BCK-代数における $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件に関する２つの話題

(Two topics for the condition $(\mathbf{I})_{x,y}$ in BCK-Algebras)

熊澤　昌明　（箕面学園高等学校）

Masaaki Kumazawa

Minoh Gakuen High School

1　準備と背景

1879 年に論理学者 G. Frege は, 古典命題論理計算の最初の公理系を発表した. その公理系は 6 つの推論規則を仮定しているが, この 6 つの推論規則を他の推論規則によって置き換える試みが, 多くの論理学者・数学者によって取り組まれた. おそらく, これらの研究の影響であろうが, 古典命題論理よりも弱い推論規則からできているが, 価値があると思われる弱い命題論理を見つけ出そうとする方向の研究が生まれた.

1960 年代に井関清志先生は, この推論規則を弱めた命題論理に関する研究に, 先生が指導する市民の数学研究グループのメンバーと共に取り組んだ. そして, この研究の中で, 古典命題論理よりも弱い代表的な命題論理である Meredith の System B-C-K (BCK logic) を代数化したものとして, 1966 年に井関清志先生は, 論文 [2] において BCK-代数を定義した.

その BCK-代数の定義を確認する.

定義 1.1（BCK-代数）　定数 0 と二項演算 * を持つ $<2,0>$ 型の代数 $X = <X; *, 0>$ が BCK-代数であるとは, X の任意の元 x, y, z に対して, 次の５つの条件 (I)～(V) を満たす代数である.

(I)　$\{(x*y)*(x*z)\}*(z*y)=0,$
(II)　$\{x*(x*y)\}*y=0,$
(III)　$x*x=0,$
(IV)　$0*x=0,$
(V)　$x*y=0$ かつ $y*x=0$　ならば　$x=y.$

このとき, 次のように BCK-代数に, 演算 $*$ を使って関係 $\leqq$ を入れる.

$x*y=0$ であるとき, そのときに限り $x \leqq y$ とする.

この関係 $\leqq$ は, BCK-代数において順序関係となることが知られている.

BCK-代数の代数構造によって与えられる順序関係を, BCK-順序（BCK-order）と呼んでいる. この半順序 $\leqq$ を備えている BCK-代数において, 我々はこの代数構造より決まってくる順序構造に興味を持ち, 新たな概念を提案した. BCK-代数の中の２元 x, y に対する下限の存在, その下限の存在の概念の拡張を意図して定義したものが, 次に与える $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件である.

定義 1.2 ((I)$_{x,y}$-条件) BCK-代数 X の 2 元 x, y に対して, X の元 z が存在し, 以下の (i)〜(iii) の条件を満たすとき, z は (I)$_{x,y}$-条件を満たすという.

(i) $z \leqq x,\ z \leqq y,$
(ii) $x * z \leqq x * y,$
(iii) $y * z \leqq y * x.$

この報告では, BCK-代数における, この (I)$_{x,y}$-条件に関する 2 つの話題に関して述べてみたい.

2 話題 I : BCK-代数の任意の 2 元 x, y に対して (I)$_{x,y}$-条件を満たす元 z は必ず存在するのか？

BCK-代数は, 半順序集合となるが, 任意の 2 元に対して必ず下限が存在するわけではない. では, 下限の存在を拡張した (I)$_{x,y}$-条件はどうであろうか. 即ち, BCK-代数の 2 元 x, y に対して, (I)$_{x,y}$-条件を満たす元 z は必ず存在するのであろうか？ 論文 [6] で提示した例のように元の数の少ない BCK-代数においては, 任意の 2 元に対して, 必ず (I)$_{x,y}$-条件を満たす元 z が, 1 つとは限らないが, 存在する.

ここで, BCK-代数全体が 等式クラス (equational class; variety) でないことを初めて示した有名な例をあげる.

例 2.1 (A. Wroński) 代数 $U =< U; *, 0 >$ を, 以下のように定義する.
まず, 二項演算 $*$ を定義する集合 U を 3 つの集合 $N, A,\ B$ の和集合からなるものとする. 即ち, $U = N \cup A \cup B$ であり, このとき, 集合 N, A, B はそれぞれ, 次のように定める.

$N = \{0, 1, 2, \cdots\},\ A = \{a_n : n \in N\},\ B = \{b_n : n \in N\}$

なお, $N \cap A = \phi,\ N \cap B = \phi,\ A \cap B = \phi$ であることを確認しておく.

