Modular magic relabelings on a modular magic sudoku with the minimum order

東邦大学理学部情報科学学科 足立智子
Tomoko Adachi
Department of Information Science, Toho University

東邦大学大学院理学研究科 桑嶋大地
Daichi Kuwajima
Toho University, graduate student

1. はじめに

n を正の整数とする．位数 n のラテン方陣 (Latin square) とは, サイズ $n \times n$ の正方格子 (方陣) に n 種類の文字（シンボル）を入れ, どの縦の列, 横の行にもすべてのシンボルがちょうど 1 個ずつ出現するように配置したものである．ラテン方陣については様々な研究がなされており, 文献 [2, 3] に詳しい．

位数 n の魔方陣 (Magic square) とは, サイズ $n \times n$ の方陣に $1, 2, \cdots, n^2$ の数字 (シンボル) を入れ, どの行の和，列の和, 対角線の和も一定の値となるように配置したものである．それに対して, 位数 n の Modular magic square は, どの行の和，列の和, 対角線の和も, n^2 を法として 0 と合同になるように配置する．法 n^2 で計算するので, シンボルは, $0, 1, \cdots, n^2 - 1$ とする．Modular magic square は魔方陣にはならないし, 魔方陣は Modular magic square にはならない．

位数 n^2 の数独解 (Sudoku solution) とは，サイズ $n^2 \times n^2$ の方陣に $1, 2, \cdots, n^2$ の数字 (シンボル) を入れ, どの縦の列，横の行にもすべてのシンボルがちょうど 1 回ずつ出現し (すなわち, 位数 n^2 のラテン方陣であり), サイズ $n \times n$ の n^2 個の小方陣 (ブロック）に全てのシンボルがちょうど 1 回ずつ出現するように配置したものである．$n = 3$ の場合は, 通常の数独パズルの解 (完成形) である．位数 n^2 の数独解において, 同じ行にある n 個のブロックの集合を band と呼び, 同じ列にある n 個のブロックの集合を stack と呼ぶ．数独解についても多くの研究がなされており, 文献 [1, 4, 5] 等がある．

位数 n^2 の Modular magic sudoku solution とは, 位数 n^2 の数独解に, どのブロックも位数 n の Modular magic square になるという条件を付け加えたものである．以降は, Modular magic sudoku と呼ぶ．Modular magic sudoku では, n が 3 以上の奇数に限られる． シンボルの集合は, $Z_{n^2} = \{0, 1, \cdots, n^2-1\} = \{0, \pm1, \cdots, \pm(n^2-1)/2\}$ となる．

数独解のシンボルを置換した方陣もまた数独解となる．このとき, この二つの数独解は本質的に同じであり, 同じ軌道に属するという．数独解では, band (または stack) を入れ替えた方陣もまた数独解となり, もとの数独解と同じ軌道に属する．しかし, Modular magic sudoku のシンボルを置換した方陣が, Modular magic sudoku になるとは限らない．像もまた Modular magic sudoku になるようなシンボルの置換を, Modular magic relabeling と呼ぶ.

Lorch and Weld [6] は, Modular magic relabeling の概念を導入し, 位数が最小の $3^2 = 9$ の場合の Modular magic sudoku では二つの軌道が存在することを明らかにしたが, 具体的な方陣のイメージが掴みにくい.

そこで, 本稿では, 位数が最小の $n^2 = 9$ の場合において, 具体的なシンボルの対応を定めて．全ての Modular magic relabeling f_i を列挙し, 位数 $n = 3$ の Modular magic square がこれらの Modular magic relabeling f_i によってどのような Modular magic square に移るのかを具体的に示す．そして, 軌道が異なる二つの Modular magic sudoku S_1, S_2 について, Modular magic relabeling f_i の像を例示して, 得られた方陣 $f_i(S_1), f_i(S_2)$ がどのような Modular magic sudoku になるかを調べる.

