原田予想 II の解決に向けて

*安部　利之（愛媛大学)[1]
Toshiyuki Abe (Ehime University)
千吉良　直紀（熊本大学)[2]
Naoki Chigira (Kumamoto University)

1　序

有限群の研究において, 共役類及び既約表現 (既約指標) はその構造を調べる上で必要不可欠な概念である. 共役類は, 共役の作用による軌道のことであるが, それは群を軌道の 1 点の中心化部分群で割った商集合と自然に対応している. また群の表現は, ある体 (この報告では複素数体 $\mathbb{C}$) 上の一般線形群への準同型として得られるが, 体が標数 0 の代数的閉体の場合は任意の表現が, 既約表現の直和で与えられる.

原田予想 II はこれら二つの概念には, 次のような関係があるという予想である.

予想 1.1. *G を有限群, $1 \in G$ を G の単位元, $K_1, \cdots, K_s$ を全ての共役類, $\chi_1, \cdots, \chi_s$ を全ての複素既約指標とする. このとき,*

$$\frac{|K_1| \cdots |K_s|}{\chi_1(1) \cdots \chi_s(1)} \in \mathbb{Z}.$$

本報告では, この予想に関し, 三つの考察を紹介したい. 一つ目は不変量 ω_G について, 二つ目は群 G に付随する格子 $L(G)$ について, 最後は Frobenius 群が満たしている性質をもつ群とその正規部分群の組についての考察である. 本発表後に, ブレイクアウトルームにて同室頂いた先生方, 院生の皆さんと原田予想 I, II に関する情報交換ができたことに非常に感謝する. この場を借りてお礼申し上げたい.

2　記号

本報告全体を通して, G は有限群, G の単位元は 1 と表し, 自明な既約指標を 1_G と表す. s は G の共役類の個数 (= 既約指標の個数), $K_1, \cdots, K_s$ は G のすべての共役類, $\chi_1, \cdots, \chi_s$ は全ての複素既約指標とする. 更に, 各 i に対し, 代表 $g_i \in K_i$ を一つ選び, 固定する. このとき, $C_i = C_G(g_i)$ を g_i の G における中心化群とする. 写像

$$C_i \backslash G \to K_i, \quad C_i g \mapsto g_i^g := g^{-1} g_i g$$

は全単射で, $|G| = |C_i||K_i|$ が成り立つ. この等式は, 行列

$$K = \mathrm{diag}(|K_1|, \cdots, |K_s|), \quad C = \mathrm{diag}(|C_1|, \cdots, |C_s|)$$

を用いて, $KC = |G|E_s$ とも表される. ここで E_s は s 次の単位行列である.

行列

$$X = \big(\chi_i(g_j)\big)_{1 \le i,j \le s}$$

[1]本研究は科研費基盤研究 (C) 19K03403 の助成を受けたものである.
[2]本研究は科研費基盤研究 (C) 19K03405 の助成を受けたものである.

を G の指標表と呼ぶ．指標表については, 次の関係式がよく知られている (指標の第 2 直交関係):

$$ {}^t\overline{X}X = C. \tag{2.1} $$

G の $\mathbb{C}$ 上の群環を $\mathbb{C}G$ で表す:

$$ \mathbb{C}G = \oplus_{g \in G} \mathbb{C}g. $$

その中心を $Z(\mathbb{C}G)$ と表す．つまり

$$ Z(\mathbb{C}G) = \{u \in \mathbb{C}G | ug = gu \text{ for } g \in G\} $$

である．このとき, 各共役類の元の和

$$ Z_i = \sum_{g \in K_i} g $$

は $Z(\mathbb{C}G)$ の元で, $\mathcal{B}_z = (Z_1, \cdots, Z_s)$ は $Z(\mathbb{C}G)$ の基底をなす．ここで組 $(Z_1, \cdots, Z_s)$ はベクトルの順序も考慮した順序対を表す．また各 i について,

$$ e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{a=1}^{s} \chi_i(g_a^{-1}) g_a $$

で定まる $\mathbb{C}G$ の元を考えると, $\mathcal{B}_e = (e_1, \cdots, e_s)$ もまた $Z(\mathbb{C}G)$ の基底をなすことが知られている．この元は既約指標 χ_i に対応する $\mathbb{C}G$ のべき等元である．

