットは $\{\langle a_0,d_0\rangle,\langle a_1,d_1\rangle,...,\langle a_n,d_n\rangle\}\subseteq A\times V$ という形をしていて，$\chi(\langle a_i,d_i\rangle)=a_i$ である．さらに $\mathscr{T}$ の任意のファセット $Y\in\mathscr{F}(T)$ に対して，$I,X\models\mathrm{pre}(Y)$ となるような I のファセット $X\in\mathscr{F}(C)$ が少なくとも 1 つ存在する．

タスク $\mathscr{T}$ の頂点 $\langle a_i,d_i\rangle$ は，エージェントとその出力値を表している．つまり $\mathscr{T}$ のファセットの集合は，可能な出力値の組み合わせを表したものである．

例 3.2. 非同期分散システムにおける**合意** (consensus) **問題**とは，全てのエージェントが共通の 1 つのエージェントの入力に合意し，その値を出力しなければならないというものである．例えば 3-エージェント $A=\{b,g,r\}$，2-値 $AP=\{p_{a,i}\mid a\in A,i\in\{0,1\}\}$（入力が 0 か 1）のコンセンサス問題を考えると，対応するタスク $\mathscr{T}=\langle T,\chi,\mathrm{pre}\rangle$ のファセットは 2 つしかない．

$$\mathscr{F}(T)=\{\{\langle b,0\rangle,\langle r,0\rangle,\langle g,0\rangle\},\{\langle b,1\rangle,\langle r,1\rangle,\langle g,1\rangle\}\}$$

$a\in A,i\in\{0,1\}$ に対して，$\chi(a,i)=a$ である．前提条件は，1 つの値を出力するためには，少なくとも 1 つのエージェントがその値を入力する必要があるので，$i\in\{0,1\}$ に対して，$\mathrm{pre}(\{\langle b,i\rangle,\langle r,i\rangle,\langle g,i\rangle\})=p_{b,i}\vee p_{r,i}\vee p_{g,i}$ である．

以下では，$P_i=\vee_{a\in A}p_{a,i}$ とする．

n-エージェント非同期分散システムにおける (n,k)-**合意問題** ((n,k)-set agreement) とは，各エージェントはエージェントたちの入力のうち 1 つを出力するのだが，全体で出力される異なる値は高々k 種類でなければならないというものである．これは合意問題（例 3.2）の一般化であり，合意問題は $(n,1)$-合意問題に相当する．

例 3.3 ((n,k)-合意問題)**.** n-エージェント $A=\{a_0,a_1,...,a_{n-1}\}$ に対する (n,k)-**合意問題** ((n,k)-set agreement) を，タスク $\mathscr{T}=\langle T,\chi,\mathrm{pre}\rangle$ として定義する．各エージェントは入力のうち 1 つを出力し，出力されるのは全体で高々k 種類の値である．したがって T のファセットの集合は

$$\mathscr{F}(T)=\{\{\langle a_0,d_0\rangle,\langle a_1,d_1\rangle,...,\langle a_{n-1},d_{n-1}\rangle\}\mid d_i\in\{0,1,...,n-1\},|\{d_0,d_1,...,d_{n-1}\}|\leq k\}$$

と表せて，色は $\chi(\langle a_i,d_i\rangle)=a_i$，前提条件は $\mathrm{pre}(\{\langle a_0,d_0\rangle,\langle a_1,d_1\rangle,...,\langle a_{n-1},d_{n-1}\rangle\})=\bigwedge_{i=0}^{n-1}P_{d_i}$ で定義される．

以下では誤解の生じない限り，$(k+1,k)$-合意問題を単に k-**合意問題** (k-set agreement) と呼ぶ．$(k+1)$-エージェント分散システム（例 2.8 の $n=k+1$ の場合）の単体的モデル $I=\langle C,\chi,\ell\rangle$ に対するタスク $\mathscr{T}$ として，k-合意問題を考える．