2. 位数 3 の Modular magic square の対角成分

n を 3 以上の奇数とする．位数 n の Modular magic square M の各シンボルを法 n の値に置き換えた方陣を, M に関連する Remainder square と呼ぶ.

以降は, $n = 3$ とする． $Z_9 = \{0, 1, \cdots, 8\} = \{0, \pm1, \cdots, \pm4\}$, $V = \{0, 3, 6\} = \{0, \pm3\}$, $U = Z_9 - V = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{\pm1, \pm2, \pm4\}$ とする.

定理 2.1 *([6]), 位数 $n = 3$ の場合, Modular magic square に関連する Remainder square は, ラテン方陣でなければならない.*

定理 2.2 *([6]), 位数 3 の Modular magic square において, $V = \{0, 3, 6\}$*

の元がシンボルとなる3個のセルは, 方陣の対角成分を成す.

方陣の対角成分は, main 対角成分 (左上から右下の対角線) と off 対角成分 (右上から左下の対角線) の二種類あるが, 本稿では, 方陣の off 対角成分に $V = \{0,3,6\}$ の元がシンボルとして配置されることとする.

上の定理から, 位数9の Modular magic sudoku のブロックに当たる Modular magic square の off 対角成分のシンボルは, $V = \{0,3,6\}$ の元を方陣 A, B, C のようにサイクリックに並べたものであり, ラテン方陣 L_1 のように Modular magic sudoku における横の各段 (band), 縦の各段 (stack) に一つずつ存在する.

$$A = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & 3 & \\ 6 & & \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} & & 6 \\ & 0 & \\ 3 & & \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} & & 3 \\ & 6 & \\ 0 & & \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix}.$$

$|V| = |\{0,3,6\}| = 3$ より, 位数3の Modular magic square の off-対角成分のシンボルの配置は, $3! = 6$ 通り存在する. それは, 右上から $0,3,6$ をサイクリックに並べた方陣 A, B, C と, $0,6,3$ をサイクリックに並べた方陣 D, E, F である.

$$D = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & 6 & \\ 3 & & \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} & & 3 \\ & 0 & \\ 6 & & \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} & & 6 \\ & 3 & \\ 0 & & \end{bmatrix}.$$

3. 位数3の Modular magic square の非対角成分

次に, 位数3の Modular magic square の非対角成分の特徴を調べる.

off 対角成分にシンボル $d_1, d_2, d_3 \in V$ を配置し, セル $(1,1)$ にシンボル $x \in U$ を配置すると, Modular magic square の定義から, 残りの5個のセルのシンボルは一意に定まる.

$$\begin{bmatrix} x & & d_1 \\ & d_2 & \\ d_3 & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & -x-d_1 & d_1 \\ -x-d_3 & d_2 & -x-d_3-d_2 \\ d_3 & -x-d_1-d_2 & -x-d_2 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} x & & 0 \\ & 3 & \\ 6 & & \end{bmatrix}.$$

そこで, 本稿では, off 対角成分の並べ方が方陣 A であり, かつ, セル $(1,1)$ にシンボル x が配置される方陣を, A_x と表記する.

4. 対角成分と第一ブロック固定の Modular magic sudoku

位数 9 の Modular magic sudoku において, 各ブロックの off 対角成分の並べ方が L_1 であると仮定する. さらに, 第一ブロック (左上端のブロック) を A_1 に固定する.

第二ブロック, 第三ブロック, 第四ブロック, 第七ブロックにおけるセル $(1,1)$ のシンボルを, それぞれ, x, y, z, w とおく. このとき, 位数 9 の Modular magic sudoku S は下図になる.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}, B_x = \begin{bmatrix} x & & 6 \\ & 0 & \\ 3 & & \end{bmatrix}, C_y = \begin{bmatrix} y & & 3 \\ & 6 & \\ 0 & & \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} A_1 & B_x & C_y \\ B_z & C & A \\ C_w & A & B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & x & -x-6 & 6 & y & -y-3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & & 0 & & & 6 & \\ 6 & 7 & 5 & 3 & & & 0 & & \\ \hline z & & 6 & & & 3 & & & 0 \\ -z-3 & 0 & & & 6 & & & 3 & \\ 3 & & & 0 & & & 6 & & \\ \hline w & & 3 & & & 0 & & & 6 \\ -w & 6 & & & 3 & & & 0 & \\ 0 & & & 6 & & & 3 & & \end{array}\right].$$