3　原田予想 II

表題の原田予想 II とは, 共役類の位数の積

$$ k(G) := |K_1| \cdots |K_s| $$

と既約次数 $\chi_i(1)$ 達の積

$$ d(G) := \chi_1(1) \cdots \chi_s(1) $$

について,

$$ h(G) := k(G)/d(G) \in \mathbb{Z} $$

が成り立つという予想である．この量 $k(G)$, $d(G)$ は対角行列 K, D の行列式であるので, 原田予想は行列 KD^{-1} の行列式が整数であると主張していることがわかる．

注意 3.1. 原田予想 II は, 2015 年に台湾で行われた Taidon Conference で原田先生により提案されている．また [Ha] に, 原田予想 I 及び II についてその考察がまとめられている．

以下, 有限群 G の条件 (H) として,

$$ \text{条件 (H)} : h(G) \in \mathbb{Z} \text{ である.} $$

を考える．次の場合について, 条件 (H) が満たされていることが確認されている．

(1) G がアーベル群 (これは自明).

(2) G が二面体群 (直接計算).

(3) G が対称群または交代群 (飛田氏による, [Hi]).

(4) G が [ATLAS] にある単純群及びその極大部分群 (千吉良氏による).

しかし, 例えば, 「G の正規部分群 N と剰余群 G/N が条件 (H) を満たすならば, G も条件 (H) を満たす」という主張は未解決であるように, 部分群や商群の構造から G の構造を調べるという方法は今のところ成功していないので, 単純群に帰着するという手法も現段階では用いることができない.

4　不変量 ω_G

まず $\mathcal{A}$ を代数的整数全体のなす環とする. 任意の $\{1,\cdots,s\}$ の置換 $\sigma \in \mathrm{Sym}_s$ に対し, 指標表 X から $(1,\sigma(1))$-成分, $\cdots$, $(s,\sigma(s))$-成分を取り出し掛け合わせた積 $\chi_1(g_{\sigma(1)})\cdots\chi_s(g_{\sigma(s)})$ を考え, これらで生成される $\mathcal{A}$ のイデアル

$$\mathcal{A}_G = \langle \chi_1(g_{\sigma(1)})\cdots\chi_s(g_{\sigma(s)}) | \sigma \in \mathrm{Sym}_s \rangle_{\mathcal{A}}$$

を考える. 各 i に対し, $\chi_i(g^{-1}) = \overline{\chi_i(g)}$ であることから, $\mathcal{A}_G$ は複素共役でも不変であることがわかる.

まず行列式の定義より $\det X \in \mathcal{A}_G$ である. よって $\overline{\det X} \in \mathcal{A}_G$ であるが, (2.1) より, $c(G) := \det(C) = \det {}^t\bar{X} \det X \in \mathcal{A}_G$ であることがわかる. 特に $\mathcal{A}_G \cap \mathbb{Z} \neq 0$ は $\mathbb{Z}$ の 0 でないイデアルである. 従って, 自然数 ω_G で $\mathcal{A}_G \cap \mathbb{Z}$ を生成するものが存在する.

定理 4.1. *G を有限群とする. $\omega_G = 1$ ならば, G は条件 (H) を満たす.*

証明. まず, [JL, Cor.22.10] にあるように, G の任意の既約指標 χ_i と代表 $g_j \in G$ に対し,

$$\omega_{\chi_i}(g_j) := \frac{|K_j|\chi_i(g_j)}{\chi_i(1)} \in \mathcal{A}$$

である.

従って, 任意の $\sigma \in \mathrm{Sym}_s$ に対し,

$$\omega_{\chi_1}(g_{\sigma(1)})\cdots\omega_{\chi_s}(g_{\sigma(s)}) = h(G)\chi_1(g_{\sigma(1)})\cdots\chi_s(g_{\sigma(s)}) \in \mathcal{A}.$$

よって $h(G)\omega_G \in \mathcal{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. 特に $\omega_G = 1$ ならば, $h(G) \in \mathbb{Z}$ である. □

指標表を眺めると, うまく指標表の成分を選ぶことで, $\omega_G = 1$ であることがわかる場合がある. 講演では, $G = L_2(11)$ について $\omega_G = 1$ を確認したが, ここでは簡単な場合として, 5 次交代群 Alt_5 を考えてみる. 5 次交代群の指標表は

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & \alpha & \alpha^* \\ 3 & 0 & -1 & \alpha^* & \alpha \end{pmatrix}$$

$(\alpha = (1+\sqrt{5})/2,\ \alpha^* = (1-\sqrt{5})/2)$ である. $\alpha\alpha^* = -1$ なので, $\alpha^* = -\alpha^{-1}$. よって X の対角成分の積に $(\alpha^*)^2$ をかけると, 1 となるので, $\omega_G = 1$ であることがわかる.

