Mackey 2-functors, Mackey 2-motives, and crossed Burnside rings

近畿大学・理工学部理学科　　小田 文仁
Fumihito Oda
Department of Mathematics,
Kindai University

本稿は，竹ヶ原裕元氏，吉田知行氏との共同研究 [OTY] に基づく報告である．

Mackey 2-関手は亜群 (groupoid) の 2-圏から加法圏 (2-圏) への 2-関手である．2020 年に Balmer, Dell'Ambrogio 両氏の手になる Mackey 2-関手のテキストが出版された ([BD20])．Mackey 2-関手は有限群の線形表現圏 ([BD20, 4.1.4])，導来圏 ([BD20, 4.1.5])，安定加群圏 ([BD20, 4.2.6])，同変安定ホモトピー圏 ([BD20, 4.3.8])，同変 Kasparov 圏 ([BD20, 4.3.9])，Mackey 関手の圏 ([BD20, 7.3.9]) 等，多くの例をもつ．[BD20] の一つの主題は，Mackey 2-関手のモチヴィック分解 (motivic decomposition) が，斜バーンサイド環 ([Yo91, OY01, Bo03b]) の分解として与えられるという事実である ([BD20, 7.5.4])．より具体的に述べるならば，Mackey 2-関手 $\mathcal{M}$ の有限群 (より一般に亜群) G に対する像として与えられる加法圏 $\mathcal{M}(G)$ の分解と G の斜バーンサイド環の分解との間に一対一対応が存在するという結果である．Mackey 2-関手と斜バーンサイド環は任意の可換環上で定義可能である．本稿では有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上で G の斜バーンサイド環の原始べき等元を与え (Theorem 4.1)，それと Balmer-Dell'Ambrogio 理論を用いて $\mathbb{Z}$ 上で $\mathcal{M}(G)$ の分解が得られるという事実 (Corollary 4.3) を述べる．斜バーンサイド環の原始べき等元について十分大きい標数 0 の体係数の場合は [OY01] で，正標数の体係数の場合は [Bo03b] でそれぞれ考察されている．本稿では群は有限群とする．

講演と本原稿作成には，三角圏を中心にたくさんの例を用いて 2-圏までにも及ぶ中岡宏行氏による [Na15]，日本語による本格的な 2-圏論をカヴァーしている浅芝秀人氏による [As19] がとても参考になりました．例年とは異なる環境の中で行われた本研究集会研究代表者の田邊顕一朗氏をはじめ，すべての関係者に感謝を申し上げます．

1 Mackey 2-functors and crossed Burnside rings

本節では，Mackey 2-関手と斜バーンサイド環の関わりを [BD20] に基づいて述べる．なお，用語や記号の詳細は [BD20] を参照されたい．

以下が Mackey 2-関手の定義である．

Definition 1.1. [BD20, 1.1.7] A **Mackey 2-functor** is a strict 2-functor

$$\mathcal{M} : \mathsf{gpd}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{ADD}$$

from finite groupoids to additive categories which satisfies the following axioms:

Mack 1 *Additivity* : For every finite family $\{G_c\}_{c\in C}$ in gpd, the natural functor

$$(\mathrm{incl}_c^*)_{c\in C} : \mathcal{M}(\coprod_{d\in C} G_d) \to \prod_{c\in C} \mathcal{M}(G_c)$$

is an equivalence, where $\mathrm{incl}_c : G_c \rightarrowtail \coprod_d G_d$ is the inclusion for all $c \in C$.