次に, 集合 U の中のそれぞれの 2 元に対して, (2.1)〜(2.5) のように演算 $*$ を定義する :

$$n * m = \begin{cases} 0 & \text{if } n, m \in N, n < m \\ n - m & \text{if } n, m \in N, n \geqq m; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$a_n * a_m = b_n * b_m = \begin{cases} 0 & \text{if } n, m \in N, n > m \\ m - n & \text{if } n, m \in N, n \leqq m; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$n * a_n = n * b_n = 0 \quad \text{for every } n, m \in N; \tag{2.3}$$

$$a_m * n = a_{m+n},\ \ b_m * n = b_{m+n} \quad \text{for every } n, m \in N; \tag{2.4}$$

$$a_n * b_m = a_n * a_{m+1},\ \ b_n * a_m = b_n * b_{m+1} \quad \text{for every } n, m \in N; \tag{2.5}$$

このように定義された代数 $U =< U; *, 0 >$ はBCK-代数となる．この事実の証明は, A. Wroński の論文 [12] を参照して頂きたい.

ここでは. BCK-代数 U においては, 実際に, $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす元が存在しない２元 x, y があることを示す.

命題 2.2　BCK-代数 U において, ２元 $a_n, b_n \in U$ に対して, $(\mathrm{I})a_n, b_n$-条件を満たす元は U には存在しない.

(証明)　まず, ２元 a_n, b_n の, 共通の下界, 即ち, 定義 1.2 の条件 (i) を満たす元となるのは, 次の３つのタイプの何れかになる.

①.　$l \in N$,　②.　$a_m \in A(m > n)$,　③.　$b_k \in B(k > n)$

ここで, BCK-代数 X の２元 x, y に対して $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす元の集合を, $I(x, y)$ で表すことにする.

最初に, ① の場合について, 任意の $l \in N$ に対して $l \notin I(a_n, b_n)$ を示したい.

そのために. 定義 1.2 の 条件 (ii) が成り立たないことを示す.

演算 * の定義 (2.2), (2.4), (2.5) より

$$(a_n * l) * (a_n * b_n) = a_{n+l} * 1 \tag{2.6}$$

一方, 演算 * の定義 (2.3) より

$$1 * a_{n+l} = 0 \tag{2.7}$$

もし, (2.6) において　$a_{n+l} * 1 = 0$　と仮定すると, この仮定と (2.7) より

$$a_{n+l} = 1 \tag{2.8}$$

となり, この (2.8) は　$A \cap N = \phi$　に矛盾する．よって, $a_{n+l} * 1 \neq 0$.

この結果と (2.6) より, $a_n * l \nleqq a_n * b_n$　である.

次に, ②の場合について, 任意の $a_m \in A$ (ただし $m > n$)　に対して, $a_m \notin I(a_n, b_n)$ を示したい.

そのために, 定義 1.2 の条件 (iii) が成り立たないことを示す.

演算 * の定義 (2.2), (2.5) と $n < m$ より

$$(b_n * a_m) * (b_n * a_n) = \{(m+1) - n\} * \{(n+1) - n\} = \{(m-n)+1\} - 1 \geqq 1 \neq 0$$

従って, $b_n * a_m \nleqq b_n * a_n$　である.

最後に, ③の場合について, 任意の $b_k \in B$ (ただし $k > n$)　に対して, $b_k \notin I(a_n, b_n)$ を示したい.

そのため, 条件 (ii) が成り立たないことを示す.

演算 * の定義 (2.2), (2.5) と $k > n$ より

$$(a_n * b_k) * (a_n * b_n) = \{(k+1) - n\} * \{(n+1) - n\} = \{(k-n)+1\} - 1 \geqq 1 \neq 0$$

従って, $a_n * b_k \nleqq a_n * b_n$　である.

これによって, U において, ２元 a_n, b_n に対して $(\mathrm{I})a_n, b_n$-条件を満たす元が存在しないことが分かった.

ここで 1 つ問題が生まれる.

問題 1　BCK-代数 X において, X の中の 2 元 x, y が存在して, x, y に関して $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす元が X の中に存在しないときは, BCK-代数 X は等式クラスにはならないのか？ 即ち, BCK-代数が 等式クラスになるのかならないのかという問題に関して, $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件は 1 つの判定条件になっているのか？

3　話題 II：束となる BCK-代数と (I) 条件を持ち対合有界である BCK-代数の関係について

すでに述べたように, BCK-代数の代数構造は順序関係を与える. その為に BCK-代数は半順序集合となるが, その半順序集合が特に束の構造をもつ場合がある. 即ち, BCK-代数 X の任意の 2 元 x, y に対して下限が存在し, その元を $x \cap y$ と表し, また x, y に対して上限が存在し, その元を $x \cup y$ と表せば BCK-代数 $X =< X; \cap, \cup, 0 >$ が束となる. この時, BCK-代数 X を BCK-束 (BCK-lattice) と呼ぶ. この節では, BCK-代数が BCK-束となる条件について考えたい.