5 p-群 G の ω_G

もう一つの例として, 非可換 2-群である二面体群 Dih_8 の指標表を見てみる:

$$X=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&-1&-1\\1&1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1&1\\2&-2&0&0&0\end{pmatrix}.$$

この場合, 第 5 行の成分が全て偶数なので, どのように $\sigma\in\mathrm{Sym}_5$ を選んでも, X の $(i,\sigma(i))$ 成分 $(1\le i\le 5)$ の積は $\mathcal{A}$ における 2 の倍数である. 従って, $2|\omega_G$ である (容易に $\omega_G=2$ がわかる).

実際に任意の非可換 p-群に対し, 次が成り立つ.

定理 5.1. *G が非可換 p-群であれば, ω_G は p で割り切れる.*

この定理の証明のために少し補題を準備する. 素数 p に対し, $\mathcal{A}_p$ を $\mathcal{A}$ の p を含む極大イデアルとする.

補題 5.2. [JL, Thm. 22.23] *p を素数とする. $g\in G$ に対し, g の p'-part を y とする. この時, 任意の指標 χ に対し, $\chi(g)\equiv\chi(y)\pmod{\mathcal{A}_p}$. 特に, g の位数が p の累乗であれば, $\chi(g)\equiv\chi(1)\pmod{\mathcal{A}_p}$ である.*

この補題を用いると次の補題が得られる.

補題 5.3. *p を素数とし, G を有限群とする.*

$$|\{i|\chi_i(1)\notin p\mathbb{Z}\}|<|\{i|g_i \text{ の位数は } p \text{ の累乗 }\}|$$

が成り立つと仮定すると, $\mathcal{A}_G\subset\mathcal{A}_p$ が成り立つ. 特に, $p|\omega_G$ である.

証明. $\sigma\in\mathrm{Sym}_s$ とする. 仮定より, $\chi_1(g_{\sigma(1)}),\cdots,\chi_s(g_{\sigma(s)})$ の中に, $g_{\sigma(j)}$ の位数が p の累乗であって, $p|\chi_j(1)$ であるような j が存在する. 補題 5.2 より, $\chi_j(g_{\sigma(j)})\equiv\chi_j(1)\equiv 0\pmod{\mathcal{A}_p}$. よって, $\chi_1(g_{\sigma(1)})\cdots\chi_s(g_{\sigma(s)})\in\mathcal{A}_p$. 従って $\mathcal{A}_G\subset\mathcal{A}_p$. これは $\omega_G\in\mathcal{A}_p\cap\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}$ であることを示している. □

定理 5.1 の証明. G を非可換 p-群とする. このとき,

$$|\{i|g_i \text{ の位数は } p \text{ の累乗 }\}|=s$$

である. 一方で, G は非可換なので, $p|\chi_i(1)$ を満たす i が少なくとも一つ存在する. 従って, $|\{i|\chi_i(1)\notin p\mathbb{Z}\}|=|\{i|\chi_i(1)=1\}|<s$ である. よって補題 5.3 より, $p|\omega_G$ である. □

このように p-群では $\omega_G=1$ とはならないので, この方針では原田予想 II が成立するかどうかの判断ができない.