Mack 2 *Induction and coinduction* : For every faithful functor $i : H \rightarrowtail G$, the restriction functor $i^* : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(H)$ admits a left adjoint $i_!$ and a right adjoint i_*:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(G) \arrow[d, "i^*"] \\ \mathcal{M}(H) \arrow[u, bend left=60, "i_!"] \arrow[u, bend right=60, "i_*"'] \end{tikzcd}$$

Mack 3 *Base-change formulas* : For every iso-comma square of finite groupoids as in Mack 2 in which i and (therefore) q are faithful

$$\begin{tikzcd} & (i/u) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ H \arrow[dr, "i"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\Gamma}{\Longrightarrow}}"] & & K \arrow[dl, "u"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

we have two isomorphisms

$$q_! \circ p^* \underset{\gamma_!}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} u^* \circ i_! \quad \text{and} \quad u^* \circ i_* \underset{(\gamma^{-1})_*}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} q_* \circ p^*$$

given by the left mate $\gamma_!$ of $\gamma^* : p^*i^* \Rightarrow q^*u^*$ and the right mate $(\gamma^{-1})_*$ of $(\gamma^{-1})^* : q^*u^* \Rightarrow p^*i^*$.

Mack 4 For every faithful i, there exists an isomorphism

$$i_! \cong i_*$$

between some (hence any) left and right adjoints of i^* given in (Mack 2) .

以下のような Mackey 2-関手の例があげられている.

Example 1.2. G は群, $\boldsymbol{k}$ は可換環とする.

- Usual $\boldsymbol{k}$-linear representations $\mathcal{M}(G) = \mathbf{Mod}(\boldsymbol{k}G)$ in classical representation theory over a field $\boldsymbol{k}$.
- Derived categories $\mathcal{M}(G) = \mathrm{D}(\boldsymbol{k}G)$.
- Stable module categories $\mathcal{M}(G) = \mathrm{Stab}(\boldsymbol{k}G)$.
- Equivariant stable homotopy categories $\mathcal{M}(G) = \mathrm{SH}(G)$ in equivariant homotopy theory.
- Equivariant Kasparov categories $\mathcal{M}(G) = \mathrm{KK}(G)$ of G-C^*-algebras in noncommutative geometry.
- Abelian categories of ordinary Mackey functors $\mathcal{M}(G) = \mathrm{Mack}_{\boldsymbol{k}}(G)$.

以下は, Mackey 2-関手 $\mathcal{M}$ の群 G での加法圏 $\mathcal{M}(G)$ の分解と G の斜バーンサイド環との関わりを示す命題である.

Proposition 1.3 ([BD20, 7.5.1])**.** *Let* $\mathcal{M} : \mathbb{G}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{ADD}_{\mathrm{ic}}$ *be a Mackey* 2*-functor and consider* $\widehat{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}\widehat{\mathbf{Span}} \to \mathsf{ADD}_{\mathrm{ic}}$ *the associated realization of Mackey* 2*-motives via* $\mathcal{M}$*. Then* $\widehat{\mathcal{M}}$ *induces ring homomorphisms for every groupoid* $G \in \mathbb{G}_0$

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Z}\widehat{\mathbf{Span}}(\mathbb{G};\mathbb{J})(G,G)}(\mathrm{Id}_G) \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} \mathrm{End}_{\mathrm{Fun}_+(\mathcal{M}(G),\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}(G)})$$

between rings of endomorphisms of the identity 1*-cells. In particular, precomposition with the isomorphism* $\sigma^{\mathrm{c}} : \mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}\widehat{\mathbf{Span}}}(G,G)(\mathrm{Id}_G)$ *yields a ring homomorphism*

$$\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}\sigma^{\mathrm{c}}} \mathrm{End}_{\mathrm{Fun}_+(\mathcal{M}(G),\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}(G)}). \tag{7.5.2}$$

以下は, Mackey 2-関手 $\mathcal{M}$ の群 G での加法圏 $\mathcal{M}(G)$ の分解と G の斜バーンサイド環の分解の関わりを示す定理である.