積更新モデル $I[\mathscr{T}]$ のファセットは，$\mathscr{T}$ のファセット $\{\langle a_0,d_0\rangle,\langle a_1,d_1\rangle,...,\langle a_k,d_k\rangle\}$ とその前提条件を満たす I のファセット $b_0b_1\cdots b_k=\{\langle a_0,b_0\rangle,\langle a_1,b_1\rangle,...,\langle a_k,b_k\rangle\}$ との組であるが，これは各エージェントの入出力で一意に定まるので，簡単のため

$$\{\langle a_0,(b_0,d_0)\rangle,\langle a_1,(b_1,d_1)\rangle,...,\langle a_k,(b_k,d_k)\rangle\}$$

と表示することにする．

定義 3.4 (タスク可解性)**.** $I=\langle C,\chi,\ell\rangle$ を初期単体的モデルとする．タスク $\mathscr{T}$ が $\mathscr{A}$ で解けるとは，単体モデル写像 $\delta: I[\mathscr{A}]\to I[\mathscr{T}]$ が存在して $\pi'_I\circ\delta=\pi_I$ が成り立つ（つまり，以下の図式を可換にする）時をいう．

$$\begin{tikzcd} & I[\mathscr{A}] \arrow[dl, "\pi_I"'] \arrow[d, dotted, "\delta"] \\ I & I[\mathscr{T}] \arrow[l, "\pi'_I"] \end{tikzcd}$$

π_I と π'_I は射影を表している．つまり π_I は，$\pi_I: \mathscr{V}(C[\mathscr{A}])\to\mathscr{V}(C)$; $(i,u)\mapsto i$ なる単体モデル写像である．

定義 3.4 のタスク可解性と分散計算の組み合わせトポロジー論によるタスク可解性 [9, 8] は，圏論的積の普遍性から等価であることが，Goubault らにより示されている [6]．これにより，これまで幾何的な性質を用いて議論されてきたタスク可解性を，認識論理の側面から議論することが可能になる．

4　k-合意問題のタスク不可解性

本節では k-合意問題の不可解性を示す障害論理式を具体的に構成する．

命題 4.1. I を初期単体的モデル，$\mathscr{T}$ をタスク，$\mathscr{A}$ を単体的モデルとする．原子論理式の直前以外に否定を含まない論理式 $\Phi\in\mathscr{L}(A,AP)$ が存在して，$I[\mathscr{T}]\models\Phi$ かつ $I[\mathscr{A}]\not\models\Phi$ ならばタスク $\mathscr{T}$ は $\mathscr{A}$ で解けない．すなわち，$I[\mathscr{T}]$ の任意のファセット X で $I[\mathscr{T}],X\models\Phi$ が成り立つが，$I[\mathscr{A}]$ のあるファセット Z で $I[\mathscr{A}],Z\not\models\Phi$ となるならば，タスク $\mathscr{T}$ は $\mathscr{A}$ で解けない．

幾何的な性質を利用した k-合意問題の不可解性の証明は,「穴」が空いていない単体的複体から「穴」が空いている単体的複体に写れないという議論による．このように，不可解性の根拠となる幾何的な性質のことを**幾何的障害**（topological obstruction）という [8]．これにならい，命題 4.1 における Φ を**障害論理式**（logical obstruction）と呼ぶことにする．

定義 4.2. $\mathscr{T}$ を (n,k)-合意問題タスク，I を例 2.8 の初期単体的モデルとする．各エージェント a_i の入力が i であるような $I[\mathscr{T}]$ の任意のファセット
$X=\{\langle a_0,(0,d_0)\rangle,\langle a_1,(1,d_1)\rangle,...,\langle a_{n-1},(n-1,d_{n-1})\rangle\}$ に対して，

$$\{\lambda_1,...,\lambda_m\}=\left\{d_{\lambda_1},...,d_{\lambda_m}\right\}\quad(\lambda_1,...,\lambda_m\in\{0,1,...,n-1\},1\le m\le k)$$

を満たすエージェントの部分集合 $\left\{a_{\lambda_1},...,a_{\lambda_m}\right\}$ を X の**サイクル集合**（cyclic subset）という．

サイクル集合とは，つまり入力値の集合と出力値の集合が一致する（入出力が置換の関係にある）エージェントの部分集合のことである．サイクル集合に属するエージェントは，サイクル集合に属さないエージェントについてより多くの情報が得られる．極端な場合では，大きさ k のサイクル集合には，k 種類の出力値をそれぞれ入力したエージェントが全て含まれるため，そこに属するエージェントが知識を合わせれば，それ以外の各エージェントは必ず自分たちの入力値のうち 1 つを出力することが分かる（例えば，$\{a_0,a_1,...,a_{k-1}\}$ がサイクル集合をなすファセットにおいて，$D_{a_0a_1\cdots a_{k-1}}\left\{\bigvee_{i=k}^{n-1}K_{a_i}\left(\bigvee_{j=0}^{k-1}P_j\right)\right\}$ が真になる）．