6 群に付随する格子

群環 $\mathbb{C}G$ の中心 $Z(\mathbb{C}G)$ に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を

$$\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}_{Z(\mathbb{C}G)}xy, \quad x, y \in Z(\mathbb{C}G)$$

によって定義する．第 2 節で準備した $Z(\mathbb{C}G)$ の基底 $\mathcal{B}_z = (Z_1, \cdots, Z_s)$ を基とした, 自由 Abel 群 $L(G) = \langle Z_1, \cdots, Z_s\rangle_{\mathbb{Z}}$ を考える．このとき内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を制限することで, $L(G)$ は格子と考えられる．ここで $L(G)$ が整格子であることを確認しよう．まず Z_i は類和なので, 任意の i, j, k に対し,

$$Z_i Z_j = \sum_{k=1}^{s} a_{ij}^k Z_k$$

を満たす非負整数 a_{ij}^k (構造定数) が存在する． これは $Z(\mathbb{C}G)$ の基底 $\mathcal{B}_z$ に関する Z_i の右積の行列表示が $(a_{ij}^k)_{1\le j,k\le s}$ になることを意味している． またそのことから $\mathrm{Tr}_{Z(\mathbb{C}G)}Z_i = \sum_{m=1}^{s} a_{im}^m$ である．これは

$$\langle Z_i, Z_j\rangle = \sum_{k,m=1}^{s} a_{ij}^k a_{km}^m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$$

であること示している．このことから $L(G)$ は整格子であることがわかる．

次に, 格子 $L(G)$ の基 $\mathcal{B}_z$ に関するグラム行列 $\Gamma(G)$ を考えてみる．そのために $Z(\mathbb{C}G)$ の基底 $\mathcal{B}_e = (e_1, \cdots, e_s)$ を思い出す．類和 Z_i は G の元と可換であるので, Schur の補題から, 既約加群上に定数倍として作用する．実際, 指標 χ_j をもつ既約加群では, その定数は $\omega_{\chi_j}(g_i)$ である．一方で, 左正則加群 $\mathbb{C}G$ において, $e_j \in \mathbb{C}G$ は $\mathbb{C}G$ の χ_i を持つ既約部分加群の直和に属するので, $Z_i e_j = \omega_{\chi_j}(g_i)e_j$ が成り立つ．これは $Z(\mathbb{C}G)$ における Z_i の右積の基底 $\mathcal{B}_e$ に関する行列表示が対角行列

$$\mathrm{diag}(\omega_{\chi_1}(g_i), \cdots, \omega_{\chi_s}(g_i))$$

であることを意味している．従って,

$$\langle Z_i, Z_j\rangle = \mathrm{Tr}_{Z(\mathbb{C}G)}Z_i Z_j = \sum_{k=1}^{s} \omega_{\chi_k}(g_i)\omega_{\chi_k}(g_j).$$

ここで, $K_{\bar{i}} = K_i^{-1}$ によって, $\bar{i}$ を定めると, $\omega_{\chi_k}(g_{\bar{j}}) = \overline{\omega_{\chi_k}(g_j)}$ が成立する．よって

$$\begin{aligned}
\langle Z_i, Z_{\bar{j}}\rangle &= \sum_{k=1}^{s} \omega_{\chi_k}(g_i)\overline{\omega_{\chi_k}(g_j)} \\
&= \sum_{k=1}^{s} |K_i||K_{\bar{j}}| \frac{\chi_k(g_i)\overline{\chi_k(g_j)}}{\chi_k(1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{s} |K_i|\chi_k(g_i)\chi_k(1)^{-2}\overline{\chi_k(g_j)}|K_{\bar{j}}|.
\end{aligned}$$

$|K_j| = |K_{\bar{j}}|$ なので, これは 行列 $K\,{}^tXD^{-2}\overline{X}K$ の (i,j)-成分である. 従って, グラム行列 $\Gamma(G) = (\langle Z_i, Z_j\rangle)_{1\le i,j\le s}$ は, 行列 $R = (\delta_{i,\bar{j}})$ を考えると,

$$\Gamma(G) = K\,{}^tXD^{-2}\overline{X}KR$$

で与えられることがわかる. 以上より,

$$\det\Gamma(G) = |K|^2|D|^{-2}|X\,{}^t\overline{X}||R| = \pm h(G)^2c(G)$$

である. $L(G)$ は整格子なので, $\det\Gamma(G)$ は整数である. よって次の定理を得る.

定理 6.1. *G を有限群とする. G が条件 (H) を満たすための必要十分条件は $\det\Gamma(G)$ が $c(G)$ で割り切れることである.*

注意 6.2. 定理 6.1 は, 原田予想 II は「有限群の構造」のみで検証できることを主張している. 実際, Z_i たちは共役類和であり, それらの構造定数の計算も (原理的に) 表現論は用いない. そしてその構造定数を用いることで $\Gamma(G)$ が得られるので, その行列式の計算も (原理的に) 表現論を経由せずに可能であることがわかる. 原田予想 II は共役類と既約指標の不思議な関係を表す予想であるが, その検証の一つの方法として, 表現論を経由しない方法があることを示唆している.