Theorem 1.4 ([BD20, 7.5.4])**.** *With notation as in Proposition 1.3, any ring decomposition*

$$\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) \cong B_1 \times \cdots \times B_n$$

yields a corresponding decomposition of the additive category $\mathcal{M}(G)$ *as*

$$\mathcal{M}(G) \cong \mathcal{N}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_n$$

in such a way that for every $i \neq j$*, the ring* B_i *acts as zero on* $\mathcal{N}_j$ *and acts on* $\mathcal{N}_i$ *via the homomorpshim* $\widehat{\mathcal{M}}\sigma^{\mathrm{c}}$ *of (7.5.2).*

2 Crossed Burnside ring and Burnside ring

この節では斜バーンサイド環の基本事項を思い出す [Yo91, OY01, Bo02, Bo03a, Bo03b]. 群 G 自身を共役の作用で G-集合とみなしたものを G^c とかく．G^c 上の G-集合の圏の直和とテンソル関に関する Grothendieck ring

$$\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) := K_0(G\text{-}\mathbf{set}/G^c, \sqcup, \otimes)$$

を G の**斜バーンサイド環** (crossed Burnsde ring of G) という．$\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G)$ の和と積は余積 (非交和) と圏 G-$\mathbf{set}/G^c$ 上のモノイダル構造

$$(X \stackrel{a}{\to} G^c) \otimes (Y \stackrel{b}{\to} G^c) := (X \times Y \stackrel{a\times b}{\to} G^c \times G^c \stackrel{\cdot}{\to} G^c)$$

により引き起こされる．非アーベル群 G に対してさえも自然同型

$$(X, a) \otimes (Y, b) \stackrel{\sim}{\to} (Y, b) \otimes (X, a), \quad (x, y) \mapsto (a(x) \cdot y, x)$$

により乗法は可換であることに注意する．斜バーンサイド環 $\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G)$ は $\mathbb{Z}$ 加群 (アーベル群) としての基底

$$\{[H, a]_G \mid H \leq G,\, a \in C_G(H)\}$$

ただし，$[H, a]_G$は 対 (H, a) $(H \leq G,\, a \in C_G(H))$ 全体の集合に

$$(H, a) \sim (K, b) \Leftrightarrow \exists g \in G\, s.t.\, H = {}^gK \text{ and } a = {}^gb$$

で定まる同値関係の (H, a) を含む同値類，をもつ．

基底の元の間の積は

$$[K, b]_G \cdot [H, a]_G = \sum_{KgH \in [K\backslash G/H]} [K \cap {}^gH, b \cdot {}^ga]_G$$

ただし，g は両側剰余類 $K\backslash G/H$ の完全代表系を動く，で定義される．同型

$$\sigma^{\mathrm{c}} : \mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\boldsymbol{k}}(G) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}\widehat{\mathbf{Span}}}(\mathrm{Id}_G)$$

は斜バーンサイド環の基底の元 $[H, a]_G$ を

$$\sigma^c([H, a]_G) \quad = \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, equal] & G \arrow[d, equal] \\ G \arrow[d, equal] & H \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "i"] \arrow[u, "i"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dl, phantom, "\Searrow \gamma_a"] & G \arrow[d, equal] \\ G \arrow[r, equal] & G \arrow[r, equal] & G \end{tikzcd}$$

ただし，$i : H \to G$ は埋め込み，$\gamma_a : i \Rightarrow i$ は自然変換 γ の $a \in G$ 成分，他の 3 つの正方形は可換となる，図式へうつす．

G の通常**バーンサイド環** $\Omega(G)$ は有限 G 集合の圏の Grothendieck 群

$$\Omega(G) := K_0(G\text{-}\mathbf{set}, \sqcup, \times)$$

である．忘却加法テンソル関手 G-$\mathbf{set}/G^c \to G$-$\mathbf{set}$, $(a : X \to G^c) \mapsto X$ は全射環準同型写像 $\alpha : \mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) \to \Omega(G)$ を誘導する．

