集合対集合値写像の不動集合定理の観察

島根大学数理・データサイエンス教育研究センター †
瀬戸和希 (Kazuki Seto)
Education and Research Center for Mathematical and Data Science,
Shimane University
島根大学総合理工学部 †
黒岩大史 (Daishi Kuroiwa)
Major in Interdisciplinary Science and Engineering,
Shimane University

1 はじめに

本稿では、集合値写像 $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ が不動集合 $T(\bar{A}) = \bar{A} \in \mathcal{A}$ を持つための十分条件について、Schauder の不動点の拡張の形として与えた [1] の論文を基に、その観察を深めていくことを目的とする。主結果では、集合対集合値写像 T が不動集合を持つための十分条件を得るために Radström H.[2] の埋め込み手法を用いている。

ノルム空間 E に対して、和とスカラー倍を

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda \cdot A := \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

と定義する。ただし、$A, B \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ とする。このとき、

$$A - A = \{a - a' \mid a \in A, a' \in A\} \neq \{0\} = 0 \cdot A$$

であることから、$(E, +, \cdot)$ は線形空間ではない。このことが集合対集合値写像の不動集合定理を得るための大きな障害であったが、我々は埋め込み手法を用いることで主結果を得ている。

2 埋め込み手法

ノルム空間 E の非空なコンパクト凸集合 X とし、$\mathcal{C}$ を非空なコンパクト集合の族とする。$\mathcal{C}^2$ の元 $(A, B), (C, D)$ に対して、

$$(A, B) \equiv (C, D) \text{ if } A + D = B + C$$

† 〒 690-8504 島根県松江市西川津町 1060

と定義する。このとき、商空間を次のように定義する。

$$\mathcal{C}^2/\equiv := \{[A,B] \mid (A,B) \in \mathcal{C}^2\}$$

ただし、$[A,B] := \{(C,D) \in \mathcal{C}^2 \mid (A,B) \equiv (C,D)\}$ とする。また、$\mathcal{C}^2/\equiv$ の元に対して、和とスカラー倍を以下で定義する。

$$[A,B] + [C,D] := [A+C, B+D]$$

$$\lambda[A,B] = \begin{cases} [\lambda A, \lambda B] & \text{if } \lambda \geq 0 \\ [-\lambda B, -\lambda A] & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

さらに、ハウスドルフ距離を用いて

$$\|[A,B]\| := H(A,B)$$

と定義すると、$(\mathcal{C}^2/\equiv, \|\cdot\|)$ はノルム空間となる。このようにして埋め込み手法を用いてノルム空間を生成することが出来る。

3 主結果

主定理の前に、X の非空なコンパクト凸部分集合の族 $\mathcal{C}_X$ に関する補題を与える。

補題 3.1. $(\mathcal{C}_X, H)$ はコンパクト。ただし、H はハウスドルフ距離とする。

また、$\mathcal{C}_X$ の部分集合族 $\mathcal{A}$ についてある種の凸性を以下の通り仮定する。

$$A, B \in \mathcal{A},\ \lambda \in (0,1) \Rightarrow (1-\lambda)A + \lambda B \in \mathcal{A} \tag{1}$$

次の定理が集合対集合値写像の不動集合定理である。

定理 3.1. ハウスドルフ距離で連続な集合対集合値写像 $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ とする。次に *(i)* もしくは *(ii)* のどちらかが成立すると仮定する。

(i) $\mathcal{A}$ がハウスドルフ距離で閉

(ii) T の像 $T(\mathcal{A})$ がハウスドルフ距離で閉

このとき、T は不動集合 $\bar{A} \in \mathcal{A}$ を持つ。

証明のポイントとなる写像について述べる。$\psi : A \in \mathcal{A} \mapsto [A, \{0\}] \in \mathcal{C}^2/\equiv$ を与えることで ψ は連続で、かつその像 $\psi(\mathcal{A})$ は凸集合となる。この写像 ψ をうまく使うことによって定理 3.1 が証明される。また、次の系より定理 3.1 は Schauder の不動点定理の拡張であることが分かる。

系 3.1. ノルム空間 E の非空な凸集合 X とし、T を X 上の連続な自己写像とする。もし、T の像 $T(X)$ がコンパクトならば、T は不動点を持つ。

実際に $\mathcal{A} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ と置けばよい。

ここで、定理 3.1 は不動集合が一点集合ではないことを保証してはいないことに注意。その例について観察を行う。

例 **3.1.** $X = [0,2]^2$ とし、

$$\mathcal{A} = \{B(x_1, x_2, r) \mid B(x_1, x_2, r) \subset X, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, r \geq 0\}$$

とする。ただし、$B(x_1, x_2, r) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq r^2\}$ とする。また、集合値写像 $T(B(x_1, x_2, r)) = B(x_2, x_1, r^2)$ を与える。定理 *3.1* より、T は不動集合を持つ。実際に、不動集合は $B(1,1,1)$ と $B(x,x,0)$ $(0 \leq x \leq 2)$ が不動集合となるが、$B(x,x,0)$ は一点集合である。一方で、$\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A}' = \{B(x_1, x_2, r) \mid B(x_1, x_2, r) \subset X, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$$

とすれば、同様に定理 *3.1* から T が不動集合を持つことが分かり、$\mathcal{A}'$ の定義より不動集合に一点集合は存在しない。

最後に定理 3.1 の系をひとつ与える。

系 **3.2.** T を $\mathcal{C}_X$ 上のハウスドルフ連続な自己写像とする。このとき、T は不動集合 $\bar{A} \in \mathcal{C}_X$ を持つ。

参考文献

[1] Seto K., Kuroiwa D., A fixed set theorem for set-to-set maps, Appl. Anal. Optim. 2 (2018), no. 1, 41–46.

[2] Radström H. An embedding theorem for spaces of convex sets, Proceeding American Mathematical Society. 1952;3(1);165–169

[3] Brouwer L. E. J., Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten Mathematische Annalen 1911;71:97–115

[4] Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Mathematical Journal 1941;8(3):457–459.

[5] Kuroiwa D., Convexity for set-valued maps and optimization [PhD dissertation]. Niigata University; 1996.

[6] Henrikson J., Completeness and total boundedness of the Hausdorff metric, MIT Undergrad. J. Math. 1999;1;69–79.

[7] Takahasi W., Nonlinear Functional Analysis Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publishers, 2000.

[8] Fakhar M., Soltani Z., Zafarani J., Fixed set theorems with application to the fixed point theory, J. Nonlinear Convex Anal. 2016;17(3);569–578.

[9] Debnath P., Choudhury B. S., Neog M., Fixed set of set valued mappings with set valued domain in terms of start set on a metric space with a graph, Fixed point Theory Appl. 2017;5;8 pp.