S の第一行に注目すると, $\{1, 8, x, -x-6, y, -y-3\} = U$ となる必要がある. $-x-6 \neq 1, 8$ より $x+6 \neq -1, -8 = 8, 10$ だから $x \neq 8-6, 10-6 = 2, 4$ となる. さらに, $x \neq 1, 8$ だから $x \in \{5, 7\}$ を得る. 同様にして, $y \in \{2, 4\}$, $z \in \{7, 8\}$, $w \in \{4, 5\}$ を得る.

x, y, z, w が各 2 通りなので, S の候補は $2^4 = 16$ 通り. この 16 通り全ての組合せについて Modular magic sudoku の定義を満たすかチェックすると, $(x, y, z, w) = (7,4,7,4)$, $(7,4,8,5)$, $(7,4,8,4)$, $(7,4,7,5)$, $(5,2,7,4)$, $(5,4,7,4)$, $(7,2,7,4)$ の 7 通りとなる. これは, 下図の $S_1, S_2, \cdots, S_7$ であり, ブロックに用いられる位数 3 の Modular magic square は, A_1, A_2, A_8, B_7, B_8, B_5, C_4, C_5, C_2 の 9 通りである.

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_7 & C_4 & A_1 \\ C_4 & A_1 & B_7 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_8 & C_5 & A_2 \\ C_5 & A_2 & B_8 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_8 & C_5 & A_2 \\ C_4 & A_1 & B_7 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_7 & C_4 & A_1 \\ C_5 & A_2 & B_8 \end{bmatrix},$$

$$S_5 = \begin{bmatrix} A_1 & B_5 & C_2 \\ B_7 & C_2 & A_8 \\ C_4 & A_8 & B_5 \end{bmatrix}, S_6 = \begin{bmatrix} A_1 & B_5 & C_4 \\ B_7 & C_2 & A_1 \\ C_4 & A_8 & B_7 \end{bmatrix}, S_7 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & C_2 \\ B_7 & C_4 & A_8 \\ C_4 & A_1 & B_5 \end{bmatrix}.$$

Modular magic sudoku $S_2, S_3, \cdots, S_7$ は同じ軌道に属し, S_1 とは軌道が異なる. 各ブロックの off 対角成分の並べ方や第一ブロックを変えても, 同様である.

定理 4.1 *([6]), 位数 9 の Modular magic sudoku ではちょうど二つの軌道が存在する. これらの軌道のベースポイントとして, Modular magic sudoku* S_1, S_2 *を取ることができる.*

5. 位数 3 の Modular magic square における非対角成分の swap

位数 3 の Modular magic square A_1, A_2, A_8 の関係を考える. off 対角成分のシンボルは同じである. 非対角成分は, A_1, A_2 では同じ行におけるシンボルが入れ替わっており, A_1, A_8 では同じ列におけるシンボルが入れ替わっている.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

位数 3 の Modular magic square M において, off 対角成分のシンボルはそのままで, 各行 (または列) で非対角成分 2 個のシンボルを置換する操作を, row (または column) outer swap と呼び, r (または c) と表記する. すると, $r(A_1) = A_8$, $c(A_1) = A_2$, $r(B_7) = B_5$, $c(B_7) = B_8$, $r(C_4) = C_2$, $c(C_4) = C_5$ となる. このことから, $S_2, S_3, \cdots, S_7$ は次になる.