$I=\langle C,\chi,\ell\rangle$ を例 2.8 の初期単体的モデル，$\mathscr{T}$ を (n,k)-合意問題タスクとする．$A=\{a_0,a_1,...,a_{n-1}\}$ とし，大きさ m（$1\le m\le n-1$）の $B\subset A$ に対して論理式

$$\Psi_B^{(n,m)}\equiv D_B\left\{\left(\bigvee_{a_i\in A\setminus B}\neg p_{a_i,i}\right)\vee\left(\bigvee_{a_i\in A\setminus B}K_{a_i}\left(\bigvee_{j\in\{i|a_i\in B\}}P_j\right)\right)\vee\left(\bigvee_{i=m+1}^{n-1}\left(\bigvee_{\substack{E\subset A\setminus B\\|E|=i-m}}\Psi_{B\cup E}^{(n,i)}\right)\right)\right\}$$

を定義する．ただし，$n=k+1$ の時は，簡単のため $\Psi_B^{(n,m)}$ を単に Ψ_B^m と表す．

(n,k)-合意問題の不可解性を示すために，次に示す補題を用いる．この補題から，即時スナップショットの実行後にスナップショットを最後に撮ったエージェントから順にエージェントをたどっていき，最後に 1 つのエージェントだけが残った時，それ以外の $n-1$ エージェントが知識を合わせても，最後のエージェントが自身の値しか見えていないのか，そうでないのか（単独で最初にスナップショットを撮ったのか，そうでないのか）が判別できないということを導くことができる．

以下，$I[IS]$ のファセット $b_0b_1\cdots b_{n-1}\times\vec{c}^{b_0b_1\cdots b_{n-1}}$ は $\vec{c}^{b_0b_1\cdots b_{n-1}}$ と一対一対応するので，簡単のため単に $\vec{c}^{b_0b_1\cdots b_{n-1}}$ と表すことにする．

補題 4.3. $\vec{c}^{012\cdots n-1}$ を $I[IS]$ の任意のファセットで，各エージェント $a_i(0\le i\le n-1)$ の入力が i であるようなものとし，$\vec{c}=c_1c_2\cdots c_r(1\le r\le n)$ とおく．この時，$|c_1|=m\ (1\le m\le n-1)$ なら，

$$\left(\bigvee_{a_i\in c_1}\neg p_{a_i,i}\right)\vee\left(\bigvee_{a_i\in c_1}K_{a_i}\left(\bigvee_{j\in\{i|a_i\in A\setminus c_1\}}P_j\right)\right)\vee\left(\bigvee_{i=n-m+1}^{n-1}\left(\bigvee_{\substack{E\subset c_1\\|E|=i+m-n}}\Psi^{(n,i)}_{(A\setminus c_1)\cup E}\right)\right)$$

が $\vec{c}^{012\cdots n-1}$ において偽になる（この論理式は $\Psi^{(n,n-m)}_{A\setminus c_1}$ の $D_{A\setminus c_1}$ の中身である）．

証明. m に関する帰納法で示す．

- $m=1$ の場合を示す．$\vec{c}^{012\cdots n-1}$ を $\vec{c}=c_1c_2\cdots c_r, |c_1|=1$ なる $I[IS]$ の任意のファセットとする．対称性より，$c_1=\{a_{n-1}\}$ としてよい．$\vec{c}^{012\cdots n-1}$ において，

$$\left(\neg p_{a_{n-1},n-1}\right)\vee\left(K_{a_{n-1}}\left(\bigvee_{j=0}^{n-2}P_j\right)\right)$$

  が偽になることを示せばよい．まず，a_{n-1} の入力は $n-1$ なので，$\neg p_{a_{n-1},n-1}$ は偽になり，$view_{a_{n-1}}(\vec{c}^{012\cdots n-1})=(\bot\bot\cdots\bot n-1)$ であることから，$\vec{c}^{012\cdots n-1}$ は全てのエージェントが $n-1$ を入力するようなファセットと a_{n-1} で関係しているので $K_{a_{n-1}}\left(\bigvee_{j=0}^{n-2}P_j\right)$ も偽になる．