3 Primitive idempotents of Burnside ring and group ring

G のゴースト環 (有理整数環 $\mathbb{Z}$ の直積環) を

$$\widetilde{\Omega}(G) = \prod_{(H) \in C(G)} \mathbb{Z},$$

有限 G-集合 X に H 固定点の個数を対応させることで与えられる単射環準同型写像を

$$\varphi : \Omega(G) \to \widetilde{\Omega}(G) = \prod_{(H) \in C(G)} \mathbb{Z} : [X] \mapsto (|X^H|)_{(H)\in C(G)},$$

とする．

H に対応する $\Omega(G)$ の原始べき等元を e_H とする．群 G はその交換子群と等しいとき, すなわち, $G = [G, G]$ を満たすとき完全群と呼ばれる．G の剰余群が可解群となるような G の最小の正規部分群を G^∞，G の完全部分群たちの G 共役類全体の集合を $C^\infty(G)$ とする．

以下の定理は G のバーンサイド環の原始べき等元による G の可解性に関する特徴付けである．

Theorem 3.1 ([Dr69])**.** *The primitive idempotents in* $\Omega(G)$ *are of the form*

$$\sum_{H^\infty = J,\,(H)\in C(G)} e_H \quad ((J) \in C^\infty(G)).$$

Proposition 3.2 ([MS02])**.** *The integral group ring* $\mathbb{Z}G$ *contains only trivial idempotents.*

G の中心化群の群環たちの直積環 $\prod_{(H)\in C(G)} \mathbb{Z}C_G(H)$ への G の作用

$$\xi^g := \left(\sum_{s \in C_G(H)} \xi({}^gH, {}^gs)s \right)_H, \ g \in G,$$

ただし

$$\xi = \left(\sum_{s \in C_G(H)} \xi(H, s)s \right)_H \in \prod_{(H)\in C(G)} \mathbb{Z}C_G(H),$$

に関する G-固定点の集合

$$\widetilde{\mathrm{B}}^c(G) := \left\{ \left(\sum_{s \in C_G(H)} \xi(H, s)s \right)_H \middle| \xi({}^gH, {}^gs) = \xi(H, s),\, \forall g \in G \right\}$$

を考える．ρ を

$$\rho : \mathrm{B}^c(G) \to \widetilde{\mathrm{B}}^c(G) : [(G/D)_s] \longmapsto \left(\sum_{gD \in (G/D)^H} {}^gs \right)_{H \le G},$$

$\alpha([(G/D)_s]) = [G/D]$ で与えられる写像を

$$\alpha : \mathrm{B}^c(G) \to \Omega(G),$$

$\tilde{\alpha}((x_H)_{H\le G}) = (\varepsilon_H(x_H))_{(H)}$ で与えられる写像を

$$\tilde{\alpha} : \widetilde{\mathrm{B}}^c(G) \to \widetilde{\Omega}(G),$$

ただし,

$$\varepsilon_H : \mathbb{Z}C_G(H) \to \mathbb{Z} : \sum_h a_h h \mapsto \sum_h a_h$$

とする．さらに，$\iota([G/D]) = [(G/D)_e]$ で与えられる写像を

$$\iota : \Omega(G) \to \mathrm{B}^c(G),$$

$\tilde{\iota}((y_H)_{(H)}) = (\widetilde{y_H})_{H\le G}$，ただし，$\widetilde{y_H} := y_K$ for $K \in (H)$ で与えられる写像を

$$\tilde{\iota} : \widetilde{\Omega}(G) \to \widetilde{\mathrm{B}}^c(G)$$

とする．このとき，二つの可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) \arrow[r, tail, "\rho"] \arrow[d, "\alpha"'] & \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{c}}(G) \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] \\ \Omega(G) \arrow[r, tail, "\varphi"'] & \widetilde{\Omega}(G), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) \arrow[r, tail, "\rho"] & \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{c}}(G) \\ \Omega(G) \arrow[r, tail, "\varphi"'] \arrow[u, "\iota"] & \widetilde{\Omega}(G) \arrow[u, "\tilde{\iota}"'] \end{tikzcd}$$