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ c(B_7) & c(C_4) & c(A_1) \\ c(C_4) & c(A_1) & c(B_7) \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ c(B_7) & c(C_4) & c(A_1) \\ C_4 & A_1 & B_7 \end{bmatrix},$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_7 & C_4 & A_1 \\ c(C_4) & c(A_1) & c(B_7) \end{bmatrix}, S_5 = \begin{bmatrix} A_1 & r(B_7) & r(C_4) \\ B_7 & r(C_4) & r(A_1) \\ C_4 & r(A_1) & r(B_7) \end{bmatrix},$$

$$S_6 = \begin{bmatrix} A_1 & r(B_7) & C_4 \\ B_7 & r(C_4) & A_1 \\ C_4 & r(A_1) & B_7 \end{bmatrix}, S_7 = \begin{bmatrix} A_1 & B_7 & r(C_4) \\ B_7 & C_4 & r(A_1) \\ C_4 & A_1 & r(B_7) \end{bmatrix}.$$

6. Modular magic relabeling

位数 9 の Modular magic sudoku における Modular magic relabeling f は, $Z_9 = V \cup U$ から Z_9 への全単射であり, V(またはU) に制限してもその中で全単射である. V に制限した写像 $f|_V$ は $|V|! = 3! = 6$ 通りある. U の一つの元 $x \in U$ の像 $f(x)$ を決めれば残りの U の元の像 $f(y), x \neq y \in U$ は一意に定まるので, U に制限した写像 $f|_U$ は $|U| = 6$ 通りある. よって, Modular magic relabeling f は $6 \times 6 = 36$ 通りある.

ここで, f の引数は本来 Z_9 の元であるが, 方陣が引数の場合は各セルに配置されるシンボルにそれぞれ移ると考える.

恒等写像を f_0 とする. $V = \{0, 3, 6\}$ に制限した場合に, $f_i\,(0 \leq i \leq 5)$ は $f_i(A) = A$, $f_i\,(6 \leq i \leq 11)$ は $f_i(A) = B$, $f_i\,(12 \leq i \leq 17)$ は $f_i(A) = C$, $f_i\,(18 \leq i \leq 23)$ は $f_i(A) = D$, $f_i\,(24 \leq i \leq 29)$ は $f_i(A) = E$, $f_i\,(30 \leq i \leq 35)$ は $f_i(A) = F$ とする.

その上で U に制限した場合に, ある一つの元 $x \in U$ の像 $f(x)$ を決めれば残りは一意に定まるので, $f_6(4) = 1$, $f_{12}(7) = 1$, $f_{18}(1) = 1$, $f_{24}(7) = 1$, $f_{30}(7) = 1$ とする. $0 \leq j \leq 5$ について, $f_{6j+1}(A_1) = c(f_{6j}(A_1))$, $f_{6j+2}(A_1) = r(f_{6j}(A_1))$, $f_{6j+3}(A_1) = c(f_{6j+2}(A_1))$, $f_{6j+4}(A_1) = r(f_{6j+3}(A_1))$, $f_{6j+5}(A_1) = c(f_{6j+4}(A_1))$ とする.

これで Modular magic relabeling $f_i\,(0 \leq i \leq 35)$ はすべて定まった.

引数が A_1 のとき, $f_i\,(0 \leq i \leq 35)$ の像を列挙すると, 次になる.

$$\begin{array}{ccc} f_0(A_1) = A_1, & f_1(A_1) = A_2 = c(A_1), & f_2(A_1) = A_8 = r(A_1), \\ f_3(A_1) = A_4 = c(A_8), & f_4(A_1) = A_5 = r(A_4), & f_5(A_1) = A_7 = c(A_5), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f_6(A_1) = B_7, & f_7(A_1) = B_8 = c(B_7), & f_8(A_1) = B_5 = r(B_7), \\ f_9(A_1) = B_1 = c(B_5), & f_{10}(A_1) = B_2 = r(B_1), & f_{11}(A_1) = B_4 = c(B_2), \end{array}$$