- $m=1,2,...,l(1\le l\le n-2)$ の場合を仮定して，$m=l+1$ の場合を示す．$\vec{c}^{012\cdots n-1}$ を $\vec{c}=c_1c_2\cdots c_r$, $|c_1|=l+1$ なる $I[IS]$ の任意のファセットとする．対称性より，$c_1=\{a_{n-1-l},a_{n-l},...,a_{n-1}\}$ としてよい．$\vec{c}^{012\cdots n-1}$ において，

$$\left(\bigvee_{i=n-1-l}^{n-1}\neg p_{a_i,i}\right)\vee\left(\bigvee_{i=n-1-l}^{n-1}K_{a_i}\left(\bigvee_{j=0}^{n-l-2}P_j\right)\right)\vee\left(\bigvee_{i=1}^{l}\left(\bigvee_{\substack{E\subset\{a_{n-1-l},...,a_{n-1}\}\\|E|=i}}\Psi^{(n,n-1-l+i)}_{\{a_0,...,a_{n-l-2}\}\cup E}\right)\right)$$

  が偽になることを示せばよい．

  - $\vec{c}^{012\cdots n-1}$ において，各エージェント a_i の入力は i なので，$\bigvee_{i=n-1-l}^{n-1}\neg p_{a_i,i}$ は偽になる．
  - $c_1=\{a_{n-1-l},a_{n-l},...,a_{n-1}\}$ に属する任意のエージェント a_i に対して，$view_{a_i}(\vec{c}^{012\cdots n-1})=(\bot\bot\cdots\bot\ n-1-l\ \ n-l\ \cdots\ n-1)$ であるので，$\vec{c}^{012\cdots n-1}$ は，例えば $a_0,a_1,...,a_{n-l-2}$ の入力が全て $n-1$ であるようなファセットと $a_{n-1-l},a_{k-l},...,a_{n-1}$ で関係しているので，$\bigvee_{i=n-1-l}^{n-1}K_{a_i}\left(\bigvee_{j=0}^{n-l-2}P_j\right)$ は偽になる．
  - $\vec{c}^{012\cdots n-1}$ において，$\bigvee_{i=1}^{l}\left(\bigvee_{\substack{E\subset\{a_{n-1-l},...,a_{n-1}\}\\|E|=i}}\Psi^{(n,n-1-l+i)}_{\{a_0,...,a_{n-l-2}\}\cup E}\right)$ が偽になることを示す．任意の $i\in\{1,2,...,l\}$ に対して，$\bigvee_{\substack{E\subset\{a_{n-1-l},...,a_{n-1}\}\\|E|=i}}\Psi^{(n,n-1-l+i)}_{\{a_0,...,a_{n-l-2}\}\cup E}$ が偽になることを示せばよい．対称性よ

り $E=\{a_{n-1-l},a_{n-l},...,a_{n-l+i-2}\}$ として（$i\in\{1,2,...,l\}$），

$$\Psi^{(n,n-1-l+i)}_{\{a_0,a_1,...,a_{n-l+i-2}\}}\equiv D_{a_0,...,a_{n-l+i-2}}\left\{\left(\bigvee_{j=n-1-l+i}^{n-1}\neg p_{a_j,j}\right)\vee\left(\bigvee_{j=n-1-l+i}^{n-1}K_{a_j}\left(\bigvee_{h=0}^{n-l+i-2}P_h\right)\right)\right.$$
$$\left.\vee\left(\bigvee_{j=1}^{l-i}\left(\bigvee_{\substack{F\subset\{a_{n-1-l+i},...,a_{n-1}\}\\|F|=j}}\Psi^{(n,n-1-l+i+j)}_{\{a_0,...,a_{n-l-2}\}\cup F}\right)\right)\right\}$$