定理 6.1 を用いて, 位数 $2n$ の二面体群 Dih_{2n} の条件 (H) を確認してみよう. 複雑な場合分けを避けるため, 最も簡単な $n = 2m-1$ が奇数で更に m が奇数の場合 ($n \equiv 1 \pmod 4$ の場合) を考える. Dih_{2n} の生成元として, 位数 n の元 σ, 位数 2 の元 τ で関係式は $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$ とする. 共役類は $K_i = \{\sigma^i, \sigma^{-i}\}$, $(i = 1, \cdots, m-1)$, $K_m = \{1\}$, $K_{m+1} = \{\sigma^i\tau | i = 0, \cdots, n-1\}$ とおく. 対応する類和 $Z_1, \cdots, Z_{m+1}$ に対し, Z_m は $Z(\mathbb{C}\mathrm{Dih}_{2n})$ の単位元で, $1 \le i < j \le m-1$ に対し,

$$Z_iZ_j = \begin{cases} Z_{i+j} + Z_{j-i} & i+j < m \\ Z_{j-i} + Z_{2m-1-i-j} & i+j \ge m \end{cases}$$

となる. また $1 \le i \le m-1$ に対し,

$$Z_i^2 = \begin{cases} 2Z_m + Z_{2i} & 2i < m \\ 2Z_m + Z_{2m-1-2i} & 2i > m \end{cases}.$$

更に, $Z_{m+1}Z_i = 2Z_{m+1}$ $(1 \le i \le m-1)$ であり,

$$Z_{m+1}^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i\right)^2 = n\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i = n\sum_{i=1}^{m}Z_i$$

である. これらより,

$$\mathrm{Tr}_{Z(\mathbb{C}\mathrm{Dih}_{2n})}(Z_i) = 3, \quad 1 \le i \le m-1,$$
$$\mathrm{Tr}_{Z(\mathbb{C}\mathrm{Dih}_{2n})}(Z_m) = m+1, \quad \mathrm{Tr}_{Z(\mathbb{C}\mathrm{Dih}_{2n})}(Z_{m+1}) = 0.$$

以上より,

$$\Gamma(\mathrm{Dih}_{2n}) = \begin{pmatrix} 2m+5 & 6 & \cdots & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 2m+5 & \cdots & 6 & 3 & 0 \\ \vdots & & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 6 & 6 & \cdots & 2m+5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2(2m-1)^2 \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式は計算できて, $\det \Gamma(\mathrm{Dih}_{2n}) = 4(2m-1)^{m+2}$ となることがわかる. また $c(G) = |C_1| \cdots |C_{m+1}| = n^{m-1} \cdot 2n \cdot 2 = 4(2m-1)^m$ となるので,

$$h(\mathrm{Dih}_{2n})^2 = (2m-1)^2 = n^2$$

つまり, $h(\mathrm{Dih}_{2n}) = n$ を得る.

注意 6.3. 交換子群 $(\mathrm{Dih}_{2n})' = \langle \sigma \rangle$ の位数は n なので, $h(\mathrm{Dih}_{2n})$ は $|(\mathrm{Dih}_{2n})'|$ で割り切れて, その商は 1 である.

7 Frobenius 群について

[Is] では, G が正規部分群 N で,

$$\text{条件 (F) : 任意の } 1 \neq x \in N \text{ に対し, } C_G(x) \subset N$$

が成り立つようなものが存在する状況を考えている. この条件 (F) を満たす正規部分群 N が存在するとき, G は Frobenius 群と呼ばれ, N はその Frobenius 核である ([Ko]). ここでは次を証明する.

定理 7.1. *G が条件 (F) を満たす正規部分群 N を持つとする. N 及び G/N が条件 (H) を満たすならば, G も満たす.*

$\pi : G \to G/N$ を自然な射影とする. G の共役類 $K_1 = \{1\}, K_2, \cdots, K_s$ を

$$K_1, \cdots, K_r \subset N, \quad K_{r+1}, \cdots, K_s \not\subset N$$

のように並べ替え,

$$k(G)_0 = |K_{r+1}| \cdots |K_s|, \quad k(G)_1 = |K_1| \cdots |K_r|$$

とおく. このとき $k(G) = k(G)_0 k(G)_1$ である.