$$
\begin{gathered}
f_{12}(A_1) = C_4, \quad f_{13}(A_1) = C_5 = c(C_4), \quad f_{14}(A_1) = C_2 = r(C_4), \\
f_{15}(A_1) = C_7 = c(C_2), \quad f_{16}(A_1) = C_8 = r(C_7), \quad f_{17}(A_1) = C_1 = c(C_8),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_{18}(A_1) = D_1, \quad f_{19}(A_1) = D_5 = c(D_1), \quad f_{20}(A_1) = D_8 = r(D_1), \\
f_{21}(A_1) = D_7 = c(D_8), \quad f_{22}(A_1) = D_2 = r(D_7), \quad f_{23}(A_1) = D_4 = c(D_2),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_{24}(A_1) = E_4, \quad f_{25}(A_1) = E_5 = c(E_4), \quad f_{26}(A_1) = E_2 = r(E_4), \\
f_{27}(A_1) = E_7 = c(E_2), \quad f_{28}(A_1) = E_8 = r(E_7), \quad f_{29}(A_1) = E_1 = c(E_8),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_{30}(A_1) = F_7, \quad f_{31}(A_1) = F_2 = c(F_7), \quad f_{32}(A_1) = F_5 = r(F_7), \\
f_{33}(A_1) = F_4 = c(F_5), \quad f_{34}(A_1) = F_8 = r(F_4), \quad f_{35}(A_1) = F_1 = c(F_8).
\end{gathered}
$$

また, A_1, A_2, A_8, B_7, B_8, B_5, C_4, C_5, C_2 を引数とする f_{10} の像は次になる.

$$
\begin{gathered}
f_{10}(A_1) = B_2, \quad f_{10}(A_2) = B_1 = r(B_2), \quad f_{10}(A_8) = B_4 = c(B_2), \\
f_{10}(B_7) = C_8, \quad f_{10}(B_8) = C_7 = r(C_8), \quad f_{10}(B_5) = C_1 = c(C_8), \\
f_{10}(C_4) = A_5, \quad f_{10}(C_5) = A_4 = r(A_5), \quad f_{10}(C_2) = A_7 = c(A_5).
\end{gathered}
$$

一方, A_1, A_2, A_8, B_7, B_8, B_5, C_4, C_5, C_2 を引数とする f_{15} の像は次になる. ここで, 方陣のシンボルの配置を off 対角成分を軸にして対称に移す置換を t とする.

$$
\begin{gathered}
f_{15}(A_1) = C_7, \quad f_{15}(A_2) = C_8 = r(C_7), \quad f_{15}(A_8) = C_5 = t(C_7), \\
f_{15}(B_7) = A_4, \quad f_{15}(B_8) = A_5 = r(A_4), \quad f_{15}(B_5) = A_2 = t(A_4), \\
f_{15}(C_4) = B_1, \quad f_{15}(C_5) = B_2 = r(B_1), \quad f_{15}(C_2) = B_8 = t(B_1).
\end{gathered}
$$

軌道が異なる二つの Molular magic sudoku S_1, S_2 を Modular magic relabeling f_{10}, f_{15} で移すと次になる.

$$
f_{10}(S_1) = f_{10}\begin{pmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_7 & C_4 & A_1 \\ C_4 & A_1 & B_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 & C_8 & A_5 \\ C_8 & A_5 & B_2 \\ A_5 & B_2 & C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t(B_7) & t(C_4) & t(A_1) \\ t(C_4) & t(A_1) & t(B_7) \\ t(A_1) & t(B_7) & t(C_4) \end{bmatrix},
$$

$$
f_{15}(S_1) = f_{15}\begin{pmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_7 & C_4 & A_1 \\ C_4 & A_1 & B_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_7 & A_4 & B_1 \\ A_4 & B_1 & C_7 \\ B_1 & C_7 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t(C_4)) & r(t(A_1)) & r(t(B_7)) \\ r(t(A_1)) & r(t(B_7)) & r(t(C_4)) \\ r(t(B_7)) & r(t(C_4)) & r(t(A_1)) \end{bmatrix},
$$