まず, 1974 年に井関清志先生, 1975 年に田中昭太郎先生によって導入された BCK-代数の重要な特別なクラスの定義を述べる.

定義 3.1（有界 BCK-代数：K. Iséki [3], K. Iséki and S. Tanaka [4]）
BCK-代数 X において, X の任意の元 x に対して, 常に $x \leqq 1$ を満たす特別な元 1 が存在するとき, 即ち, X の中に最大元 1 が存在するとき, BCK-代数 X は有界 BCK-代数と呼ばれる.

定義 3.2（可換 BCK-代数：S. Tanaka [9],[10], K. Iséki and S. Tanaka [4]）
BCK-代数 X 上に, 演算 $*$ を用いて新たな二項演算 $\wedge$ を, X の任意の 2 元 x, y に対して　$x \wedge y = y * (y * x)$　と定義する. このとき, X の 2 元 x, y に対して, 二項演算 $\wedge$ が, 次の条件

$$x \wedge y = y \wedge x$$

を常に満たすとき, BCK-代数 X は可換 BCK-代数と呼ばれる.

上記の 2 つの定義 3.1, 3.2 を共に満たすクラスに関して, 次の定理が知られている.

定理 3.3 (S. Tanaka [9], K. Iséki and S. Tanaka [4], T. Traczyk [11])
有界で, 更に可換な BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 >$ において, 演算 $*$ を用いて次のように二項演算 $\wedge, \vee$ と一項演算 N を定義する;

$$x \wedge y = y * (y * x),\ Nx = 1 * x,\ x \vee y = N(Nx \wedge Ny).$$

このとき, $X =< X; \wedge, \vee, N, 0, 1 >$ は演算 $\wedge, \vee$ に関して分配束となり, 更に演算 $\wedge, \vee, N$ に関してド・モルガンの法則を満たすので, ド・モルガン代数となる.

次に, この有界可換 BCK-代数を特別なクラスとして含み, 更に BCK-束となるクラスの存在を示したい. その準備の 1 つ目として, 下限の存在を拡張した定義 2.1, 即ち, $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件についての基本的性質を与える.

以下の命題 3.4 より定理 3.7 の証明については, 報告 [5] 及び論文 [6] を参照して頂きたい.

命題 3.4 BCK-代数 X の 2 元 x, y の下限 z が存在するならば, z は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす.

命題 3.5 $I(x, y) \neq \phi$, ならば $I(x, y)$ の中に x, y の上限 z が存在し, その元 z は集合 $I(x, y)$ の最大元となっている.

更に, 命題 3.5 より BCK-代数の中の特別なクラスを, 次のように定義する.

定義 3.6 （(I)-条件を持つ BCK-代数）
BCK-代数 X において, 任意の 2 元 x, y に対して, $I(x, y) \neq \phi$ であるとき, BCK-代数 X を (I)-条件を持つ BCK-代数という. このとき, 任意の 2 元 x, y に対して $I(x, y)$ には最大元 z が存在するので, z を $x \times y$ と表すことにする. このとき, $z = x \times y = y \times x$ となる.

このクラスは, 次の性質を持つ.

定理 3.7 BCK-代数が二項演算 $\times$ に関して下半束となる条件は, BCK-代数が (I)-条件を持つことと同値である.

可換 BCK-代数 X において, 2 元 $x, y \in X$ に対して, 可換元 $z = x \wedge y = y \wedge x$ とすれば, z は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たし更に z が下限になっている. 従って, (I)-条件を持つ BCK-代数のクラスは, 同じように順序構造が下半束となっている可換 BCK-代数よりも真に広いクラスである. 具体例については論文 [6] を参照して頂きたい.

ここで, 2 つ目の準備を定義する. その定義は有界 BCK-代数のもっている次の性質による.

命題 3.8 有界可換 BCK-代数 $X =< X; *, N, 0, 1 >$ において, X の任意の元 x に対して一項演算 N は対合性を満たす. 即ち, 等式 $NNx = x$ が常に成り立つ.

この性質より, BCK-代数において特別な有界性を持つクラスを定義する.

定義 3.9（対合有界 BCK-代数 : Y. S. Huang [1]) 有界 BCK-代数 X において, X の任意の元 x に対して一項演算 N が対合性 : $NNx = x$ を満たすとき, この BCK-代数 X を対合有界 (involutory; involutive bounded) であると呼ぶ.