まず $k(G)_0$ について考える. $r+1 \leq i \leq s$ に対し, $g_i \notin N$ である. 条件 (F) より, $N \to g_i^N, n \mapsto g_i^n$ は全単射なので, $g_i^n = (n^{-1} g_i n g_i^{-1}) g_i = (n^{-1} n^{g_i^{-1}}) g_i \in N g_i$ に注意すると, $g_i^N = N g_i$ となる. これは, $|K_i| = |N||\pi(K_i)|$ が成り立つことを表している. $\{\pi(1)\}, \pi(K_{r+1}), \cdots, \pi(K_s)$ が G/N の共役類の集合を与えるので,

$$k(G)_0 = |N|^{s-r} k(G/N)$$

が得られる.

一方, $i = 2, \cdots, r$ に対し, $L_i = g_i^N$ とおく. G/N の完全代表系 $\{\omega_1, \cdots, w_a\}$ を一つ固定すると, 各共役類 K_i は

$$K_i = \cup_{j=1}^a L_i^{w_j}$$

と分割される. 更に, $\{1\}, L_i^{w_j}$ $(i = 2, \cdots, r, j = 1, \cdots, a)$ が N の全ての共役類の集合となることも容易にわかる. したがって, $k(N) = (|L_2| \cdots |L_r|)^a$ であり, $|K_i| = a|L_i|$ より

$$k(G)_1 = a^{r-1}|L_2| \cdots |L_r| = a^{r-1}k(N)^{1/a}.$$

が得られる. まとめると,

$$k(G) = a^{r-1}|N|^{s-r}k(N)^{1/a}k(G/N).$$

が得られる.

次に既約指標 $\chi_1, \cdots, \chi_s$ を次のように並べ替える:

$$\begin{aligned} &\chi_1 = 1_G, \chi_2, \cdots, \chi_t: \quad \chi_i(N) = \{\chi_i(1)\}, \\ &\chi_{t+1}, \cdots, \chi_s: \quad \chi_i(N) \neq \{\chi_i(1)\}. \end{aligned}$$

このうち $\chi_1, \cdots, \chi_t$ は G/N の既約指標を誘導するので,

$$d(G)_0 := \chi_1(1) \cdots \chi_t(1)$$

とおけば, $d(G)_0 = d(G/N)$ である.

また $\chi_{t+1}, \cdots, \chi_s$ について, [Is, Thm 6.34] に次の定理が紹介されている.

定理 7.2. *G, N は条件 (F) を満たすとする.*

(1) 任意の N の既約指標 ϕ に対し, $\phi \neq 1_N$ であれば, $\{g \in G | \phi^g = \phi\} = N$ であり, ϕ の G への持ち上げ ϕ^G は G の既約指標である.

(2) 任意の G の既約指標 χ に対し, $\chi(N) \neq \{\chi(1)\}$ であれば, χ はある N の既約指標 ϕ を用いて $\chi = \phi^G$ と表される.

このように, 各既約指標 χ_{t+i} $(1 \leq i \leq s-t)$ に対し, ある N の既約指標 ϕ_i が存在し $\chi_{t+i} = \phi^G$ が成り立つ. そして, (1) より $\phi_i^{w_j} \neq \phi_i$ であるが, これらの持ち上げは全て χ_{t+i} に一致する.

以上から N の既約指標は 1_N と $\phi_i^{w_j}$ $(i = 1, \cdots, s-t, j = 1, \cdots, a)$ で得られるので

$$d(N) = \prod_{i=1}^{s-t} \prod_{j=1}^{a} \phi_i^{w_j}(1) = \prod_{i=1}^{s-t} \phi_i(1)^a.$$

よって,

$$d(G)_1 := \chi_{t+1}(1) \cdots \chi_s(1)$$

とおけば $\chi_1(1) = \phi_i^G(1) = |G/N|\phi_i(1) = a\phi_i(1)$ であることより,

$$d(G)_1 = a^{s-t} \prod_{i=1}^{s-t} \phi_i(1) = a^{s-t}(d(N))^{1/a}$$

が得られる. 従って, $d(G) = a^{s-t}d(N)^{1/a}d(G/N)$. 最後に, G/N の共役類の個数が $s-r+1$ で, G/N の既約指標の個数が t なので, $t = s-r+1$ であることがわかる. よって,

$$d(G) = a^{r-1}d(N)^{1/a}d(G/N)$$

が得られる.