$$f_{10}(S_2) = f_{10}\begin{pmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_8 & C_5 & A_2 \\ C_5 & A_2 & B_8 \end{pmatrix} = f_{10}\begin{pmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ c(B_7) & c(C_4) & c(A_1) \\ c(C_4) & c(A_1) & c(B_7) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_2 & C_8 & A_5 \\ C_7 & A_4 & B_1 \\ A_4 & B_1 & C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 & C_8 & A_5 \\ r(C_8) & r(A_5) & r(B_2) \\ r(A_5) & r(B_2) & r(C_8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t(B_7) & t(C_4) & t(A_1) \\ r(t(C_4)) & r(t(A_1)) & r(t(B_7)) \\ r(t(A_1)) & r(t(B_7)) & r(t(C_4)) \end{bmatrix},$$

$$f_{15}(S_2) = f_{15}\begin{pmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ B_8 & C_5 & A_2 \\ C_5 & A_2 & B_8 \end{pmatrix} = f_{15}\begin{pmatrix} A_1 & B_7 & C_4 \\ c(B_7) & c(C_4) & c(A_1) \\ c(C_4) & c(A_1) & c(B_7) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_7 & A_4 & B_1 \\ A_5 & B_2 & C_8 \\ B_2 & C_8 & A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_7 & A_4 & B_1 \\ r(A_4) & r(B_1) & r(C_7) \\ r(B_1) & r(C_7) & r(A_4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r(C_8) & r(A_5) & r(B_2) \\ A_5 & B_2 & C_8 \\ B_2 & C_8 & A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t(C_4)) & r(t(A_1)) & r(t(B_7)) \\ t(A_1) & t(B_7) & t(C_4) \\ t(B_7) & t(C_4) & t(A_1) \end{bmatrix}.$$

$A_4, A_5, B_1, B_2, C_7, C_8$ はModular magic square であるから, 方陣 $f_{10}(S_1)$, $f_{15}(S_1)$, $f_{10}(S_2)$, $f_{15}(S_2)$ もまた Modular magic sudoku になることがわかる．また, ブロックとなる Modular magic square の形と並びから, $f_{10}(S_1), f_{15}(S_1)$ は S_1 と同じ軌道に属し, $f_{10}(S_2), f_{15}(S_2)$ は S_2 と同じ軌道に属することがわかる.

さらに, 引数が S_1 のときには, Modular magic relabering f_{10} は, ブロックごとに左に一つずつずらして, 各ブロックのシンボルの配置を off 対角成分を軸にして対称に移した写像であることがわかる．Modular magic relabering f_{15} は, ブロックごとに右に一つずつずらして, 各ブロックのシンボルの配置を off 対角成分を軸にして対称に移し, row outer swap r を施した写像であることがわかる.

引数が S_2 のときに注目すると, Modular magic relabering f_{10}, f_{15} は, その定め方より, もとのブロックでの clumn outer swap c に当たる置換が, 像のブロックでの row outer swap r に変化することがわかる.

参考文献

[1] D. Keedwell (2010); Constructions of complete sets of orthogonal diagonal Sudoku squares, *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 47, pp. 227–238.

[2] D. Keedwell and J. Dénes (2015); *Latin Squares and their applications, (second edition)*, North-Holland publications.

[3] C. F. Laywine and G. L. Mullen (1998); *Discrete Mathematics Using Latin Squares*, John Weiley & Sons, INC.

[4] J. Lorch (2009); Mutually orthogonal families of linear sudoku solutions, *Journal of the Australian Mathematical Society*, Vol. 87, pp. 409–420.

[5] J. Lorch (2010); Orthogonal combings of linear sudoku solutions, *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 47, pp. 247–264.

[6] J. Lorch and E. Weld (2012); Modular magic sudoku, *INVOLVE*, Vol. 5, No. 2, pp. 173–186.