上記の 2 つの定義 3.6, 3.9 を共に満たすクラスに関して, 次の定理が得られる.

定理 3.10 (熊澤 [7], M. Kumazawa[8]) (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数は, 二項演算 $\times, \vee_\times$ に関して分配束となる. ただし, 演算 $\vee_\times$ は X の 2 元 x, y に対して $x \vee_\times y = N(Nx \times Ny)$ と定める. 更に, 演算 $\times, \vee_\times, N$ に関してド・モルガンの法則も満たすので, ド・モルガン代数となっている.

なお, 有界可換な BCK-代数は, (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数であることが示せるので, 定理 3.10 は定理 3.3 の拡張になっている. (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数が, 有界可換 BCK-代数より真に広くなって事の具体例については, 報告 [7] を参照して頂きたい.

さて, ここでは以下の問題を考えよう. (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数より広い BCK-束は存在するのか? これに関連して, 次の結果がある.

命題 3.11(M. Kumazawa [8]) 有界 BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 >$ において, X が二項演算 $\times, \vee_\times$ と一項演算 N に関してド・モルガン代数でない BCK-束であるときは, X は対合有界ではない. 即ち, X の中にある x が存在して $NNx \neq x$ となっている.

(証明) まず, 定理 3.10 の対偶より, X がド・モルガン代数ではない BCK-束であるならば

X は (I)-条件を持つ対合有界な BCK-代数ではない (3.1)

一方, X は BCK-束であるので, X の任意の 2 元 x, y に対して下限 z が存在する. 命題 3.4 より, この z は $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件を満たす. 従って

X は (I)-条件を持つ (3.2)

(3.1), (3.2) より, X は対合有界ではないことがわかる. これで, 結論は示された.

この結果から, 演算 * より得られる一項演算を使ってド・モルガンの法則のような性質を望むことは難しいと考えられる. 我々の大きな目標は, BCK-束の中の分類を行うことである. (I)-条件を持ち対合有界な BCK-代数のクラスまでは, その構造がだいたいわかってきた. 次の段階は, その外側といえる更に広いクラスの BCK-束に関して考察を進めねばならない. まず, 2 つ目となる以下の問題を考えたい.

問題 2 対合有界を満たさない BCK-束は, 分配性を満たすのだろうか?

謝辞 今年度は, 新型コロナウイルスの蔓延防止のため, 研究集会はリモートになってしまいました. インターネットに不慣れな私は大変戸惑っていましたが, 研究代表者をしていただいた島根大学の岩見宗弘先生にお世話になり, どうにか発表を行うことができました. 先生には心より感謝申し上げます. また, 発表時には, 有意義な御助言によって発表内容をフォローしていただいた東京電機大学の近藤通朗先生にも心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] Y. S. Huang, On Involutory BCK-Algebras, *Soochow J. Math.*,**32**(2006), 51-57.

[2] K. Iséki, An Algebra Related with a Propositional Calculus, *Proc. Japan Acad.*,**42**(1966), 26-29.

[3] K. Iséki, Some Properties of BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University.*,**2**(1974), 193-201.

[4] K. Iséki and S. Tanaka, Introduction to the theory of BCK-algebras, *Math. Japonica.*, **23** (1978), 1-26.

[5] 熊澤昌明, BCK-代数における $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件の性質をめぐって, 数理解析研究所=*RIMS Koukyuroku*, **2130**(2019), 57-63.

[6] M. Kumazawa, A New Class in BCK-Algebras, *Scientiae Math. Japonica.* に掲載予定.

[7] 熊澤昌明, 対合有界な BCK-代数からできる束のイデアルについて, 講究録 (「代数系、論理、言語と計算機科学の周辺 II」共同研究 (公開型) 2020. 2. 17〜2020. 2. 19) に掲載予定.

[8] M. Kumazawa, De Morgan Algebras in BCK-Algebras, Preprint

[9] S. Tanaka, A New Class of Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University.*, **3** (1975), 37-43.

[10] S. Tanaka, On $\wedge$-Commutative Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University.*, **3** (1975), 59-64.

[11] T. Traczyk, On the Variety of Bounded Commutative BCK-Algebras, *Math. Japonica.*,**24**(1979), 283-292.

[12] A. Wroński, BCK-Algebra do not form a Variety, *Math. Japonica.*, **28**(1983), 211-213.

This work was supported by Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Resarch Center located in Kyoto University.

（大阪府の 1 日の感染者数は 1,000 人越え, まだまだウイズ・コロナの毎日続く, 2021.4.18)