以上より,

$$h(G) = \frac{a^{r-1}|N|^{s-r}k(N)^{1/a}k(G/N)}{a^{r-1}d(N)^{1/a}d(G/N)} = |N|^{s-r}h(N)^{1/a}h(G/N)$$

となることがわかる.

定理 7.3. *G を有限群, N を G の正規部分群とし, 条件 (F) が成立しているとする. このとき, $h(G) = |N|^{s-r}h(N)^{1/a}h(G/N)$ が成り立つ. ここで, s は G の共役類の個数, r は N に含まれる G の共役類の個数, a は G/N の位数である. 特に, $(h(G)^a \in \mathbb{Z}$ であることより, $h(G) \in \mathcal{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ なので$)$ 定理 7.1 が成立する.*

奇数 n に対し, Dih_{2n} は $N = \langle\sigma\rangle$ を Frobenius 核とする Frobenius 群である (σ, τ は前節のものである). その Frobenius 補群として $\langle\tau\rangle(\cong \mathrm{Dih}_{2n}/N)$ がとれるが, N も Dih_{2n}/N も可換である. よって $s-r=1$ であり, $h(N) = h(\mathrm{Dih}_{2n}/N) = 1$ なので, $h(\mathrm{Dih}_{2n}) = n$ が得られる. これは前節の結果に一致する (前節は更に n が 4 を法として 1 と合同である自然数の場合の結果であった).

8 まとめ

原田予想 II を検証するには, 共役類の位数および既約次数を完全に決定すればよいが, p 群の場合 $h(G), k(G), d(G)$ いずれも p の累乗であるため, $k(G) \geq d(G)$ を示せば十分である. 定理 6.1 に関しても, $\det\Gamma(G)$ は p が累乗であるため, $|\det\Gamma(G)| \geq c(G)$ を示せば十分である. しかし, この不等式の証明も今のところ解決の見通しが立っていない.

また, $\det\Gamma(G)$ の計算は群論のみを用いてなされるが, 第 6 節にあるように, 具体的な計算は決して容易とは言えない. やはり, 感覚的ではあるが, 群の構造論, 表現論の両方からアプローチすることが, 原田予想 II の検証には有効であると感じている. 特に, 定理 7.1 の設定において, $\det\Gamma(G)$ の計算ができないかとも試みたが, 非常に複雑であり, 未遂に終わったので, 本報告で述べる形でまとめることができなかった.

原田予想 II について, 原田先生, 千吉良氏による精密化が知られている.

予想 8.1. *G を有限群とし, G' をその交換子群とする. このとき $h(G)/|G'|$ は整数である.*

つまり, $h(G)$ は更に, G の交換子群 $|G'|$ の位数で割り切れるという予想である. この予想の解決について, G' の位数の解釈が現在のところ不明である. 定理 6.1 によれば, $\det\Gamma(G)$ は更に $|G'|^2$ で割り切れるということを意味している. 格子 $L(G)$ のグラム行列の観点から, このことの理解ができればと少し期待している. この予想に関し, 二面体群 G では, $h(G) = |G'|^{|Z(G)|}$ ($Z(G)$ は G の中心) が成り立つことが知られている. これは $|G|/2$ が奇数の場合に, 第 6 節及び第 7 節で確認した具体例からも示されている.

References

[ATLAS] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, Oxford, 1985.

[Ha] K. Harada, Revisiting Character Theory of Finite Groups, Bull. Inst. Math., Academia Sinica New Series), **13**, 383–395 (2018).

[Hi] A. Hida, Harada's conjecture on character degrees and class sizes —symmetric and alternating groups—, RIMS kokyuroku **2086**, 144-153 (2018).

[Is] I. Martin Isaacs, *Character theory of finite groups*, Dover edition 1994, originally published in Pure and applied mathematics, Academic Press, 1976.

[JL] G. James and Martin Liebeck, *Representations and characters of groups*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 1993.

[Ko] 近藤 武, 群論 (岩波基礎数学選書), 岩波書店, 1991.