が偽になることを示せば十分である．$c'_1=c_1\setminus E=\{a_{n-1-l+i},a_{n-l+i},...,a_{n-1}\}, c'_2=E=\{a_{n-1-l},a_{n-l},...,a_{n-l+i-2}\}$ とおき，新しく順序分割 $\vec{c}'=c'_1c'_2c_2\cdots c_r$ を定義する．$\vec{c}^{012\cdots n-1}$ と $\vec{c}'^{012\cdots n-1}$ は $a_0,...,a_{n-l+i-2}$ で関係している．さらに帰納法の仮定よりファセット $\vec{c}'^{012\cdots n-1}$ において

$$\left(\bigvee_{j=n-1-l+i}^{n-1}\neg p_{a_j,j}\right)\vee\left(\bigvee_{j=n-1-l+i}^{n-1}K_{a_j}\left(\bigvee_{h=0}^{n-l+i-2}P_h\right)\right)\vee\left(\bigvee_{j=1}^{l-i}\left(\bigvee_{\substack{F\subset\{a_{n-1-l+i},...,a_{n-1}\}\\|F|=j}}\Psi^{(n,n-1-l+i+j)}_{\{a_0,...,a_{n-l-2}\}\cup F}\right)\right)$$

が偽になるので，$\vec{c}^{012\cdots n-1}$ において $\Psi^{(n,n-l+i-1)}_{\{a_0,...,a_{n-l-2},a_{n-l-1},a_{n-l}\cdots,a_{n-l+i-2}\}}$ は偽になる．

□

次の補題 4.4 で一般の (n,k)-合意問題の障害論理式を示す．

補題 4.4. 次の論理式

$$\Phi\equiv\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}\neg p_{a_i,i}\right)\vee\left(\bigvee_{i=1}^{k}\left(\bigvee_{\substack{B\subset A\\|B|=i}}\Psi^i_B\right)\right)$$

は $I[\mathscr{T}]$ の任意のファセットで真になり，$I[IS]$ のあるファセットで偽になる．

証明. 次の２つを示せば十分である．

(1) $I[IS]$ のファセット $Z=\{\langle a_i,(i,012\cdots n-1)\rangle\mid i\in\{0,1,...,n-1\}\}$ において，Φ は偽になる．

(2) $I[\mathscr{T}]$ の任意のファセットで Φ は真になる．

まず，(1) $I[IS],Z\not\models\Phi$ を示す．$\bigvee_{i=0}^{n-1}\neg p_{a_i,i}$ と $\bigvee_{i=1}^{k}\left(\bigvee_{\substack{B\subset A\\|B|=i}}\Psi^i_B\right)$ が Z において偽になることを示す．

- Z において，各エージェント a_i の入力値は i なので $\bigvee_{i=0}^{n-1}\neg p_{a_i,i}$ は偽になる．
- 任意の $m\in\{1,2,...,k\}$ に対して，$\bigvee_{\substack{B\subset A\\|B|=m}}\Psi^m_B$ が偽になることを示す．B を大きさが m であるような，A の任意の部分集合とする．Z において

$$\Psi^m_B\equiv D_B\left\{\left(\bigvee_{a_i\in A\setminus B}\neg p_{a_i,i}\right)\vee\left(\bigvee_{a_i\in A\setminus B}K_{a_i}\left(\bigvee_{j\in\{i|a_i\in B\}}P_j\right)\right)\vee\left(\bigvee_{i=m+1}^{k}\left(\bigvee_{\substack{E\subset A\setminus B\\|E|=i-m}}\Psi^i_{B\cup E}\right)\right)\right\}$$

が偽になることを示せばよい．$c_1=A\setminus B,c_2=B$ とおく．補題 4.3 より，ファセット $(c_1,c_2)^{012\cdots n-1}$ において，$\left(\bigvee_{a_i\in A\setminus B}\neg p_{a_i,i}\right)\vee\left(\bigvee_{a_i\in A\setminus B}K_{a_i}\left(\bigvee_{j\in\{i|a_i\in B\}}P_j\right)\right)\vee\left(\bigvee_{i=m+1}^{n-1}\left(\bigvee_{\substack{E\subset A\setminus B\\|E|=i-m}}\Psi^{(n,i)}_{B\cup E}\right)\right)$ が偽になる．$\Psi^{(n,i)}_{B\cup E}$ の定義より，この時 $\left(\bigvee_{a_i\in A\setminus B}\neg p_{a_i,i}\right)\vee\left(\bigvee_{a_i\in A\setminus B}K_{a_i}\left(\bigvee_{j\in\{i|a_i\in B\}}P_j\right)\right)$ $\vee\left(\bigvee_{i=m+1}^{k}\left(\bigvee_{\substack{E\subset A\setminus B\\|E|=i-m}}\Psi^i_{B\cup E}\right)\right)$ が偽になる．Z はファセット $(c_1,c_2)^{012\cdots n-1}$ と $c_2=B$ の元で関係しているので，Z において Ψ^m_B が偽になることが従う．