と，次の補題を得る．

Lemma 3.3. *Let* $x \in \mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G)$*. If* $\rho(x) = \tilde{\iota}(y)$ *for some* $y \in \widetilde{\Omega}(G)$*, then* $\iota \circ \alpha(x) = x$*.*

4 Main results

本節では主結果を述べる．可換環 R のすべての原始べき等元の集合を $\mathrm{P}(R)$ とする．Proposition 3.2 と Lemma 3.3 を用いることにより $\mathrm{P}(\Omega(G))$ と $\mathrm{P}(\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G))$ との間の全単射が得られる．

Theorem 4.1 ([OTY])**.** *There is a one-one corespondence between* $\mathrm{P}(\Omega(G))$ *and* $\mathrm{P}(\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G))$ *induced by* $\alpha : \mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) \to \Omega(G)$*.*

Theorem 3.1 で与えられる $\Omega(G)$ の原始べき等元を $\tilde{f}_J$，ただし，$J \leq G$ は完全部分群，Theorem 4.1 で与えられる $\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G)$ の原始べき等元 $\alpha^{-1}(\tilde{f}_J)$ を f_J とする．このとき，次のように $\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G)$ の分解を得る．

Corollary 4.2 ([OTY])**.** *A decomposition*

$$\mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G) = \prod_{(J) \in C^{\infty}(G)} f_J \mathrm{B}^{\mathrm{c}}(G)$$

into a direct product of ideals each of which is indecomposable as an ideal.

Corollary 4.2 とモチヴィック分解 [BD20, in Proof of 7.5.4]

$$G \simeq \bigoplus_{(J) \in C^{\infty}(G)} (G, f_J)$$

により，以下の圏同値を得る．

Corollary 4.3 ([OTY])**.** *Let* G *be a group and let* $\mathcal{M}$ *be a Mackey* 2*-functor. Then we obtain an equivalence of additive categories*

$$\mathcal{M}(G) \simeq \bigoplus_{(J) \in C^{\infty}(G)} \widehat{\mathcal{M}}(G, f_J).$$

参考文献

[As19] 浅芝秀人, 圏と表現論: 2-圏論的被覆理論を中心に, (SGC ライブラリ), サイエンス社, 2019.

[Bo03] S. Bouc, The p-blocks of the Mackey algebra. Algebr. Represent. Theory, 6(5):515-543, 2003.

[BD20] P. Balmer, I. Dell'Ambrogio, Mackey 2-Functors and Mackey 2-Motives (Ems Monographs in Mathematics), 2020.

[Bo02] S. Bouc. Green functors, crossed G-monoids, and Hochschild constructions. AMA Algebra Montp. Announc. 2002, Paper 1, 7 pp.

[Bo03a] S. Bouc. Hochschild constructions for Green functors. Comm. Algebra 31 (2003), no. 1, 403 – 436.

[Bo03b] S. Bouc. The p-blocks of the Mackey algebra. Algebr. Represent. Theory, 6(5):515 – 543, 2003.

[Dr69] A. Dress. A characterisation of solvable groups. Math. Z., 110:213–217, 1969.

[MS02] C. P. Milies, S. K. Sehgal. An introduction to group rings. Algebra and Applications, 1. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[Na15] 中岡宏行, 圏論の技法, 日本評論社, 2015.
[OY01] F. Oda, T. Yoshida. Crossed Burnside rings. I. The fundamental theorem. J. Algebra, 236(1):29–79, 2001.
[OTY] F. Oda, Y. Takegahara, T. Yoshida. Idempotents of a crossed Burnside ring. preprint.
[Yo91] T. Yoshida. Crossed G-sets and crossed Burnside rings. Surikaisekikenkyusho Kokyuroku, (991) : 1–15, 1997. Group theory and combinatorial mathematics (Kyoto, 1996).