次に，(2) $I[\mathscr{T}]$ の任意のファセットで Φ は真になることを示す．各エージェント a_i の入力が i でないファセットにおいて $\bigvee_{i=0}^{n-1} \neg p_{a_i,i}$ が真になる．

あとは各エージェント a_i の入力が i であるようなファセットにおいて $\bigvee_{i=1}^{k}\left(\bigvee_{\substack{B\subset A\\|B|=i}} \Psi_B^i\right)$ が真になることを示せばよい．これは，ファセットが含むサイクル集合の大きさに関する帰納法による．すなわち，大きさ $k+1-l$（$1\leq l\leq k$）のサイクル集合を含むファセットにおいて $\bigvee_{\substack{B\subset A\\|B|=k+1-l}} \Psi_B^{k+1-l}$ が真になることを，l に関する帰納法で示す.

- $l=1$ の場合を示す．大きさ k のサイクル集合を含むファセットにおいて $\bigvee_{\substack{B\subset A\\|B|=k}} \Psi_B^k$ が真になることを示せばよい．対称性より $\{a_0,a_1,...,a_{k-1}\}$ がサイクル集合をなす時を考えれば十分である．この時

$$\Psi^k_{a_0,a_1,...,a_{k-1}} \equiv D_{a_0,a_1,...,a_{k-1}}\left\{\left(\bigvee_{i=k}^{n-1} \neg p_{a_i,i}\right) \vee \left(\bigvee_{i=k}^{n-1} K_{a_i}\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} P_i\right)\right)\right\}$$

  が真になる．なぜなら，$\{a_0,a_1,...,a_{k-1}\}$ がサイクル集合をなす任意のファセットにおいて，$a_0,a_1,...,a_{k-1}$ の出力の集合は $\{0,1,...,k-1\}$ であり，出力される値は高々k 種類であることから $a_k,a_{k+1},...,a_{n-1}$ は必ず $\{0,1,...,k-1\}$ の元を出力する．すなわち $\bigvee_{i=k}^{n-1} K_{a_i}\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} P_i\right)$ が真になる.

- $l=1,2,...,m$（$1\leq m\leq k-1$）の場合を仮定して，$l=m+1$ の場合を示す．大きさ $k-m$ のサイクル集合を含むファセットにおいて $\bigvee_{\substack{B\subset A\\|B|=k-m}} \Psi_B^{k-m}$ が真になることを示す．対称性より $\{a_0,a_1,...,a_{k-m-1}\}$ がサイクル集合をなす時を考えれば十分である．この時

$$\begin{aligned}\Psi^{k-m}_{a_0,a_1,...,a_{k-m-1}} \equiv D_{a_0,a_1,...,a_{k-m-1}}&\left\{\left(\bigvee_{i=k-m}^{n-1} \neg p_{a_i,i}\right) \vee \left(\bigvee_{i=k-m}^{n-1} K_{a_i}\left(\bigvee_{j=0}^{k-m-1} P_j\right)\right)\right.\\ &\left.\vee\left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{\substack{E\subset\{a_{k-m},a_{k-m+1},...,a_k\}\\|E|=i}} \Psi^{k-m+i}_{\{a_0,...,a_{k-m-1}\}\cup E}\right)\right)\right\}\end{aligned}$$

  が真になることを示す．$a_0,a_1,...,a_{k-m-1}$ がサイクル集合をなす任意のファセットで $\left(\bigvee_{i=k-m}^{n-1}\neg p_{a_i,i}\right) \vee \left(\bigvee_{i=k-m}^{n-1} K_{a_i}\left(\bigvee_{j=0}^{k-m-1} P_j\right)\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{\substack{E\subset\{a_{k-m},a_{k-m+1},...,a_k\}\\|E|=i}} \Psi^{k-m+i}_{\{a_0,...,a_{k-m-1}\}\cup E}\right)\right)$ が真になることを示せばよい.

  ある $j\in\{k-m,k-m+1,...,n-1\}$ に対して，a_j の入力が j でないファセットでは $\bigvee_{i=k-m}^{n-1}\neg p_{a_i,i}$ が真になる．よって以下では任意の $j\in\{k-m,k-m+1,...,n-1\}$ に対して，a_j の入力が j である場合を考える

  - $a_{k-m},a_{k-m+1},...,a_{n-1}$ のうち，少なくとも 1 つのエージェントが，サイクル集合の元 $a_0,a_1,...,a_{k-m-1}$ の入力を出力するとき，$\bigvee_{j=k-m}^{n-1} K_{a_j}\left(\bigvee_{i=0}^{k-m-1} P_i\right)$ が真になる.
  - $a_{k-m},a_{k-m+1},...,a_{n-1}$ がサイクル集合の元 $a_0,a_1,...,a_{k-m-1}$ の入力を出力しないとき，$a_{k-m},a_{k-m+1},...,a_{n-1}$ の中で大きさ r（$1\leq r\leq m$）のサイクル集合が必ず作られる．この時，それらと $a_0,a_1,...,a_{k-m-1}$ を合わせて，大きさ $k-m+r$ のサイクル集合が作れる．この時，帰納法の仮定から $\bigvee_{\substack{B\subset A\\|B|=k-m+r}} \Psi_B^{k-m+r}$ が真になる.

以上より，帰納法から結論を得る． □

補題 4.4 より Φ が (n,k)-合意問題に対する障害論理式と分かるので，命題 4.1 より結論が得られる.

定理 4.5. (n,k)-合意問題 $\mathscr{T}$ は IS では解けない.

よって，補題 4.4 の $n=k+1$ の場合を考えることで，$\left(\bigvee_{i=0}^{k} \neg p_{a_i,i}\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{k}\left(\bigvee_{\substack{B\subset A\\ |B|=i}} \Psi_B^i\right)\right)$ が k-合意問題に対する障害論理式と分かり，その不可解性が従う．

系 **4.6.** k-合意問題 $\mathscr{T}$ は IS では解けない．

謝辞

本稿を執筆するにあたり，終始ご指導いただいた指導教員の西村進先生に深謝いたします．

参考文献

[1] Elizabeth Borowsky and Eli Gafni. Generalized FLP impossibility result for t-resilient asynchronous computations. In *Proceedings of the Twenty-fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '93, pp. 91–100. ACM, 1993.

[2] Hans van Ditmarsch, Wiebe van der Hoek, and Barteld Kooi. *Dynamic Epistemic Logic*. Springer, 2007.

[3] Eric Goubault, Marijana Lazic, Jérémy Ledent, and Sergio Rajsbaum. A dynamic epistemic logic analysis of the equality negation task. Technical report, 2019.

[4] Éric Goubault, Jérémy Ledent, and Sergio Rajsbaum. A simplicial complex model for dynamic epistemic logic to study distributed task computability. In Proceedings Ninth International Symposium on *Games, Automata, Logics, and Formal Verification*, Vol. 277 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pp. 73–87, 2018.

[5] Eric Goubault and Sergio Rajsbaum. Models of fault-tolerant distributed computation via dynamic epistemic logic. Technical report, 2017.

[6] Eric Goubault and Sergio Rajsbaum. A simplicial complex model of dynamic epistemic logic for fault-tolerant distributed computing. Technical report, 2017.

[7] Rachid Guerraoui and Petr Kuznetsov. *Algorithms For Concurrent Systems*. EPFL Press, 2018.

[8] Maurice Herlihy, Dmitry Kozlov, and Sergio Rajsbaum. *Distributed Computing Through Combinatorial Topology*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2013.

[9] Maurice Herlihy and Nir Shavit. The topological structure of asynchronous computability. *J. ACM*, Vol. 46, No. 6, pp. 858–923, November 1999.

[10] Michael Saks and Fotios Zaharoglou. Wait-free k-set agreement is impossible: The topology of public knowledge. *SIAM J. Comput.*, Vol. 29, No. 5, pp. 1449–1483, 2000.